Zasada Szufladkowa Dirichleta

Łukasz Próchniak

1 Zadania

1.1 ZSD w kombinatoryce

Zadanie 1. W pokoju jest n osób. Pokazać, że istnieją takie dwie, które mają tyle samo znajomych. Uwaga: Jeśli A jest znajomym B, to B jest znajomym A.

Zadanie 2. Udowodnij, że wśród dowolnych 6 osób pewne 3 się znają albo pewne 3 się nie znają.

Zadanie 3. W każde pole kwadratu 5×5 wpisana jest jakaś liczba ze zbioru $\{0, +1, -1\}$. Następnie sumujemy i zapisujemy na kartce liczby w każdym wierszu, kolumnie i dwóch najdłuższych przekątnych. Czy możliwe jest, że otrzymamy na kartce parami różne liczby?

Zadanie 4. W kwadrat 9×9 wpisano liczby od 1 do 81. Udowodnij, że istnieją pewne dwa sąsiadujące ze sobą pola, na których wpisane liczby różnią się o co najmniej 6.

Zadanie 5. Na szachownicy 8×8 stoją 33 wieże. Udowodnij, że istnieje wśród nich 5 takich wież, że żadne dwie się nie atakują.

Zadanie 6. Szachista Miłosz ma 77 dni na przygotowanie się do turnieju. Chce zagrać każdego dnia co najmniej jedną grę, ale łącznie nie więcej niż 132. Pokaż, że istnieje ciąg kolejnych dni, podczas których zagrał dokładnie 21 gry.

Zadanie 7. W każde pole kwadratu 8×8 wpisano liczbę całkowitą dodatnią. Można wybrać dowolny kwadrat 3×3 lub 4×4 wpisany w ten kwadrat i dodać do wszystkich liczb w nim zawartych 1. Czy dla każdej pozycji startowej po pewnej liczbie takich operacji można osiągnąć 64 wielokrotności 10?

Zadanie 8. Danych jest 100 liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 100, których suma wynosi 200. Udowodnij, że da się wybrać tak pewne spośród nich, że ich suma będzie równa 100.

Zadanie 9. Na międzynarodowym spotkaniu spotyka się 2024 posłów z 6 różnych partii. Każdemu przypisano pewien inny numer od 1 do 2024. Udowodnij, że istnieje taki poseł, którego numer jest sumą dwóch innych posłów(niekoniecznie różnych) z jego partii.

Zadanie 10 (Twierdzenie Erdősa-Szekeresa)**.** Dany jest ciąg $n^2 + 1$ liczb całkowitych. Udowodnij, że zawiera on niemalejący podciąg $n + 1$ liczb lub nierosnący podciąg $n + 1$ liczb.

1.2 ZSD w teorii liczb i algebrze

Zadanie 11. Danych jest 70 różnych dodatnich liczb całkowitych $\leqslant 200$. Udowodnij, że istnieją takie dwie liczby z tego zbioru, których różnica wynosi $4, 5$ lub 9.

Zadanie 12. Dane są permutacje $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ liczb od 1 do 100. Udowodnij, że spośród iloczynów $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{100}b_{100}$ pewne dwa są sobie równe.

Zadanie 13. Podzbiór A zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ma $n + 1$ elementów. Udowodnij, że istnieją różne $a, b \in A$, takie że $a \mid b$.

Zadanie 14. Dane są liczby a i b, które nie mają wspólnych dzielników. Udowodnij, że istnieją x, y całkowite dodatnie, takie że $ax - by = 1$.

Zadanie 15. Dana jest liczba rzeczywista x i liczba całkowita dodatnia n. Udowodnij, że istnieją takie liczby całkowite p, q, że $1 \leqslant q \leqslant n$ oraz

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn}$$

Zadanie 16. Dany jest zbiór A, składający się z 2024 liczb dodatnich całkowitych, z których żadna nie ma dzielnika pierwszego większego niż 23. Udowodnij, że istnieją 4 różne elementy w A, takie że ich iloczyn jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

1.3 ZSD w planimetrii/stereometrii

Zadanie 17. Dany jest pięciokąt, którego wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Udowodnij, że środek pewnego boku lub przekątnej ma współrzędne całkowite

Zadanie 18. 51 uczestników Olimpiady Matematycznej zostało rozsadzonych na zawody w kwadracie o boku 7 metrów. Udowodnij, że istnieją 3 tacy uczestnicy, że znajdują się w kole o promieniu 1 metra.

Zadanie 19. Dane jest 6 punktów w prostokącie 3×4. Udowodnij, że istnieją dwa, których odległość jest nie większa niż $\sqrt{5}$.

Zadanie 20. Udowodnić, że jeżeli każdy punkt płaszczyzny jest pokolorowany na jeden z n kolorów, to w tej płaszczyźnie istnieje prostokąt, którego wszystkie cztery wierzchołki są jednokolorowe.

Zadanie 21. Każdy punkt okręgu pokolorowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje wpisany w ten okrąg trójkąt równoramienny, którego wszystkie trzy wierzchołki są tego samego koloru.

Zadanie 22. W kwadracie o boku 1 leży n okręgów o sumie obwodów 10. Udowodnij, że istnieje prosta przechodząca przed co najmniej 4 z nich.

Zadanie 23. Danych jest 25 punktów na płaszczyźnie, takich że w każdym 3-elementowym zbiorze są co najmniej dwa punkty, których odległość wynosi co najwyżej 1. Udowodnij, że wśród nich istnieje 13 punktów, takich że wszystkie leżą w pewnym kole o promieniu 1.

Zadanie 24. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego wszystkie boki są mniejsze od 24. Dany jest punkt P wewnątrz $ABCD$. Udowodnij, że istnieje wierzchołek, od którego odległość punktu P jest mniejsza od 17.

Zadanie 25. Na płaszczyźnie wybrano 2024 punkty w ten sposób, że dla dowolnych trzech punktów A, B, C spośród wybranych zachodzi nierówność $AB \neq AC$. Następnie połączono odcinkiem każdy punkt z punktem mu najbliższym. Jaka jest możliwie największa liczba odcinków wychodzących z jednego punktu?

1.4 ZSD i teoria miary

Zadanie 26. Udowodnić, że w dowolnej figurze o polu równym 6, zawartej w kole o promieniu 2, istnieją takie dwa punkty, których odległość wynosi dokładnie 1/3.

Zadanie 27 (Twierdzenie Birkhoffa)**.** Jeśli Z jest dowolnym ograniczonym podzbiorem płaszczyzny mającym pole $S(Z) > 1$, to istnieje taki wektor v, że w zbiorze przesuniętym o wektor v leżą(co najmniej) dwa punkty kratowe.

Zadanie 28. 12% sfery jest pokolorowane na czarno. Reszta na biało. Udowodnij, że istnieje prostopadłościan, którego wierzchołki należą do sfery i wszystkie są pokolorowane na biało.

1.5 Nieskończone ZSD

Zadanie 29. Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem rosnącym liczb całkowitych. Udowodnij, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu może być wyrażone jako:

$$a_n = xa_p + ya_q$$

gdzie x, y są liczbami całkowitymi dodatnimi, a $p \neq q$.

Zadanie 30. Niech k będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że istnieje liczba pierwsza p oraz rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots$, że $p + a_1k, p + a_2k, \ldots$ są liczbami pierwszymi.

Zadanie 31. Zbiór $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru liczb naturalnych pomalowano dwoma kolorami: białym i czerwonym. Udowodnić, że istnieje taki nieskończony podzbiór $X \subset \mathbb{N}$, że wszystkie elementy $\mathcal{P}_2(X)$ są jednego koloru.

2 Rozwiązania

Rozwiązanie 1. Każdej osobie przypiszmy liczbę jej znajomych. Ta liczba należy do zbioru $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Jednak 0 i $n-1$ nie mogą pojawić się naraz. Zatem mamy $n-1$ liczb i n osób.

Rozwiązanie 2. Zamieńmy zadanie na kolorowanie grafu. Czerwona krawędź będzie oznaczała, że osoby się znają, natomiast niebieska, że się nie znają. Wierzchołek A z ZSD będzie miał co najmniej 3 krawędzie jednego koloru. Załóżmy, b.s.o. że są czerwone. Niech będą to krawędzie do wierzchołków B, C, D. Jeżeli jakakolwiek krawędź między tymi wierzchołkami jest czerwona, to mamy tezę. Zatem wszystkie muszą być niebieskie i także mamy monochromatyczny trójkąt.

8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1
1	2	3	4	5	6	7	8

rys 1.1

Rozwiązanie 3. Nie jest możliwe otrzymanie na kartce wszystkich różnych liczb. Zauważmy, że zapisaliśmy na kartce $5+5+2=12$ liczb. Najmniejsza możliwa do uzyskania suma to $5\cdot(-1)=-5$, a największa to $5\cdot 1=5$. Zatem wszystkich możliwych do uzyskania sum jest 11. Oznacza to, że z ZSD pewne dwie sumy będą równe.

Rozwiązanie 4. Załóżmy tezę nie wprost. Wtedy między dowolnymi sąsiadującymi liczbami różnica wynosi co najwyżej 5. Zatem na ścieżce o długości k suma różnic wynosi co najwyżej $5k$. Przez odległość między polami będę nazywał sumę różnicy wierszy i kolumn. Odległość między 1 i 81 wynosi co najwyżej 16. Rzeczywiście $16\cdot 5=80$, więc gdyby istniała ścieżka między nimi krótsza niż 16, to z ZSD któraś różnica byłaby większa niż 5. Zatem 1 i 81 muszą być umiejscowione w rogach. Teraz możemy popatrzeć na ścieżkę między 1 i 80. Wiemy, że jej długość to co najwyżej 15, ale $15\cdot 5=75$, więc doszliśmy do sprzeczności, bo nie ma innego pola oddalonego o co najmniej 16.

Rozwiązanie 5. Pokolorujmy następująco szachownicę tak jak na rys 1.1. Z ZSD na pewnym kolorze będzie stało co najmniej 5 wież. Łatwo zauważyć, że takie kolorowanie spełnia warunki zadania.

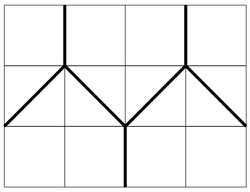
Rozwiązanie 6. Niech a_k oznacza liczbę gier rozegranych do k-tego dnia włącznie. Popatrzmy na ciąg $a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1+21, a_2+21, \dots, a_{77}+21$. Wszystkie liczby muszą być różne. Każda liczba z tego ciągu jest nie mniejsza niż 1 i nie większa niż $132+21=153$. Jednak tych liczb jest 154. Zatem ZSD jakieś dwie liczby w ciągu są sobie równe.

Rozwiązanie 7. Oczywiście wystarczy patrzeć na reszty (mod 10). Odwróćmy rozumowanie zaczynając od tablicy wypełnionej zerami. Z jednej strony liczba wszystkich możliwych uzyskania reszt w tablicy wynosi 10^{64}. Wszystkich kwadratów 4×3 oraz 4×4 jest $(8-3+1)^2+(8-4+1)^2=61$. Z drugiej strony poprzez operacje na mniejszych kwadratach jesteśmy w stanie dostać co najwyżej 10^61 ustawień na tablicy poprzez zsumowanie wartości do pól po operacjach na kwadratach. Zatem z ZSD nie jesteśmy w stanie pokryć każdej początkowej pozycji startowej.

Rozwiązanie 8. Najpierw pokażę, że da się podzielić te liczby na dwa zbiory po 50 liczb, których sumy są większe niż 50. Załóżmy, że występuje co najwyżej jedna liczba >1. Wtedy mamy co najmniej 99 jedynek i dostajemy, że ta liczba jest $\geqslant 101$, więc doszliśmy do sprzeczności. Zatem istnieją co najmniej dwie liczby >1 w tym zbiorze. Dajmy jedną do jednego zbioru i drugą do drugiego. Wtedy Dobierzmy pozostałe 49 po kolei. Widać, że sumy w tych zbiorach są większe od 50. Oznaczmy przez $a_1, a_2, \dots, a_{50}$ liczby z pierwszego zbioru. Rozpatrzmy sumy prefiksowe $s_k=a_1+\cdots+a_k$. Zauważmy, że z ZSD albo istnieje s_k podzielne przez 50 albo istnieją s_k oraz s_l, które dają takie same reszty (mod 50). Wtedy bierzemy s_l-s_k, które jest podzielne przez 50. Analogicznie robimy dla drugiego zbioru. Mamy zatem dwie sumy A i B obie podzielne przez 50. Żadna z tych liczb nie może być 150 ani 200 z poprzednich założeń. Zatem albo któraś z nich jest równa 100 albo dwie różne 50. Bierzemy wtedy odpowiednio jedną z nich lub ich sumę.

Rozwiązanie 9. Załóżmy nie wprost, że teza nie zachodzi. Oznaczmy partie kolejno przez A, B, C, D, E, F. Z ZSD musi istnieć partia(bez straty ogólności niech będzie to A), że będzie w niej co najmniej $\lceil\frac{2024}{6}\rceil=338$ posłów $a_1<a_2<\cdots<a_{337}$. Jeśli chcemy, żeby teza nie zachodziła, to żadna z liczb $a_{337}-a_1, a_{337}-a_2, \dots, a_{337}-a_{336}$ nie może występować w A, czyli muszą one pojawić się w B, C, D, E, F. Ponownie korzystając z ZSD w pewnej partii(b.s.o. w B) będzie co najmniej $\lceil\frac{336}{5}\rceil=68$ posłów. Oznaczmy ich przez $b_1<b_2<\cdots<b_{68}$. Analogicznie jak poprzednio żadna z liczb $b_{68}-b_1, b_{68}-b_2, \dots, b_{68}-a_{67}$ nie może należeć do B. Co więcej nie może także należeć do A, ponieważ różnica liczb z B jest różnicą liczb z A, więc otrzymalibyśmy sprzeczność. Powtarzając ten sam argument jeszcze 3 razy dochodzimy do sytuacji, w której w partii F jest co najmniej 2 członków $f_1<f_2$, których różnica f_2-f_1 nie może należeć do żadnego ze zbiorów A, B, C, D, E, F, sprzeczność.

Rozwiązanie 10. Oznaczmy liczy występujące w ciągu przez $s_1, s_2, \dots, s_{n^2+1}$. Niech a_i oznacza długość najdłuższego ciągu nierosnącego zaczynającego się od lewej i kończącego się s_i. Natomiast b_i długość najdłuższego ciągu niemalejącego zaczynającego się od lewej i kończącego się s_i. Rozpatrzmy pary (a_i, b_i), zakładając tezę nie wprost przyjmują wartości (i,j) dla $1\leqslant i,j\leqslant n$. Zauważmy, że $(a_i, n_i)\neq(a_j, b_j)$. Pokażę, tezę dla dwóch kolejnych par. Jeśli $s_i\leqslant s_{i+1}$, to $a_{i+1}=a_i+1$. Natomiast w przeciwnym wypadku $b_{i+1}=b_i+1$. Takich par jest n^2+1, natomiast mogą przyjmować n^2 wartości, więc z ZSD jakieś dwie mają takie same wartości, sprzeczność.



rys 1.2

Rozwiązanie 11. Oznaczmy te liczby kolejno przez $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Rozpatrzmy zbiór liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_1 + 4, a_2 + 4, \ldots, a_{99} + 4, a_1 + 9, a_2 + 9, \ldots, a_{99} + 9$. Tych liczb jest 210 oraz żadna z nich nie przekracza 209. Zatem z ZSD istnieją takie różne a_i, a_j, że $a_i + x = a_j + y$, gdzie $x, y \in \{4, 9\}$ oraz $x \neq y$. Znaleźliśmy więc liczby, których różnica wynosi 4,5 lub 9.

Rozwiązanie 12. Załóżmy nie wprost, że wszystkie iloczyny są różne. Zatem jest dokładnie 50 iloczynów parzystych i 50 nieparzystych. Nieparzyste składają się z nieparzystych liczb a_i oraz b_i. Wtedy parzyste iloczyny składają się z dwóch parzystych liczb, więc są to liczby postaci $4k$. Nie ma wtedy liczb postaci $4k + 2$.

Rozwiązanie 13. Każdą liczbę całkowitą dodatnią da się przedstawić jako $a = 2^k b$, gdzie b jest liczbą nieparzystą. Zauważmy, że liczb w zbiorze $\{1, 3, \ldots, 2n - 1\}$ jest n, więc z ZSD mamy jakieś dwie liczby w naszym zbiorze, które są postaci $2^k b$ oraz $2^l b$. Wtedy któraś z nich jest dzielnikiem drugiej.

Rozwiązanie 14. Rozważmy reszty z dzielenia przez b ciągu $a, 2a, \ldots, (b-1)a$. Zauważmy, że nie może tam występować 0, ponieważ a i b nie mają żadnego wspólnego dzielnika(są względnie pierwsze), więc ak dla $k < b$ nie będzie podzielne przez b. Załóżmy, że nie występuje reszta 1. Wtedy z ZSD jakaś reszta pojawia się dwukrotnie. Załóżmy, że $ak \equiv al \pmod b$. Wtedy $b \mid a(k - l)$. Korzystając z analogicznego argumentu, co poprzednio dochodzimy do sprzeczności, ponieważ $k - l < b$. Zatem musi występować reszta 1, z czego wynika, że $by = ax - 1$ dla pewnych x, y całkowitych.

Rozwiązanie 15. Przekształcając tezę $|xq - p| < \frac{1}{n}$. Popatrzmy na ciąg $n+1$ części ułamkowych $\{0x\}, \{1x\}, \{2x\}, \ldots, \{nx\}$. Te liczby będą leżeć w przedziałach $\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$. Z ZSD któreś dwie z nich znajdą się w jednym przedziale, więc $|\{k_1 x\} - \{k_2 x\}| < \frac{1}{n}$. Weźmy $a = k_1 x - \{k_1 x\}$ oraz $b = k_2 x - \{k_2 x\}$. Wtedy $|(a - b) + (k_2 - k_1)x| < \frac{1}{n}$. Biorąc $p = a - b$ oraz $q = k_2 - k_1$ otrzymaliśmy tezę.

Rozwiązanie 16. Pokażemy ogólniejszą tezę, która mówi że wśród $3 \cdot 2^n + 1$ liczb, których dzielniki pierwsze należą do zbioru $\{p_1, \ldots, p_n\}$ istnieją 4 liczby, których iloczyn jest 4 potęgą liczby całkowitej. Ponieważ $3 \cdot 2^9 + 1 < 2024$, to teza będzie zachodzić. Jeszcze wcześniej pokażemy lemat, mówiący że wśród $2^n + 1$ liczb, których zbiór dzielników pierwszych to $\{p_1, \ldots, p_n\}$, istnieją takie dwie że ich iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej. Zauważmy, że to czy liczba jest kwadratem determinuje parzystość wykładnika. Jeśli $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_n^{\alpha_n}$, to $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ muszą być parzyste. Jeśli $n = ab$, to oznacza, że suma wykładników a, b dla każdej liczby pierwszej p_i musi mieć taką samą parzystość. Skoro tych liczb jest $2^n + 1$, a możliwych parzystości wykładników jest 2^n, to z ZSD jakieś dwie liczby mają taką samą parzystość we wszystkich wykładnikach, to znaczy ich iloczyn jest kwadratem. Stosując udowodniony lemat $\frac{(3 \cdot 2^n + 1) - (2^n + 1)}{2} = 2^n + 1$ razy otrzymujemy, że mamy $2^n + 1$ par, które są kwadratami. Można lemat zastosować ponownie do $\sqrt{ab}$, gdzie ab to iloczyny tych par i otrzymać tezę.

Rozwiązanie 17. Współrzędne środka odcinka AB w punktach $A(a, b)$ oraz $B(c, d)$ to $S(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$. Mamy pięć punktów o współrzędnych całkowitych. Popatrzmy na pary współrzędnych tych punktów (mod 2). Są 4 możliwe wartości takich par, a mamy pięć takich par, więc pewne dwie mają takie same parzystości. Zatem współrzędne środka odcinka z nich zbudowanych będą całkowite.

Rozwiązanie 18. Podzielmy kwadrat o boku 7 metrów na 25 jednakowych kwadratów. Wtedy z ZSD pewnych 3 uczestników znajdzie się w jednym takim kwadracie. Zauważmy, że przekątna tego kwadratu to $\sqrt{2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2} < 2$. Zatem będą leżeć w okręgu o środku w środku przekątnej oraz promieniu 1.

Rozwiązanie 19. Wystarczy podzielić prostokąt tak jak na rys 1.2. Z ZSD jakieś dwa punkty leżą w jednej z wydzielonych figur. Odległość pomiędzy punktami w tej figurze wynosi $\leqslant \sqrt{5}$.

Rozwiązanie 20. Rozpatrzmy $n^{n+1} + 1$ kolejnych kolumn zawierających $n + 1$ liczb każda. Z ZSD pewne dwie kolumny są takie same, ponieważ różnych kolumn długości $n + 1$ jest n^{n+1}. Mając dwie takie same kolumny ponownie korzystając z ZSD istnieje jakiś kolor, który występuje co najmniej dwa razy i to właśnie jego wybieramy.

Rozwiązanie 21. Wystarczy wziąć pięciokąt foremny. Zauważmy, że z ZSD istnieje kolor, że co najmniej 3 wierzchołki są jednego koloru. Dowolnie wybrany z nich trójkąt będzie równoramienny.

Rozwiązanie 22. Weźmy dowolny bok kwadratu i zaznaczmy wszystkie średnice tych okręgów, które są równoległe do tego boku. Zrzutujmy te średnice na wybrany bok. Całkowita długość wybranych odcinków wynosi $\frac{10}{\pi} > 3$. Zatem z ZSD istnieje punkt pokryty przez co najmniej przez 4 z nich. Wystarczy wziąć prostą prostopadłą przechodzą przez ten punkt do boku kwadratu.

Rozwiązanie 23. Niech A i B będą najbardziej odległymi punktami. Jeśli $|AB| \leqslant 1$, to wystarczy wziąć koło o promieniu 1 i środku w A. Załóżmy zatem, że $|AB| > 1$. Weźmy dowolny inny punkt P_i. Wtedy co najmniej jeden z odcinków $|P_iA|$ oraz $|P_iB|$ wynosi co najwyżej 1. Z ZSD będzie co najmniej 13 punktów P_i, takich że odległość do jednego z wierzchołków A, B wynosi co najwyżej 1. Wystarczy wziąć koło o środku w tym wierzchołku i promieniu 1.

Rozwiązanie 24. Załóżmy, że odległości wszystkich wierzchołków od P są $\geqslant 17$. Z ZSD co najmniej jeden z kątów wierzchołek-P-wierzchołek jest nie mniejszy niż $90°$. Załóżmy b.s.o. że jest to $\angle APB$. Wtedy $24^2 = 576 > |AB|^2 \geqslant |PA|^2 + |PB|^2 \geqslant 2 \cdot 17^2 = 578$, więc sprzeczność.

Rozwiązanie 25. Pokażę, że z jednego wierzchołka może wychodzić co najwyżej 5 innych odcinków. Przypuśćmy przeciwnie, że pewien punkt punkt A jest połączony z przynajmniej sześcioma innymi punktami $A_1, \ldots, A_n$, gdzie $n \geqslant 6$. Wówczas z ZSD przynajmniej jeden z katów $\angle A_iAA_{i+1}$ nie przekracza $60°$. Wówczas w trójkącie A_iAA_{i+1} największą miarę ma któryś z pozostałych kątów. Załóżmy b.s.o. że $\angle AA_iA_{i+1}$ ma największą miarę. Wtedy $|AA_{i+1}| > |AA_i|$ oraz $|AA_{i+1}| > |A_iA_{i+1}|$. Pierwsza z nich oznacza, że A_{i+1} nie jest najbliższym punktem dla A, a druga że A nie jest najbliższym punktem dla A_{i+1}. Ale odcinek AA_{i+1} został narysowany, sprzeczność. Konstrukcję dla 5 odcinków pozostawiam dla czytelnika.

Rozwiązanie 26. Oznaczmy figurę przez $\mathcal{A}$. Niech $\mathcal{B}$ będzie przesunięciem $\mathcal{A}$ o wektor $\vec{v}$ o długości $\frac{1}{3}$. Analogicznie $\mathcal{C}$ będzie przesunięciem o $\vec{w}$, jednak tak że kąt pomiędzy wektorami $\vec{v}, \vec{w}$ wynosi $60°$. Wtedy wszystkie figury będą się zawierać w kole o promieniu $\frac{7}{3}$. Załóżmy, że figury $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ są rozłączne. Wtedy $S(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) + S(\mathcal{C}) = 18 > \pi \cdot \frac{49}{9}$, więc doszliśmy do sprzeczności. Zatem pewne dwie z tych figur mają przecięcie. Jeśli $\mathcal{A}$ przecina się z $\mathcal{B}$ lub z $\mathcal{C}$, to oznacza, że istnieją punkty w figurze $\mathcal{A}$ oddalone dokładnie o $\frac{1}{3}$. Załóżmy zatem, że to $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{C}$ mają wspólne przecięcie. Oznaczmy ten punkt przez X. Ten punkt jest obrazem przesunięcia pewnych Y, Z o wektory o tej samej długości i pod kątem $60°$, więc $\triangle XYZ$ jest równoboczny i $|YZ| = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie 27. Oznaczmy

$$S_(a,b) = \{(x,y) : \lfloor x \rfloor = a, \lfloor y \rfloor = b\}$$

Zauważmy, że po przesunięciu zbiorów $S_(a,b)$ o wektor $[a,b]$ dostaniemy figurę zawartą w kwadracie o boku 1, której pole jest większe niż 1, więc istnieją pewne dwa punkty, które po przesunięciu o wektor $[a,b] - [c,d]$ są tym samym punktem, więc można przesunąć figurę tak, żeby oba leżały w punktach kratowych.

Rozwiązanie 28. Rozdzielmy kulę względem 3 osi symetrii. Dostajemy 8 części. Wybierzmy dowolną z nich. Odbijmy jej czarne pokolorowanie względem pewnej osi i weźmy sumę tych czarnych pokolorowań. Zajmą one co najwyżej 24% sfery. Robimy tak jeszcze 2 razy i otrzymamy, że po tych odbiciach co najwyżej 96% sfery będzie zajęte przez czarny kolor. Zatem możemy wybrać dowolny punkt biały i pozostałe odpowiadające mu przez odbijanie względem osi. Łatwo można zauważyć, że tamte punkty również były białe. Z definicji pola, musi istnieć punkt biały poza okręgiem wielkim, ponieważ okrąg ma pole 0.

Rozwiązanie 29. Niech m będzie liczbą całkowitą, że $0 \leqslant m < a_1$ oraz A_m będzie zbiorem liczb a_k, które dają resztę m przy dzieleniu przez a_1. Wtedy z ZSD któryś zbiór A_k jest nieskończony. Niech $A_m = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots\}$ gdzie $k_1 < k_2 < \ldots$ oraz $a_{k_i} = p_ia_1 + m$. Wtedy $a_{k_i} - a_{k_1} = (p_i - p_1)a_1$, więc mamy $a_{k_i} = xa_{k_1} + ya_1$, gdzie $x = 1$ oraz $y = p_i - p_1 > 0$.

Rozwiązanie 30. Niech P będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych. Niech $P_0, P_1, \ldots, P_i \ldots, P_{k-1}$ będą kolejno zbiorami liczb pierwszych, które dają resztę i przy dzieleniu przez k. Wtedy z ZSD pewien z nich jest nieskończony. Załóżmy, że P_i jest nieskończony i p jest jego najmniejszym elementem. Niech $x_1, x_2, \ldots$ będą kolejno elementami zbioru P_i. Wtedy dla każdego x_i zdefiniujmy $a_i = \frac{x_i - p}{k}$. Wystarczy zauważyć, że a_i są całkowite.

Rozwiązanie 31. Niech $\mathcal{P}_2(\mathbb{N}) = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ będzie przedstawieniem naszego zbioru w postaci sumy(rozłącznej) podzbiorów białego i czerwonego. Konstrukcję zbioru X przeprowadzimy indukcyjnie. Wystartujemy od dowolnej liczby naturalnej k_1. Rozważmy nieskończony zbiór $\mathcal{X}_1 = \{\{k_1, n\} : n > k_1\}$ wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, których jednym elementem jest k_1, a drugi jest liczbą większą niż k_1 i popatrzmy na rozbicie

$$\mathcal{X}_1 = (\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{A}) \sqcup (\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{B}).$$

Co najmniej jeden ze składników tego rozbicia jest, na mocy ZSD, zbiorem nieskończonym. Wobec tego istnieje taki nieskończony podzbiór $N_1 \subseteq \mathbb{N}$, że wszystkie podzbiory $\{k_1, n\}$, dla $n \in \mathbb{N}$, są jednego koloru. Oznaczmy ten kolor symbolem β_1. Wybieramy teraz dowolną liczbę $k_2 \in N_1$ i rozważamy nieskończony zbiór $\mathcal{X}_2 = \{\{k_2, n\} : n > k_2\}$. Rozbijamy go na dwa podzbiory:

$$\mathcal{X}_2 = (\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{A}) \sqcup (\mathcal{X}_2 \cap \mathcal{B}).$$

Znowu, jeden z tych podzbiorów jest nieskończony. Więc istnieje taki podzbiór $N_2 \subseteq N_1$, że wszystkie podzbiory $\{k_2, n\}$ dla $n \in N_2$, są jednego koloru, który oznaczamy przez β_2.
Postępując tak dalej, znajdziemy takie trzy ciągi nieskończone (k_j), (N_j) i (β_j), że:

(1) $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ jest ściśle rosnącym ciągiem,

(2) $\mathbb{N} =: N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$,

(3) $\beta_j \in \{a, b\}$, gdzie a oznacza *biały*, a b oznacza *czerwony*,

(4) $k_j \in N_{j-2}$ dla każdego $j = 1, 2, \dots,$

(5) dla danego j wszystkie podzbiory $\{k_j, n\}$ są koloru β_j dla każdego $n \in \mathbb{N}_\daleth$

Jeszcze ras stosując ZSD wybieramy taki nieskończony ciąg $(j_1, j_2, \dots,)$, że wszystkie kolory $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \beta_{j_3}$ itd. są takie same. Wystarczy sprawdzić, że zbiór $X = \{k_{j_1}, k_{j_2}, k_{j_3}, \dots\}$ jest dobry.