

Równania Pella

Filip Maniak

January 2024

1 Tożsamość Brahmagputy

Zauważmy, że zachodzi równość:

$$(x^2 - ny^2)(a^2 - nb^2) = (xa + nyb)^2 - n(xb + ya)^2.$$

2 Pierścień $x + y\sqrt{n}$ ($n \neq k^2$)

Pierścień to w uproszczeniu taki zbiór że jeśli a i b są w zbiorze, to $a \cdot b$, $a - b$ i $a + b$ też są w tym zbiorze. Pierścieniem jest np. zbiór liczb całkowitych, czy zbiór liczb parzystych. Możemy zauważyć że zarówno suma, jak i iloczyn liczb postaci $a + b\sqrt{n}$, również jest postaci $a + b\sqrt{n}$, czyli liczby postaci $a + b\sqrt{n}$ tworzą pierścień. Oznacza to że liczby tej postaci tworzą pierścień. Zdefiniujmy funkcję ($N(a + b\sqrt{n})$) która każdej liczbie postaci $a + b\sqrt{n}$ przypisuje:

$$N(a + b\sqrt{n}) = a^2 - nb^2$$

i nazwijmy ją *normą* liczby tego typu. Używając tożsamości Brahmagputy otrzymujemy że norma jest multiplikatywna.

3 Równania Pella

Równaniem Pella nazywamy równanie o strukturze jak poniżej, gdzie n nie jest kwadratem liczby całkowitej:

$$x^2 - ny^2 = 1$$

Zauważmy że jest jeśli para (x, y) spełnia równanie Pella, to $N(x + \sqrt{n}y) = 1$. Ponieważ norma jest multiplikatywna, to możemy zauważyć że jeśli istnieje jedno rozwiązanie (x_0, y_0) , to istnieje ich nieskończenie wiele, ponieważ $N(x_0 + y_0\sqrt{n})^k = 1$.

Twierdzenie 1 Równanie $x^2 - ny^2 = 1$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych, inne niż $(0, 1)$.

Twierdzenie 2 Jeśli (x_0, y_0) jest najmniejszym rozwiązaniem równania $x^2 - ny^2 = 1$, takim że $x + \sqrt{n}y > 1$, to wszystkie rozwiązania są postaci $a + \sqrt{n}b = (x_0 + \sqrt{n}y_0)^k$.

Twierdzenie 3 Najmniejszym rozwiązaniem równania $x^2 - ny^2 = 1$ jest para liczb postaci x_0, y_0 taka że $\frac{x_0}{y_0}$ jest ułamkiem łańcuchowym przybliżającym $\sqrt{n}$. Dla $n = 3$ ułamek ten wygląda np. tak:

$$1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \approx 1 + \frac{2}{1}$$

Twierdzenie 4 Rozwiązania równania $x^2 - ny^2 = 1$ oznaczmy jako (x_i, y_i) . Wtedy:

$$x_i = \frac{(x_0 + \sqrt{n}y_0)^i + (x_0 - \sqrt{n}y_0)^i}{2} \quad i \quad y_i = \frac{(x_0 + \sqrt{n}y_0)^i - (x_0 - \sqrt{n}y_0)^i}{2\sqrt{n}}.$$

Twierdzenie 5 Rozwiązania równania $x^2 - ny^2 = 1$ oznaczmy jako (x_i, y_i) . Wtedy:

$$x_{i+1} = x_1x_i + ny_1y_i$$

$$y_{i+1} = x_1y_i + y_1x_i$$

oraz:

$$x_{n+2} = 2x_1x_{n+1} - x_n$$

$$y_{n+2} = 2x_1y_{n+1} - y_n$$

Twierdzenie 6 Jeśli równanie $x^2 - ny^2 = k$ ma rozwiązanie dla danego k , to ma ich nieskończenie wiele.

4 Zadania

Zadanie 1 Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p, q , takie że $p^2 - 2q^2 = 1$. Użyj własności równania Pella.

Zadanie 2 Znajdź 3 najmniejsze liczby trójkątne (postaci $\frac{n(n-1)}{2}$) które są kwadratami liczb całkowitych zbiorów

Zadanie 3 Udowodnij, że nie istnieją liczby całkowite m i n takie że:

$$\frac{m}{n} + \frac{n+1}{m} = 4$$

zbiorów.

Zadanie 4 Udowodnij że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych, takich że $n^2 + 1 \mid n!$.

Zadanie 5 Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, p) , gdzie $p \equiv 3 \pmod{4}$ jest liczbą pierwszą, spełniające równanie $3a^2 + 1 = p^2$.

Zadanie 6 Znajdź wszystkie n takie że istnieje $k < n$ takie że:

$$\binom{n}{k-1} = 2 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

wymnożyć

Zadanie 7 Udowodnij, że jeśli liczba $5x^2 + 4$ $x \in \mathbb{Z}$ jest kwadratem liczby całkowitej, to x jest wyrazem ciągu fibbonaciego.

Zadanie 8 Znajdź nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych (a, b, c) , takie że a, b, c to wyrazy ciągu arytmetycznego i $ab+1$, $cb+1$ i $ca+1$ są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 9 Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2abc.$$

Udowodnić, że przynajmniej jedna z liczb $\frac{a+1}{2}$, $\frac{b+1}{2}$, $\frac{c+1}{2}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 10 Udowodnij, że jeśli różnica między dwoma kolejnymi sześciangami liczb całkowitych jest kwadratem, to jest to kwadrat sumy dwóch kolejnych kwadratów.

5 Rozwiązania

Rozwiązanie 1 Zauważmy że równanie Pella $a^2 - 2b^2 = 1$ ma najmniejsze rozwiązanie $(3, 2)$, oraz $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (3a_n + 4b_n, 2a_n + 3b_n)$, czyli b_n jest zawsze parzyste, oraz ciąg ten jest rosnący. Czyli b_n dla $n > 1$ jest parzyste i większe niż 2, czyli nie jest pierwsze. Oznacza to że jedyną taką parą jest $(3, 2)$ co należało znaleźć.

Rozwiązanie 2 $\frac{n(n-1)}{2} = k^2 \iff n^2 - n = 2k^2 \iff (4n^2 - 4n + 1) = 8k^2 + 1 \iff (2n+1)^2 - 8k^2 = 1$. Wystarczy teraz znaleźć 3 najmniejsze rozwiązania równania $x^2 - 8y^2 = 1$ takie że x jest nieparzysty. Najmniejszym rozwiązaniem tego równania jest $(3, 1)$, używając wzorów z twierdzenia 5, wiemy że kolejne rozwiązanie to $(17, 6)$ oraz następujące po nim to $(99, 35)$. W każdym z tych rozwiązań x jest nieparzysty, więc podstawiając do wzoru $2n+1 = x$ wyliczamy 3 najmniejsze n .

Rozwiązanie 3 $m^2 + n^2 + n = 4mn \implies 1 = 1 + 48mn - 12m^2 - 12n^2 - 12n \implies 1 = (6n-1)^2 - 3(2m-4n)^2$ teraz trzeba udowodnić że nie istnieje taki $x \equiv -1 \pmod{6}$ że $x^2 - 3y^2 = 1$.

Rozwiązanie 4 Jeśli $n^2 + 1 = 5m^2$, to $5 \mid n!, m \mid n!$ i $2m \mid n!$, czyli $5m^2 \mid n!$. Wiem jednak że równanie $n^2 - 5m^2 = -1$ ma rozwiązanie $(2, 1)$, to z twierdzenia 6 ma ich nieskończenie wiele, czyli istnieje nieskończenie wiele takich n że $n^2 + 1 = 5m^2$, czyli istnieje nieskończenie wiele takich n że $n^2 + 1 \mid n!$, co należało wykazać.

Rozwiązanie 5

Rozwiązanie 6

Rozwiązanie 7 Zapiszmy równanie $5x^2 + 4 = y^2 \iff 4 = y^2 - 5x^2$. Zauważmy że dla $y = 3$ i $x = 1$ zachodzi równość. Z twierdzenia 6, oznacza to że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań danych wzorami (twierdzenie 5):

$$y_{i+1} = 9 * y_i + 5 * 4 * x_i$$

$$x_{i+1} = 9 * x_i + 4 * y_i$$

Załóżmy teraz że $x_i = F_n$ i $y_i = F_{n+1} + F_{n-1}$ dla jakiegoś n . Wtedy: $y_{i+1} = 20F_{n+1} + 9F_{n-1} + 9F_n = 18F_{n+1} + 11F_n = 11F_{n+2} + 7F_{n+1} = 7F_{n+3} + 4F_{n+2} = 4F_{n+4} + 3F_{n+3} = 3F_{n+5} + 1F_{n+4} = F_{n+6} + 2F_{n+5} = F_{n+7} + F_{n+5}$ oraz przez analogiczne wyliczenia $x_{i+1} = F_{n+6}$, czyli x_{i+1} i y_{i+1} możemy zapisać w analogiczny sposób. ponieważ x_1, y_1 spełniają tę zależność to indukcyjnie otrzymujemy tezę.

Rozwiązanie 8

Rozwiązanie 9 Przepiszmy założenie w postaci $(a-bc)^2 = (b^2-1)(c^2-1)$. Z tej równości wynika, że istnieją liczby całkowite d, x, y takie, że $b^2-1 = dx^2$, $c^2-1 = dy^2$, $a-bc = \pm dxy$ oraz d nie jest kwadratem liczby całkowitej. Z własności równania Pella wiemy, że jeśli $X^2 - dY^2 = 1$, to $X = \frac{U^k+V^k}{2}$ dla pewnego k , przy czym $U = p + q\sqrt{d}$, $V = p - q\sqrt{d}$ oraz p, q są najmniejszymi dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $p^2 - dq^2 = 1$. Korzystając z tego, wiemy że dla pewnych dodatnich liczb całkowitych n, m zachodzi

$$b = \frac{U^n + V^n}{2} \text{ i } c = \frac{U^m + V^m}{2}$$

Jeśli $n = 2s$ dla pewnego całkowitego s , to $\frac{b+1}{2} = \left(\frac{U^2+V^2}{2}\right)$ i mamy tezę. Analogicznie dla parzystego m też dostajemy tezę. Do rozważenia został przypadek, w którym obie liczby n, m są nieparzyste. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $n > m$. Mamy

$$\begin{aligned} bc &= \frac{U^{n+m} + V^{n+m} + U^{n-m} + V^{n-m}}{4}, \\ (dxy)^2 &= (b^2-1)(c^2-1) = \\ &= \frac{U^{2n} + V^{2n} - 2}{4} \cdot \frac{U^{2m} + V^{2m} - 2}{4} = \\ &= \left(\frac{U^{n+m} + V^{n+m} - U^{n-m} - V^{n-m}}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $a = bc \pm dxy$ oraz $dxy = \pm \frac{1}{4}(U^{n+m} + V^{n+m} - U^{n-m} - V^{n-m})$, więc $a = \frac{1}{2}(U^t + V^t)$, gdzie $t \in \{n-m, n+m\}$. Skoro liczby n i m są nieparzyste, to $t = 2s$ dla pewnej liczby całkowitej s . Analogicznie jak wcześniej dowodzimy, że $\frac{a+1}{2} = \frac{U^s+V^s}{2}$ jest kwadratem liczby całkowitej, co kończy rozwiązanie.