

Wykładniki P-adyczne

Filip Maniak

Poręba Wielka, Wrzesień 2023

1 Czym jest V_p

Zauważmy że każdą liczbę n możemy przedstawić jako:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

Wykładnik p-adyczny liczymy z liczby n dla danej liczby p . Na przykładach:

$$V_3(9) = 2, V_5(15) = 1, V_7(24) = 0, V_{p_1}(n) = a_1$$

2 Własności V_p

1. jeśli $V_p(a) \neq V_p(b)$ to $V_p(a+b) = \min(V_p(a), V_p(b))$
2. jeśli istnieje jeden wyraz minimalny w ciągu $a_1 \dots a_k$ to $V_p(a_1 + \dots + a_k) = \min(V_p(a_1) \dots V_p(a_k))$
3. jeśli $V_p(a) = V_p(b)$ to $V_p(a+b) \geq V_p(a)$
4. $V_p(ab) = V_p(a) + V_p(b)$
5. $V_p(\frac{a}{b}) = V_p(a) - V_p(b)$ jeśli $b \mid a$
6. $V_p(a^n) = nV_p(a)$
7. $V_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$

3 Ćwiczenia

1. znajdź wszystkie rozwiązania poniższego równania, jeśli p i q to liczby pierwsze:

$$3^p p q^2 = 3^{2p}$$

2. udowodnij że $V_p(NWD(a, b)) = \min(V_p(a), V_p(b))$

4 Zadania

1. Ile jest par liczb całkowitych dodatnich (a, b) spełniających równanie:

$$a^2 + b^2 = ab(a + b)$$

2. liczby $a, b \neq 0$ oraz $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ są całkowite. Wykazać że liczba $\frac{a^2}{b}$ też jest całkowita
3. liczby $a, b, c \neq 0$ oraz $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ są całkowite. udowodnić że abc to sześcian liczby całkowitej.
4. (74 OM-II-1) Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite b o następującej własności: istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, k, l , że liczby $a^k + b^l$ i $a^l + b^k$ są podzielne przez b^{k+l} , oraz $k \neq l$
5. Pokazać, że dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n liczba 2^n nie jest dzielnikiem liczby $n!$.
6. $ab|a^2 + b^2 + a$. Udowodnij że a jest kwadratem liczby całkowitej.
7. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Dla l (dodatniego całkowitego) oznaczamy:

$$f(l) = (4l + 1)(4l + 2) \dots (4l + 4 * 5^n)$$

Znajdź najmniejszą liczbę l taką że $f(l)$ ma w rozkładzie na czynniki pierwsze 5^n piątek.

8. Liczby naturalne a i b są dzielnikami n . Wykazać, że jeśli liczba $\frac{n}{a} + \frac{n}{b}$ jest podzielna przez a i b , to liczba n jest podzielna przez liczbę $NWW(a, b)^2$
9. Udowodnij że dla $p > 2$ i liczby x, y nie podzielne przez p takich że $p|x - y$:

$$V_p(x^p - y^p) = V_p(x - y) + 1$$

10. (LTE) Udowodnij że dla $p > 2$ i liczby x, y nie podzielne przez p takich że $p|x - y$:

$$V_p(x^n - y^n) = V_p(x - y) + V_p(n)$$

11. Liczba nieparzystą n jest liczbą bezkwadratową. Rozstrzygnij czy istnieje para względnie pierwszych liczb $x, y > 2$ takich że:

$$(x + y)^3 | (x^n + y^n)$$

5 solvy

1. Zauważmy że $V_3(3^p * pq^2) = p + V_3(pq^2)$ i $V_3(3^{2p}) = 2p$ ponieważ wykładniki obu stron równania są równe, to $V_3(pq^2) = p$. Ponieważ p i q to liczby pierwsze, to $V_3(p) \leq 1$ i $V_3(q) \leq 1$, czyli $V_3(pq^2) \leq 3$. Czyli $p \leq 3$. Sprawdzamy oba przypadki: $V_3(2q^2) = 2 * V_3(q) = 2$, jednak $p=2$ nie spełnia równania. analogicznie postępujemy dla $p=3$ i otrzymujemy $q=3$.
2. Załóżmy że $V_p(NWD(a, b)) < MIN(V_p(a), V_p(b))$. Wtedy $NWD(a, b) \cdot p|a$ i $NWD(a, b) \cdot p|b$, czyli $NWD(a, b)$ nie jest największym wspólnym dzielnikiem, co wywołuje sprzeczność.
3. Załóżmy BSO $V_p(a) \neq V_p(b)$ założmy BSO że $V_p(a) > V_p(b)$ wtedy: $V_p(a^2 + b^2) = 2 \cdot V_p(b)$ i $V_p(ab(a + b)) = V_p(a) + V_p(b) + V_p(b)$ czyli $V_p(a) = 0$, ale $V_p(a) > V_p(b)$ co znaczy że $V_p(b) < 0$ co jest sprzeczne.
4. Zauważmy że po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy $\frac{a^3+b^3}{ab}$ czyli $V_p(a^3 + b^3) \geq V_p(ab)$. Czyli jeśli $V_p(a) < V_p(b)$ to otrzymujemy $3V_p(a) \geq V_p(a) + V_p(b)$ co jest równoważne $2V_p(a) \geq V_p(b)$. Zauważmy że dla p takich że $V_p(a) \geq V_p(b)$ ta nierówność też zachodzi. Skoro ta nierówność zachodzi dla każdego p to wyrażenie $\frac{a^2}{b}$ jest całkowite c.k.d.
5. Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy $\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{abc}$. Jeśli żaden z składników sumy licznika nie ma mniejszego od innych wykładnika to otrzymujemy: czyli $V_p(abc)$ jest podzielny przez 3. Jeśli istnieje wyraz minimalny (załóżmy BSO że a^2b) to wiemy że $V_p(a^2b) = 2V_p(a) + V_p(b) \geq V_p(a) + V_p(b) + V_p(c)$ czyli $V_p(a) \geq V_p(c)$, co jest sprzeczne bo wtedy $V_p(c^2a) \leq V_p(a^2b)$ co przeczy założeniu. czyli $V_p(abc)$ jest zawsze podzielne przez 3, czyli abc jest kwadratem, co należało wykazać.
6. Zadanie z 74 OM-II-1
7. Zauważmy że $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots < 1$. Czyli $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + \dots < \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \dots < n \cdot 1$
8. Zauważmy że mamy w zadaniu dane że $V_p(ab) \leq V_p(a^2 + b^2 + a)$. Rozważmy p takie że $V_p(a) > 0$ Czyli jeśli $V_p(b^2) > V_p(a)$ to $V_p(a) + V_p(b) \leq V_p(a)$ co jest sprzeczne. Jeśli $V_p(a) > V_p(b^2)$ to otrzymujemy $V_p(a) < V_p(b)$ co jest sprzeczne z założeniem. Czyli $V_p(a) = 2V_p(b)$, czyli dla każdego p $V_p(a)$ jest zerem, lub wielokrotnością 2, czyli a jest kwadratem.
9. Zauważamy że iloczyn w zadaniu to iloraz 2 silni. Korzystamy z wzoru na V_p silni i otrzymujemy że $V_p(f(l)) = 5^n - 1 + \lfloor \frac{4 \cdot 5^n + 4l}{5^{n+1}} \rfloor - \lfloor \frac{4l}{5^{n+1}} \rfloor + \dots$. Czyli $5^{n+1} \geq 4l \geq 5^n$. Czyli $l = \frac{5^n + 3}{4}$
10. Załóżmy że $V_p(a) \leq V_p(b)$. Wtedy: $V_p(\frac{n}{a} + \frac{n}{b}) \geq V_p(b)$ oraz $V_p(NWW(a, b)^2) = 2 \cdot V_p(b)$. Zauważmy że $V_p(\frac{n}{a} + \frac{n}{b}) = V_p(\frac{n(a+b)}{ab}) \leq V_p(n) + V_p(a) - V_p(a) - V_p(b) = V_p(n) - V_p(b) \geq V_p(b)$ czyli $V_p(n) \geq 2 \cdot V_p(b)$, co należało wykazać.

11. Zauważmy że $x^p - y^p = (x - y)(x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1})$ więc $V_p(x^p - y^p) = V_p(x - y) + V_p(x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1})$. Musimy więc udowodnić że $x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1}$ dzieli się przez p ale nie dzieli przez p^2 .
 $x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1} \equiv px^{p-1} \pmod{p}$, ponieważ $x \equiv y \pmod{p}$.
Czyli zostało nam udowodnić że p^2 nie dzieli $x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1}$.
Zapiszmy $y = x + kp$, wtedy $y^i x^{p-i-1} \equiv x^{p-1} + ikpx^{p-2} \pmod{p}$ czyli
 $x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1} \equiv px^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}kpx^{p-2} \equiv px^{p-1} \pmod{p}$. Czyli
 $x^{p-1} + yx^{p-2} + \dots + y^{p-1}$ nie dzieli się przez p^2 .
12. Korzystamy z zad. 9 i indukcji.
13. Zauważmy że $V_p((x+y)^3) = 3V_p(x+y)$ oraz z LTE $V_p(x^n + y^n) = V_p(x+y) + V_p(n)$ ponieważ n jest bezkwadratowe to $V_p(n) \leq 1$. Jednak $V_p(x+y) \geq 1$ więc: $V(n) < 2V_p(x+y) \iff V_p(x+y) + V_p(n) \geq 3V_p(x+y)$, co prowadzi do sprzeczność, czyli nie istnieje taka para.