Zespo w kombi

Łukasz Próchniak

1 Teoria

Twierdzenie 1 (Wzór Eulera)**.** $e^{2\pi i} = 1$

Definicja 1 (ω)**.** Przez ω_n^k będziemy oznaczać k-ty pierwiastek z jedności równania $X^n = 1$.

Skrótowo będziemy zapisywać ω_n^k jako $\omega_n^k = e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k}$

Lemat 1.

$$1 + \omega_p + \omega_p^2 + \cdots + \omega_p^{p-1} = 0$$

Dowód. Wzory Vieta dla wielomianu $X^p = 1$. □

Lemat 2. Jeśli p jest liczbą pierwszą i $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Q}$ spełniają

$$a_0 + a_1\omega_p + a_2\omega_p^2 + \cdots + a_{p-1}\omega_p^{p-1} = 0$$

wtedy

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$$

Dowód. Wielomian $1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ ma wspólny pierwiastek z wielomianem $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{p-1}x^{p-1}$ oraz jest nieredukowalny nad $\mathbb{Q}$ z kryterium Eisenteina, więc skoro te wielomiany mają ten sam stopień, to są to musi zachodzić $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$. □

1.0.1 Zadania

Zadanie 1. Ile liczb n cyfrowych może być utworzonych przez użycie jedynie cyfr $1, 3, 4, 6, 7, 9$, których suma cyfr jest podzielna przez 7?

Zadanie 2. Na ścianach kostki do gry w chińczyka są liczby $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Rzucamy kostką n razy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest podzielna przez 5?

Zadanie 3. Dany jest prostokąt $a \times b$, który można wypełnić prostokątami $1 \times m$ oraz $n \times 1$(nie można obracać). Czy możliwe jest, aby wypełnić ten prostokąt używając jedynie jednego rodzaju prostokątów?

Zadanie 4. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ będą liczbami naturalnymi i $f(k)$ oznacza liczbę m-ciągów $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ takich, że $1 \leqslant c_i \leqslant a_i$, oraz $c_1 + c_2 + \cdots + c_m \equiv k \pmod{n}$, gdzie $n > 1$ jest liczbą naturalną. Udowodnić, że $f(0) = f(1) = \cdots = f(n-1)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla jakiegoś i zachodzi $n \mid a_i$.

Zadanie 5. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ ma sumę elementów podzielną przez p?

Zadanie 6. Niech $n \geqslant 2$. W punkcie (i, j) wpisujemy liczbę $i + j \pmod{n}$. Znaleźć wszystkie takie pary (a, b), że wszystkie reszty $\pmod{n}$ wystepują tyle samo razy w środku prostokąta o współrzędnych $(0,0)$ $(0,b)$ (a,b) $(a,0)$, oraz tyle samo razy na jego bokach(bez wierzchołków tego prostokąta).

Zadanie 7. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą i $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Ile jest podzbiorów A takich, że każdy zawiera p elementów i suma jego elementów jest podzielna przez p?

Zadanie 8. Adam, Belzebub i Czarek grają w nastepującą grę. Wybierany jest losowo podzbiór k-elementowy zbioru $\{1, 2, ..., 2022\}$ z takim samym prawdopodobieństwem. Zwycięzcą jest odpowiednio Adam, Belzebub lub Czarek, gdy suma liczb z wybranego podzbioru daje resztę $0, 1$ lub $2 \pmod{3}$. Znaleźć takie k, dla którego, każdy ma jednakowe szanse wygrania.

Zadanie 9. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Znaleźć liczbę rozwiązań

$$\pm 1 \pm 2 \cdots \pm \frac{p-1}{2} = 0$$

Zadanie 10. Udowodnić, że liczba podzbiorów n-elementowych zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, których suma jest podzielna przez n wynosi

$$\frac{(-1)^n}{n} \sum_{d \mid n} (-1)^d \phi\left(\frac{n}{d}\right) \binom{2d}{d}$$

Zadanie 11. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech a, b, c, d będą liczbami całkowitymi, niepodzielnymi przez p oraz spełniającymi:

$$\left\{\frac{ra}{p}\right\} + \left\{\frac{rb}{p}\right\} + \left\{\frac{rc}{p}\right\} + \left\{\frac{rd}{p}\right\} = 2$$

dla każdej liczby r względnie pierwszej z p. Udowodnij, że co najmniej dwie z sum $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$ są podzielne przez p.

2 Rozwiązania

Czytelnika Dociekliwego zachęcam do zapoznania się z funkcjami tworzącymi. Ułatwiają one myślenie o takich zadaniach.

Rozwiązanie 1. Rozpatrzmy wielomian

$$\left(\omega_7^1 + \omega_7^3 + \omega_7^4 + \omega_7^6 + \omega_7^7 + \omega_7^9\right)^n$$

W ten sposób wygenerujemy wszystkie liczby n-cyfrowe $(c_1, \ldots, c_n)$ złożone wyłącznie z cyfr $1, 3, 4, 6, 7, 9$. Ten wielomian można także wyrazić także jako

$$\sum_{c_1,\ldots,c_n \in \{1,3,4,6,7,9\}} \omega_7^{c_1+\cdots+c_n} = \sum_{i=1}^{7} a_i \omega_7^i$$

gdzie współczynnik a_i oznacza ile powstało liczb o sumie cyfr dających resztę $i \pmod 7$. Z lematu 1. wiadomo, że

$$\omega_7^1 + \omega_7^3 + \omega_7^4 + \omega_7^6 + \omega_7^7 + \omega_7^9 = \omega_7^1 + \omega_7^3 + \omega_7^4 + \omega_7^6 + 1 + \omega_7^2 = -\omega_7^5$$

Zatem nasza funkcja tworząca wszystkie takie liczby wygląda następująco

$$\sum_{i=1}^{7} a_i \omega_7^i = (-\omega_7^5)^n = (-1)^n \cdot (w_7)^{5n}$$

Załóżmy, że n jest podzielne przez 7, pozostałe przypadki rozwiązuje się analogicznie. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{7} a_i \omega_7^i = (-\omega_7^5)^n = (-1)^n \cdot (w_7)^{5n} = (-1)^n \cdot \left(\omega_7^{7k}\right)^5 = (-1)^n$$

Korzystając z lematu 2. oraz faktu, że $a_1 + \cdots + a_7 = 6^n$, wiemy że $a_1 = \cdots = a_6 = a_7 - (-1)^n$. Zatem, po przeliczeniu

$$a_7 = \frac{6^n + 6(-1)^n}{7}$$

Rozwiązanie 2. Analogicznie jak w 1. rozpatrzmy funkcję tworzącą wszystkie możliwości oczek na kostkach, czyli krotki $(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{1,2,3,4,5,6\}} \omega_5^{x_1+\cdots+x_n} = \sum_{i=1}^{5} a_i \omega_5^i = \left(\omega_5^1 + \omega_5^2 + \omega_5^3 + \omega_5^4 + \omega_5^5 + \omega_5^6\right)^n = \omega_5^n$$

Wiadomo także, że $a_1 + \cdots + a_n = 6^n$. Pozostaje rozpatrzyć dwa przypadki, pierwszy kiedy $5 \mid n$. Wtedy zachodzi $a_1 = \cdots = a_4 = a_5 - 1$ z lematu 1. Czyli $a_5 = \frac{6^n+4}{5}$. W drugim przypadku, gdy $5 \nmid n$ dla któregoś $a_i \neq a_5$ zachodzi $a_i - 1 = a_1 = \cdots = a_5$, więc $a_5 = \frac{6^n-1}{5}$. Jednak skoro wszystkie rzuty są tak samo prawdopodobne, to wynikiem jest $\begin{cases} \frac{6^n+4}{5\cdot 6^n} & \text{gdy } 5 \mid n \\ \frac{6^n-1}{5\cdot 6^n} & \text{gdy } 5 \nmid n \end{cases}$

Rozwiązanie 3. Polu (i, j) przypiszę wartość $\omega_n^i \cdot \omega_m^j$. Można zauważyć, że suma dowolnych n wartości w polach $(i, j), \ldots, (i+n-1, j)$ wynosi (korzystamy z lematu 1.)

$$\sum \omega_n^i \cdot \omega_m^j = \omega_n^i \cdot \omega_m^j (1 + \cdots + \omega_n^{n-1}) = 0$$

Analogicznie suma dowolonych m wartości w polach $(i, j), \ldots, (i, j + m - 1)$ wynosi

$$\sum \omega_n^i \cdot \omega_m^j = \omega_n^i \cdot \omega_m^j (1 + \cdots + \omega_m^{m-1}) = 0$$

Czyli każdy prostokąt $1 \times m$ oraz $n \times 1$, którym uzupełniamy prostokąt dodaje 0 do sumy wszystkich pól, jednak skoro da się uzupełnić nasz prosotkąt, to suma wartości wynosi 0. Licząc sumę pol w prosotkącie na drugi sposób otrzymujemy

$$0 = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant a \\ 1 \leqslant j \leqslant b}} \omega_n^i \cdot \omega_m^j = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant a} \omega_n^i \right) \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant b} \omega_m^j \right)$$

Zatem któryś z wyrazów po prawej stronie równości musi wynosić 0. Bez straty ogólności załózmy, że $\sum_{i=1}^{a} \omega_n^i = 0$. Jednak z lematu 1. łatwo zauważyć, że $n \mid a$. Oczywiście prostokąt, którego szerokość jest wielokrotnością n da się wypełnić prostokątami $n \times 1$.

Rozwiązanie 4. Wystarczy rozpatrzeć wielomian tworzący wszystkie m-ciągi $(c_1, \ldots, c_m)$.

$$\prod_{i=1}^{n} (\omega_n^1 + \cdots + \omega_n^{a_i})$$

Jednocześnie z treści zadania wiadomo, że

$$\sum_{1 \leqslant c_i \leqslant a_i} \omega_n^{c_1 + \cdots + c_m} = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \omega_n^i = \prod_{i=1}^{n} (\omega_n^1 + \cdots + \omega_n^{a_i})$$

1. $f(0) = \cdots = f(n-1) \Rightarrow n \mid a_i$ dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$.
   Z lematu 1. po podzieleniu przez $f(0)$ otrzymujemy, że iloczyn wyrazów $\omega_n^1 + \cdots + \omega_n^{a_i}$ jest równy 0, więc któryś z wyrazów jest równy 0, czyli tak jak w poprzednim zadaniu dochodzimy do podzielności $n \mid a_i$ dla pewnego i.

2. $f(0) = \cdots = f(n-1) \Leftarrow n \mid a_i$ dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$.
   Zauważmy, że kiedy a_i jest podzielne przez n, wtedy dla każdej reszty $\pmod{n}$ dodajemy taką samą ilość ciągów.

Rozwiązanie 5. Rozpatrzmy wielomian

$$(1 + \omega_p^1)(1 + \omega_p^2) \ldots (1 + \omega_p^{p-1})$$

Wymnożenie takiego wyrażenia odpowiada wybranie elementu z każdego nawiasu; wybór elementu ω_p^i z nawiasu $(1+\omega_p^i)$ oznacza, że i znajdzie się w wybranym zbiorze, natomiast 1 będzie oznaczało, że nie wybraliśmy tego elementu. Jednakże łatwo zauważyć, że $-\omega_p^1, \ldots, -\omega_p^p$ będą pierwiastkami wielomianu X^p+1, czyli

$$(X+\omega_p^1)(X+\omega_p^2)\ldots(X+\omega_p^{p-1}) = \frac{X^p+1}{X+1}$$
$$(1+\omega_p^1)(1+\omega_p^2)\ldots(1+\omega_p^{p-1}) = \frac{1^p+1}{1+1} = 1$$

Niech $sum(S)$ oznacza sumę elementów zbioru S, wtedy

$$\sum_{S\subset\{1,\ldots,p-1\}} \omega_p^{sum(S)} = \sum_{i=1}^{p} a_i\omega_p^i = 1$$

Wiadomo, że $a_1+\cdots+a_p = 2^{p-1}$ oraz $a_1 = \cdots = a_{p-1} = a_p - 1$, z czego otrzymuję

$$a_p = \frac{2^{p-1}-(p-1)}{p}$$

Rozwiązanie 6. Przypadek $n = 2$ pozostawiam dla czytelnika. Od teraz załóżmy, że $n > 2$. Przypiszmy polu (i, j) wartość ω_n^{i+j}. Popatrzmy na sumę wszystkich pól w środku prostokąta.

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_n^i = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant a-1\\1\leqslant j\leqslant b-1}} \omega_n^{i+j} = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant a-1}\omega_n^i\right)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant b-1}\omega_m^j\right)$$

Z lematu 1. otrzymujemy pierwszą równość. Bez straty ogólności, załóżmy że $\sum_{1\leqslant i\leqslant a-1}\omega_n^i = 0$. Wtedy $n \mid a-1 \Rightarrow \omega_n^a = \omega_n$. Z drugiego warunku otrzymuję

$$0 = \sum_{1\leqslant i\leqslant a-1}\omega_n^i + \sum_{1\leqslant i\leqslant a-1}\omega_n^{i+b} + \sum_{1\leqslant j\leqslant b-1}\omega_n^j + \sum_{1\leqslant j\leqslant b-1}\omega_n^{a+j} =$$
$$(\omega_n^b+1)\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant a-1}\omega_n^i\right) + (\omega_n^a+1)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant b-1}\omega_n^j\right) = (\omega_n+1)\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant b-1}\omega_n^j\right)$$

Skoro $n > 2$, to $\omega_n + 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{1\leqslant j\leqslant b-1}\omega_n^j = 0$, czyli $n \mid b-1$. Zatem jedyne (a, b), które spełniają warunki zadania to $a \equiv b \equiv 1 \pmod{n}$.

Rozwiązanie 7. Zadanie jest podobne do zadania 5., z dodanym założeniem o liczbie wybranych elementów. Rozpatrzmy wielomian dwóch zmiennych, gdzie współczynnik a_i^k oznacza liczbę zbiorów i elementowych, których suma daje resztę $k \pmod{p}$.

$$(1+\omega_pX)\cdot(1+\omega_p^2X)\ldots(1+\omega_p^{2p}X) = \sum_{k=0}^{2p}\left(\sum_{i=1}^{p}a_i^k\omega_p^i\right)X^k$$

Wyrażenie po lewej można przekształcić następująco

$$(1+\omega_p X)(1+\omega_p^2 X)\dots(1+\omega_p^{2p}X) = \big((1+\omega_p X)(1+\omega_p^2 X)\dots(1+\omega_p^p X)\big)^2$$
$$= \big(\omega_p^{1+\dots+p}(\omega_p+X)(\omega_p^2+X)\dots(1+X)\big)^2 = (X^p+1)^2 = X^{2p}+2X^p+1$$

Zatem $a_1^p = \dots = a_{p-2}^p = a_{p-1}^p = a_p^p - 2$. Wiadomo także, że $a_1^p + \dots + a_p^p = \binom{2p}{p}$, z czego otrzymujemy

$$a_p^p = \frac{\binom{2p}{p} + 2(p-1)}{p}$$

Rozwiązanie 8. Tak jak w poprzednim zadaniu rozpatrzymy wielomian dwóch zmiennych

$$(1+\omega_3^1 X)(1+\omega_3^2 X)\dots(1+\omega_3^{2022}X) = \big((\omega_3+X)(\omega_3^2+X)(1+X)\big)^{674} = \big(X^3+1\big)^{674}$$

Chcielibyśmy, aby współczynnik przy X^k był równy 0, ponieważ wtedy z lematu 1. każdy ma takie same szanse na uzyskanie swojej reszty (mod 3). Przez a_i^k oznaczam liczbę takich zbiorów o mocy k, że suma elementów tego zbioru daje resztę i (mod 3).

$$\sum_{k=1}^{2022}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^k \omega_3^i\right) X^k = \big(X^3+1\big)^{674}$$

Jednak dla żadnego $3 \mid k$ współczynnik przy X^k nie wynosi 0, a dla $3 \nmid k$ jest równy 0, więc jedyne k dla których każdy ma jednakowe szanse, to $k \equiv 1, 2 \pmod 3$.

Rozwiązanie 9. Rozpatrzmy wielomian

$$\sum_{b_i \in \{1,-1\}} \omega^{b_1+2b_2+\dots+\frac{p-1}{2}b_{\frac{p-1}{2}}} = \sum_{i=1}^{p} a_i\omega_p^i = (\omega_p^1+\omega_p^{-1})(\omega_p^2+\omega_p^{-2})\dots(\omega_p^{\frac{p-1}{2}}+\omega_p^{-\frac{p-1}{2}})$$

$$S = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega_p^i+\omega_p^{-i}) = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega_p^{i-p}+\omega_p^{p-i})$$

Po przeliczeniach

$$\prod_{i=1}^{p-1}(\omega_p^i+\omega_p^{-i}) = S\cdot\prod_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(\omega_p^i+\omega_p^{-i}) = S\cdot\prod_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(\omega_p^{i-p}+\omega_p^{p-i}) = S\cdot\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(\omega_p^{i-p}+\omega_p^{p-i}) = S^2$$

Z drugiej strony jednak

$$\prod_{i=1}^{p-1}(\omega_p^i+\omega_p^{-i}) = \left(\prod_{i=1}^{p-1}\omega_p^i\right)^{-1}\left(\prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega_p^{2i})\right) = \prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega_p^{2i})$$

Jednakże, skoro p jest liczbą pierwszą większą od 2, to istnieje bijekcja $\omega_p^{2i} \longleftrightarrow \omega_p^i$, czyli $\prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega_p^{2i}) = \prod_{i=1}^{p-1}(1+\omega_p^i) = \frac{1^p+1}{1+1} = 1$. Zatem $S^2 = 1 \Rightarrow S = \pm 1$. Analogicznie jak w poprzednich zadaniach $a_1 = \dots = a_{p-2} = a_{p-1} = a_p - S$. Wiadomo także, że $a_1 + \dots + a_p = 2^{\frac{p-1}{2}}$. Zatem otrzymujemy

$$(p-1)(a_p - S) + a_p = 2^{\frac{p-1}{2}}$$
$$S \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

Korzystając z symbolu Legendre'a $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, wartość której szukamy ma postać

$$a_p = \frac{2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}}{p}$$

Rozwiązanie 10. Rozpatrzmy jak poprzednio wielomian

$$f(X,Y) = (1+XY)(1+X^2Y)\dots(1+X^{2n}Y)$$

Niech $sum(S)$ będzie sumą elementów podzbioru S zbioru $\{1,2,\dots,2n\}$.

$$f(X,Y) = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{|S|=k} X^{sum(S)}\right)Y^k$$

Przez a_k oznaczmy liczbę takich podzbiorów S, że suma ich elementów jest podzielna przez n oraz $|S| = k$. Można zauważyć, że zachodzi

$$\frac{1}{n}(f(\omega_n^1, Y) + f(\omega_n^2, Y) + \dots + f(\omega_n^n, Y)) = \sum_{k=0}^{2n} a_k Y^k$$

Dowód tego przekształcenia pozostawiam czytelnikowi, jest on podobny do przedstawianego niżej rozumowania. Przyjrzyjmy się współczynnikowi przy Y^n w wielomianie $\frac{1}{n}(f(\omega_n^1, Y)+f(\omega_n^2, Y)+\dots+f(\omega_n^n, Y))$. Ustalmy pewne j i przyjrzyjmy się $f(\omega_n^j, Y)$.

$$f(\omega_n^j, Y) = (1+\omega_n^j Y)(1+(\omega_n^j)^2 Y)\dots(1+(\omega_n^j)^{2n}Y)$$

Niech $d = nwd(j,n)$. Oznaczmy $j = du, n = dv$. Mamy wtedy

$$f(\omega_n^j, Y) = \left((1+Y)(1+e^{\frac{2\pi iu}{v}}Y)(1+e^{2\frac{2\pi iu}{v}}Y)\dots(1+e^{\frac{2\pi iu(n-1)}{v}}Y)\right)^2 =$$
$$\left((1+Y)(1+e^{\frac{2\pi iu}{v}}Y)(1+e^{2\frac{2\pi iu}{v}}Y)\dots(1+e^{\frac{2\pi iu(v-1)}{v}}Y)\right)^{2d}$$
$$= \left((1+Y)(1+\omega_v^u Y)(1+\omega_v^{2u}Y)\dots(1+\omega_v^{u(v-1)}Y)\right)^{2d} =$$
$$= \left((1+Y)(1+\omega_v^1 Y)(1+\omega_v^2 Y)\dots(1+\omega_v^{(v-1)}Y)\right)^{2d} = (1-(-Y^v))^{2d}$$

Zatem współczynnik przy Y^n wynosi $(-1)^{n+d}\binom{2d}{d}$. Jednak można zauważyć, że ten współczynnik nie zależy od j, ale od $nwd(j,n)$. Zatem do współczynnika przy Y^n dodamy dla $d \mid n$ dokładnie $\phi\left(\frac{n}{d}\right)(-1)^{n+d}\binom{2d}{d}$. Czyli łącznie szukany wynik to

$$\frac{(-1)^n}{n} \cdot \sum_{d|n} (-1)^d \phi\left(\frac{n}{d}\right)\binom{2d}{d}$$