Zasada Szufladkowa Dirichleta

Łukasz Próchniak

2024

1 Zadania

1.1 ZSD w kombinatoryce

Zadanie 1. W pokoju jest n osób. Pokazać, że istnieją takie dwie, które mają tyle samo znajomych. Uwaga: Jeśli A jest znajomym B, to B jest znajomym A.

Zadanie 2. Udowodnij, że wśród dowolnych 6 osób pewne 3 się znają albo pewne 3 się nie znają.

Zadanie 3. W każde pole kwadratu 5×5 wpisana jest jakaś liczba ze zbioru $\{0, +1, -1\}$. Następnie sumujemy i zapisujemy na kartce liczby w każdym wierszu, kolumnie i dwóch najdłuższych przekątnych. Czy możliwe jest, że otrzymamy na kartce parami różne liczby?

Zadanie 4. W kwadrat 9×9 wpisano liczby od 1 do 81. Udowodnij, że istnieją pewne dwa sąsiadujące ze sobą pola, na których wpisane liczby różnią się o co najmniej 6.

Zadanie 5. Na szachownicy 8×8 stoją 33 wieże. Udowodnij, że istnieje wśród nich 5 takich wież, że żadne dwie się nie atakują.

Zadanie 6. Szachista Miłosz ma 77 dni na przygotowanie się do turnieju. Chce zagrać każdego dnia co najmniej jedną grę, ale łącznie nie więcej niż 132. Pokaż, że istnieje ciąg kolejnych dni, podczas których zagrał dokładnie 21 gry.

Zadanie 7. W każde pole kwadratu 8×8 wpisano liczbę całkowitą dodatnią. Można wybrać dowolny kwadrat 3×3 lub 4×4 wpisany w ten kwadrat i dodać do wszystkich liczb w nim zawartych 1. Czy dla każdej pozycji startowej po pewnej liczbie takich operacji można osiągnąć 64 wielokrotności 10?

Zadanie 8. Danych jest 100 liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 100, których suma wynosi 200. Udowodnij, że da się wybrać tak pewne spośród nich, że ich suma będzie równa 100.

Zadanie 9. Na międzynarodowym spotkaniu spotyka się 2024 posłów z 6 różnych partii. Każdemu przypisano pewien inny numer od 1 do 2024. Udowodnij, że istnieje taki poseł, którego numer jest sumą dwóch innych posłów(niekoniecznie różnych) z jego partii.

Zadanie 10 (Twierdzenie Erdősa-Szekeresa)**.** Dany jest ciąg $n^2 + 1$ liczb całkowitych. Udowodnij, że zawiera on niemalejący podciąg $n + 1$ liczb lub nierosnący podciąg $n + 1$ liczb.

1.2 ZSD w teorii liczb i algebrze

Zadanie 11. Danych jest 70 różnych dodatnich liczb całkowitych ≤ 200. Udowodnij, że istnieją takie dwie liczby z tego zbioru, których różnica wynosi $4, 5$ lub 9.

Zadanie 12. Dane są permutacje $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ liczb od 1 do 100. Udowodnij, że spośród iloczynów $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{100}b_{100}$ pewne dwa są sobie równe.

Zadanie 13. Podzbiór A zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ma $n + 1$ elementów. Udowodnij, że istnieją różne $a, b \in A$, takie że $a \mid b$.

Zadanie 14. Dane są liczby a i b, które nie mają wspólnych dzielników. Udowodnij, że istnieją x, y całkowite dodatnie, takie że $ax - by = 1$.

Zadanie 15. Dana jest liczba rzeczywista x i liczba całkowita dodatnia n. Udowodnij, że istnieją takie liczby całkowite p, q, że $1 \leq q \leq n$ oraz

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn}$$

Zadanie 16. Dany jest zbiór A, składający się z 2024 liczb dodatnich całkowitych, z których żadna nie ma dzielnika pierwszego większego niż 23. Udowodnij, że istnieją 4 różne elementy w A, takie że ich iloczyn jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

1.3 ZSD w planimetrii/stereometrii

Zadanie 17. Dany jest pięciokąt, którego wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Udowodnij, że środek pewnego boku lub przekątnej ma współrzędne całkowite

Zadanie 18. 51 uczestników Olimpiady Matematycznej zostało rozsadzonych na zawody w kwadracie o boku 7 metrów. Udowodnij, że istnieją 3 tacy uczestnicy, że znajdują się w kole o promieniu 1 metra.

Zadanie 19. Dane jest 6 punktów w prostokącie 3×4. Udowodnij, że istnieją dwa, których odległość jest nie większa niż $\sqrt{5}$.

Zadanie 20. Udowodnić, że jeżeli każdy punkt płaszczyzny jest pokolorowany na jeden z n kolorów, to w tej płaszczyźnie istnieje prostokąt, którego wszystkie cztery wierzchołki są jednokolorowe.

Zadanie 21. Każdy punkt okręgu pokolorowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje wpisany w ten okrąg trójkąt równoramienny, którego wszystkie trzy wierzchołki są tego samego koloru.

Zadanie 22. W kwadracie o boku 1 leży n okręgów o sumie obwodów 10. Udowodnij, że istnieje prosta przechodząca przed co najmniej 4 z nich.

Zadanie 23. Danych jest 25 punktów na płaszczyźnie, takich że w każdym 3-elementowym zbiorze są co najmniej dwa punkty, których odległość wynosi co najwyżej 1. Udowodnij, że wśród nich istnieje 13 punktów, takich że wszystkie leżą w pewnym kole o promieniu 1.

Zadanie 24. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego wszystkie boki są mniejsze od 24. Dany jest punkt P wewnątrz $ABCD$. Udowodnij, że istnieje wierzchołek, od którego odległość punktu P jest mniejsza od 17.

Zadanie 25. Na płaszczyźnie wybrano 2024 punkty w ten sposób, że dla dowolnych trzech punktów A, B, C spośród wybranych zachodzi nierówność $AB \neq AC$. Następnie połączono odcinkiem każdy punkt z punktem mu najbliższym. Jaka jest możliwie największa liczba odcinków wychodzących z jednego punktu?

1.4 ZSD i teoria miary

Zadanie 26. Udowodnić, że w dowolnej figurze o polu równym 6, zawartej w kole o promieniu 2, istnieją takie dwa punkty, których odległość wynosi dokładnie 1/3.

Zadanie 27 (Twierdzenie Birkhoffa)**.** Jeśli Z jest dowolnym ograniczonym podzbiorem płaszczyzny mającym pole $S(Z) > 1$, to istnieje taki wektor v, że w zbiorze przesuniętym o wektor v leżą(co najmniej) dwa punkty kratowe.

Zadanie 28. 12% sfery jest pokolorowane na czarno. Reszta na biało. Udowodnij, że istnieje prostopadłościan, którego wierzchołki należą do sfery i wszystkie są pokolorowane na biało.

1.5 Nieskończone ZSD

Zadanie 29. Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem rosnącym liczb całkowitych. Udowodnij, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu może być wyrażone jako:

$$a_n = xa_p + ya_q$$

gdzie x, y są liczbami całkowitymi dodatnimi, a $p \neq q$.

Zadanie 30. Niech k będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że istnieje liczba pierwsza p oraz rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots,$ że $p + a_1k, p + a_2k, \ldots$ są liczbami pierwszymi.

Zadanie 31. Zbiór $\mathcal{P}_2(\mathbb{N})$ wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru liczb naturalnych pomalowano dwoma kolorami: białym i czerwonym. Udowodnić, że istnieje taki nieskończony podzbiór $X \subset \mathbb{N}$, że wszystkie elementy $\mathcal{P}_2(X)$ są jednego koloru.