

Ciągi jednomonotoniczne

Filip Manijak

January 2023

1 Twierdzenie:

Jeśli mamy 2 ciągi tej samej monotoniczności A i B oraz dowolną permutację ciągu B (B') to zachodzą nierówności:

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \geq a_1b'_1 + \dots + a_nb'_n \geq a_1b_n + \dots + a_nb_1$$

Twierdzenie zachodzi też dla więcej niż 2 ciągów, ale wtedy wszystkie wyrazy ciągów muszą być nieujemne.

2 Rozgrzewka:

Zad 1: Udowodnić że:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1a_2 + \dots + a_na_1$$

Zad 2: Dane są $a, b > 0$, Udowodnić że:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2$$

Zad 3(II OM-III, z.3): Dane są $a, b, c > 0$, udowodnić że:

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$$

3 Zadansy:

Zad 4(XIV OM - I - z.10): Dane są $a, b, c > 0$, udowodnić że:

$$a + b + c \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}$$

Zad 5: Dane są $a, b, c > 0$, Udowodnić że:

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{(abc)^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Zad 6(Nier. Czebyszewa): Dane są ciągi: $a_1 < \dots < a_n$ i $b_1 < \dots < b_n$. Udowodnić:

$$(a_1 + \dots + a_n) \cdot (b_1 + \dots + b_n) < n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)$$

Zad 7: Dane są $a, b > 0$. Udowodnić że dla każdego n :

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2} \right)^n$$

Zad 8: Niech w trójkącie ABC liczby h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości a, b, c odpowiednio. Uzasadnij, że:

$$(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) \geq 18P_{ABC}$$

Zad 9: Dane są $a, b, c > 0$, udowodnić że:

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{a+c} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{a+c}$$

Zad 10: Udowodnij że jeżeli $a < b < c < d$:

$$(a + b + c + d)^2 \geq 8(ad + bc)$$

Zad 11: Dane jest $S = a_1 + \dots + a_n$. Liczby a są dodatnie. Udowodnić że:

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \dots + \frac{a_n}{S - a_n} \geq \frac{n}{n - 1}$$

Zad 12: Dane jest 2137 liczb, $a_1 + \dots + a_{2137} = 2137$. Udowodnić że:

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \dots + \frac{a_{2137}^3}{a_1} \geq 2137$$

Zad 13: Wykazać dla a, b, c dodatnich:

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 3 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+c} \right)$$

Zad 14: Wykazać dla nieujemnych x, y, z takich że $x+y+z=1$:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{4}$$

Zad 15: Wykazać dla dodatnich a, b, c że:

$$\frac{a^2 + bc}{b+c} + \frac{b^2 + ac}{a+c} + \frac{c^2 + ab}{a+b} \geq a + b + c$$

Zad 16: Wykazać dla dodatnich a, b, c że:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}$$

Zad 17: Wykazać dla dodatnich a, b, c że:

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

Zad 18: Wykazać że suma odległości ortocentrum od boków trójkąta jest mniejsza lub równa $3r$, gdzie r to promień okręgu wpisanego.

Zad 19: Dany jest ciąg x_n taki że: $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ oraz:
 $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = 1$ Udowodnić:

$$\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n} \geq (n-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)$$

4 Rozwiązania:

Zad 1: Zakładamy bez starty ogólności $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Definiujemy ciąg $b_n = a_n$. Ciągi a_n i b_n są tej samej monotoniczności. Z tw. o ciągach jednomonotonicznych $a_1^2 + \dots + a_n^2 = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \geq a_1 b_2 + \dots + a_n b_1 = a_1 a_2 + \dots + a_n a_1$, co należało wykazać.

Zad 2: Mnożymy obustronnie przez ab . Otrzymujemy:

$$a^4 + b^4 \geq a^3 b + b^3 a$$

Zakładamy bez straty ogólności $a > b$. Definiujemy $a_1 = a, a_2 = b, b_1 = a^3, b_2 = b^3$. Ciągi a i b są tej samej monotoniczności, więc z tw. o ciągach jednomonotonicznych $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$, czyli $a^4 + b^4 \geq a^3 b + b^3 a$ co jest równoważne tezie.

Zad 3: Wymnażamy i otrzymujemy: $ab^2 + a^2 b + bc^2 + b^2 c + ca^2 + c^2 a \geq 6abc$. Zakładamy bso $a \geq b \geq c$ Tworzymy ciągi: $a_1 = ab, a_2 = ab, a_3 = ac, a_4 = ac, a_5 = bc, a_6 = bc, b_1 = c, b_2 = c, b_3 = b, b_4 = b, b_5 = a, b_6 = a$. Zauważmy że ciągi te są odwrotnej monotoniczności, czyli z tw. o ciągach jednomonotonicznych (2 części), każda permutacja jest większa od $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 3abc$. po lewej stronie nierówności są 2 takie permutacje, czyli $L \geq 2 \cdot 3abc$, co należało wykazać.

Zad 4: Wymnożyć, zastosować nierówność w formie dla 3 ciągów.

Zad 5: Wymnożyć, zastosować nierówność w formie dla 3 ciągów.

Zad 6: Zauważyć że po prawej stronie mamy n ciągów maksymalnych, a po lewej n ciągów niekoniecznie maksymalnych.

Zad 7: Wymnożyć, zauważyć że po lewej stronie jest 2^{n-1} par maksymalnych, a po prawej 2^{n-1} par niekoniecznie maksymalnych (np. $a^n + b^n \geq a^{n-1} b + b^{n-1} a$)

Zad 8: Zauważyć że $a * h_a = b * h_b = c * h_c = 2P$, czyli ciągi a, b, c i h_a, h_b, h_c są odwrotnie monotoniczne. zastosować rozumowanie analogiczne co w zad. 6

Zad 9: Zastosować nierówność w formie dla 3 ciągów $a, b, c, \sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$,

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$$

Zad 10: Wymonozżyć, zauważyć że po lewej stronie jest 4 ciągi nieminimalne, a po prawej 4 minimalne. (nier. dla ciągów (a,b,c,d i a,b,c,d))

Zad 11: Zastosować nierówność Czebyszewa, następnie dojść do formy:

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} + n \right)$$

pomnożyć przez n, i odjąć stronami ułamki.

Zad 12: Zauważyć że Lewa strona jest większa bądź równa od sumy kwadratów, następnie nierówność między średnią kwadratową a arytmetyczną.

Zad 13: Zastosować rozumowanie analogiczne co w zad. 8

Zad 14: Zapisać 1 w mianownikach jako x+y+z, przemnożyć przez 4, następnie 3 zamienić na:

$$\frac{2x+y+z}{2x+y+z} + \frac{x+2y+z}{x+2y+z} + \frac{x+y+2z}{x+y+2z}$$

następnie każdy ułamek rozbić na 4 i zauważyć nierówność między ciągami liczników i mianowników.

Zad 15: Zauważyć że $\frac{a^2+ab}{a+b} = a$, oraz analogicznie dla b i c. następnie odjąć stronami $\frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} + \frac{ab}{a+b}$. Zastosować nierówność między ciągami jednomno-
tonicznymi.

Zad 16: Zauważyć że $2(a+b+c) = ((a+b)+(b+c)+(ca))$, przemnożyć przez $2(a+b+c)$, zastosować nierówność Czebyszewa.

Zad 17: Zastosować logarytm naturalny, zauważyć że ciąg $\ln a, \ln b, \ln c$, jest tak samo monotoniczny jak a,b,c.

Zad 18: Zauważyć że $(a+b+c)r = 2P = ad_a + bd_b + cd_c$ (a,b,c długości boków, d_a, d_b, d_c to odległości ortocentrum od boków. Zastosować nierówność Czebyszewa.

Zad 19: wystarczy że udowodnimy że:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right) + \left(\sqrt{x_2} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} \right) + \dots + \left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) \geq \\ & \geq n \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right), \end{aligned}$$

przemnażając przez 1 i wcielając pierwiastki do ułamków otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+x_1}{\sqrt{x_1}} + \dots + \frac{1+x_n}{\sqrt{x_n}} \right) \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \right) \geq \\ & \geq n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) \end{aligned}$$

następnie zauważyć że jeśli $x_i \geq x_j$, to $\frac{x_i+1}{\sqrt{x_i}} \geq \frac{x_j+1}{\sqrt{x_j}}$. Zastosować nierówność Czebyszewa.