

Inwersja

Filip Maniak

MIKO, maj 2024

1 Definicja

Inwersja to przekształcenie płaszczyzny. Inwersję wykonujemy względem danego okręgu (o środku O i promieniu R). Obraz punktu $A(A')$ to punkt na prostej OA taki że:

$$R^2 = OA \cdot OA'$$

2 Twierdzenia

1. Inwersja jest dualna, czyli $(A')' = A$.
2. Proste przechodzą na okręgi przechodzące przez środek okręgu inwersyjnego.
3. Okręgi przechodzące przez środek okręgu inwersyjnego przechodzą w proste.
4. Okręgi nie przechodzące przez środek okręgu inwersyjnego przechodzą w inne okręgi.
5. Okrąg inwersyjny przechodzi na samego siebie.
6. $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OB'A'$

3 Ćwiczenia

1. dany jest okrąg ω o środku w O , i Promieniu OA . Na promieniu OA leżą punkty B i C . Punkty B' i C' to obrazy inwersyjne B i C względem ω . Punkt D leży na ω . Udowodnij że $\sphericalangle BDC = \sphericalangle B'DC'$
2. dany jest trójkąt ABC , z okręgiem wpisanym ω z środkiem I . Udowodnij że I jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$, gdzie A', B' i C' są obrazami inwersyjnymi A, B i C względem ω
3. Dane są 2 prostopadłe proste AB i CD przecinające się w E . ω_A to okrąg o środku w A i przechodzący przez E . Analogicznie definiujemy $\omega_B, \omega_C, \omega_D$. Udowodnij że przecięcia: ω_A i ω_C ; ω_A i ω_D ; ω_B i ω_C ; ω_B i ω_D ; leżą na jednym okręgu.

4 Inwersja $\sqrt{BC}$

Inwersja $\sqrt{BC}$ to złożenie 2 przekształceń (dla danego trójkąta ABC), czyli inwersji względem okręgu o środku w A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$, oraz odbiciu względem dwusiecznej. W inwersji $\sqrt{BC}$:

1. Obraz punktu B to C ;
2. Obraz punktu I to J_A ;
3. Obraz prostej BC to okrąg opisany na trójkącie ABC ;
4. Obraz punktu O to odbicie A względem BC ;
5. Obraz okręgu dopisanego to okrąg dopisany.
6. Obraz punktu H leży na $o(BOC)$

5 Zadania

1. *Okrąg Ω ma promień R i środek A . Udowodnij że jeżeli okrąg ω przechodzi na samego siebie w inwersji względem Ω , to potęgą punktu A względem ω to R^2
2. *Dany jest okrąg Ω o średnicy AB i środku O . Cięciwa CD Ω przecina AB w M . Załóżmy że okręgi $o(AOC)$ i $o(BOD)$ przecinają się w K . Udowodnij że $\sphericalangle MKO = 90^\circ$
3. ** Okrąg opisany na trójkącie ABC to ω . Okrąg o styczny do odcinków AC , BC jest styczny do okręgu ω w punkcie P , a S jest środkiem tego łuku AB okręgu ω , na którym leży punkt C . Wykazać, że punkty P, I, S są współliniowe.
4. **Niech AB będzie cięciwą okręgu Ω . ω jest okręgiem stycznym zarówno do AB (w punkcie X) i do krótszego łuku AB okręgu Ω (w punkcie Y). M to środek łuku AB który nie zawiera Y . Udowodnij że XY przechodzi przez M .
5. *** Punkty A, B, C leżą na jednej prostej. Punkt D leży poza prostą AB . Udowodnij że środki okręgów $o(ABD), o(ACD), o(BDC)$ i punkt D leżą na jednym okręgu.
6. *** W trójkącie ABC dwusieczna kąta $\sphericalangle BAC$ przecina BC w D i $o(ABC)$ w E . Okrąg o średnicy DE przecina $o(ABC)$ w F . Udowodnij że AF to symediana w trójkącie ABC .
7. *** Dany jest trójkąt ABC . Punkt D leży na $o(AIC)$ i nie leży na BI . Środek odcinka DI (Punkt M) leży na $o(ABC)$. Udowodnij że $\sphericalangle ICA = \sphericalangle MCD$
8. *** Dany są 2 okręgi ortogonalne: ω_1 i ω_2 . AB jest średnicą ω_1 (B leży wewnątrz ω_2). γ_1 i γ_2 to okręgi przechodzące przez A i O , oraz styczne do ω_2 , odpowiednio w X i Y . Udowodnij że X, Y, O, B leżą na jednym okręgu (O to środek ω_1).
9. **** Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o_1 . Okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie F . Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinka AB w punkcie E . Dowieść, że punkty E, F, D leżą na jednej prostej.
10. ***** Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o średnicy AC . Punkt E to przecięcie AC i BD . F to punkt na okręgu $o(COD)$ taki że OF to średnica okręgu $o(COD)$. G to przecięcie $o(AOB)$ i $o(COD)$. Udowodnij że punkty G, F i E są współliniowe.
11. (inwersja ujemna) Dany jest trójkąt ABC , gdzie $AB \perp AC$. F jest spodkiem wysokości z A , M to środek BC , Q to punkt na $o(ABC)$, taki że $\sphericalangle AQH = 90^\circ$. K to punkt na $o(ABC)$ że $\sphericalangle QHK = 90^\circ$. Załóżmy że punkty A, B, C, K, Q leżą na $o(ABC)$ w tej kolejności. Udowodnij że $o(KHQ)$ i $o(KFM)$ są styczne.

6 solvy

1. Z z własności inwersji: $\sphericalangle ODB = \sphericalangle DB'C$ i $\sphericalangle ODC = \sphericalangle OC'D$. Zauważmy że: $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ODC - \sphericalangle ODB = \sphericalangle OC'D - \sphericalangle OB'D = \sphericalangle B'DC'$, co należało wykazać.
2. Oznaczmy D jako punkt przecięcia $B'I$ z $A'C'$ i E jako punkt przecięcia $A'I$ i $B'C'$. Zauważmy że: $\sphericalangle A'B'I = \sphericalangle BAI$; $\sphericalangle IA'C' = \sphericalangle ICA$; $\sphericalangle IA'B' = \sphericalangle IBA$. Czyli $\sphericalangle B'DA' = 180^\circ - \sphericalangle A'B'I - \sphericalangle IA'C' - \sphericalangle IA'B' = 90^\circ$, ponieważ $\sphericalangle BAI + \sphericalangle IBA + \sphericalangle ICA = 90^\circ$ (połowa sumy kątów w trójkącie ABC). Analogicznie dowodzimy $\sphericalangle C'EA' = 90^\circ$. Otrzymujemy że I leży na 2 wysokościach trójkąta $A'B'C'$, co należało wykazać.
3. Rozpatrzmy inwersję o środku w E i dowolnym promieniu mniejszym niż $\min(AE, BE, CE, DE)$. Wtedy ω_A przechodzi na prostą prostopadłą do AE , ω_B na prostą prostopadłą do BE , i analogicznie ω_C i ω_D . proste te tworzą prostokąt. Przecięcia okręgów przechodzą na przecięcia prostych, a ponieważ na prostokącie można opisać okrąg, to na przecięciach też, CKD.
4. Zauważmy że jeśli prosta przechodząca przez A tnie ω w B i C to $R^2 = AB \cdot AC = P(A, \omega)$
5. Zakładamy BSO że CD przecina AB na OB . Zauważmy że po inwersji względem Ω K' to punkt przecięcia AC i BD , a M' to punkt przecięcia AB z $O(OC'D)$. Teza jest równoważna temu że $\sphericalangle OM'K' = 90^\circ$. Ponieważ $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, to jeśli wykazemy że punkty K', M', B i C leżą na jednym okręgu, to otrzymujemy tezę. Przenosząc kąt $\sphericalangle CM'O$ po okręgach $O(OC'M'D)$ i $O(ABC)$ wyliczamy $\sphericalangle CBD$ a następnie $\sphericalangle CK'B$. Otrzymujemy $\sphericalangle CM'B = \sphericalangle CK'B$ c.k.d.
6. . Po inwersji $\sqrt{BC}$ P przechodzi na punkt styczności o dopisanego, S na przecięcie AS i BC oraz I na J . Zauważamy że A, I', S', P' są cykliczne, bo $\sphericalangle S'AI' = \sphericalangle S'P'I'$ czyli PSI przed inwersją leżały na jednej prostej, co należało wykazać.
7. Robimy inwersję względem okręgu o środku w M i promieniu $MA = MB$. Wtedy łatwo zauważyć że ω przechodzi na samego siebie, oraz punkt styczności do cięciwy AB na punkty styczności do łuku AB , czyli są one swoimi obrazami inwersyjnymi czyli leżą one na jednej prostej z środkiem inwersji c.k.d.

8. Oznaczmy środek $O(ABD)$ jako O_1 środek $O(ACD)$ O_2 i środek $O(BCD)$ jako O_3 . Rozważmy inwersję o środku w D i dowolnym promieniu. Wtedy A', B', C' i D leżą na jednym okręgu. Łatwo zauważyć że O'_1 i O'_2 leżą na okręgu o środku w A' i promieniu AD i analogicznie dla B' i C' . Następnie dowodzimy że O'_1 punkt przecięcia okręgu o środku w A' i promieniu AD i B leżą na jednej prostej, i analogicznie dla O'_2 i O'_3 . Następnie przenosząc kąt oparty na łuku DO'_1 okręgu inwersyjnego otrzymujemy że obrazy środków okręgów są współliniowe.
9. Rozważmy inwersję względem $O(ABC)$. Wtedy punkt przecięcia stycznych do B i C przechodzi na środek BC (M). Żeby F, A i punkt przecięcia stycznych były współliniowe to F, A, M, O muszą być cykliczne. Udowadniamy to przenosząc $\sphericalangle DEM$.
10. Zauważmy że po inwersji względem okręgu wpisanego w ABC punkt D przechodzi na odcinek $A'C'$, oraz odbicie I względem D leży na $O(A'B'C')$. Ponieważ I to ortocentrum $A'B'C'$ i D nie leży na $B'I$ to M jest środkiem $A'C'$. Przenosimy kąty używając własności inwersji i łatwo otrzymujemy tezę.
11. rozważmy inwersję względem ω_1 wtedy X i Y przechodzą na punkty styczności stycznych z A do ω_2 . Teza równoważna jest temu że obrazy tych punktów są współliniowe z B . Zauważamy jednak że A leży na biegunowej B (biegunowa B to prosta prostopadła do prostej przechodzącej przez B i środek ω_2 i przecinająca ω_1 w tym samym punkcie co ta prosta. Czyli B leży na biegunowej A , tak samo jak X' i Y' , c.k.d.
12. Zróbmy inwersję o promieniu $\sqrt{AC \cdot BC}$ złożoną z odbiciem przez dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$. Wtedy F przejdzie na punkt styczności BC i okręgu dopisanego, E na punkt na okręgu opisanym na ABC . Zauważmy że trójkąty CFE i $CF'E'$ są podobne spiralnie, czyli $\sphericalangle CF'E = \sphericalangle CE'F$. Zauważamy że I, F', D i C leżą na jednym okręgu, czyli D', I', F leżą na jednej prostej. Zauważamy że $\sphericalangle D'F'C = \sphericalangle D'I'C$ c. k.d
13. Robimy inwersję względem okręgu $O(ABCD)$ i zauważamy że okrąg $O(DEC')$ jest okręgiem 9 punktów trójkąta ABG' . Zauważamy że $\sphericalangle G'C'O = \sphericalangle OF'G' = 90^\circ$ czyli O, F', C', G' leżą na jednym okręgu, czyli przed inwersją F, C i G były współliniowe.
14. Rozważmy inwersję ujemną o środku w H i takim promieniu że okrąg 9 punktów przechodzi na okrąg opisany na ABC . Wtedy: $A \mapsto F, Q \mapsto M, K \mapsto L$, i teza jest równoważna że ML jest tangent to $O(AQL)$. Zauważmy że LM i AQ są równoległe i $LA=LQ$. Zauważamy że LT jest prostopadłe do AQ i $AO=AQ$, co kończy dowód.