



Twierdzenie o trójlisciu

Antoni Łuczak

Zadania Proste

Zadanie 1. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Okrąg opisany na trójkącie ABI przecina BC po raz drugi w punkcie D . Okrąg opisany na trójkącie AIC przecina BC po raz drugi w punkcie E . Udowodnij, że I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADE .

Zadanie 2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkt M jest środkiem boku AB , natomiast N to drugie przecięcie prostej AI z okręgiem opisanym na ABC . Załóżmy, że $\angle BIM = 90^\circ$. Wyznaczyć stosunek $AI : IN$.

Zadanie 3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Proste BI, CI przecinają okrąg opisany na ABC odpowiednio w punktach P, Q . Wykazać, że prosta PQ jest symetralną odcinka AI .

Zadanie 4. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I . Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q , różnych od A i B . Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to $\angle CIF = 90^\circ$.

Zadania Trochę Trudniejsze

Zadanie 5. Punkt H jest ortocentrum ABC . Proste AH, BH, CH przecinają BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez środek odcinka AH .

Zadanie 6. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Niech J_a, J_b i J_c będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, CDE . Prosta l_a jest symetryczna do prostej BC względem prostej $J_b J_c$, analogicznie określamy proste l_b i l_c . Dowieść, że proste l_a, l_b, l_c przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 7. Niech K i L będą punktami na łukach odpowiednio BC i BA okręgu opisanego na trójkącie ABC tak, że $KL \parallel AC$. Udowodnij, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCK i ABL są równoodległe od środka łuku AC , zawierającego punkt B , okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Zadanie 8. Trójkąt ABC spełnia $\angle BAC = 60^\circ$. Niech O, I, H oznaczają odpowiednio środek okręgu opisanego, środek okręgu wpisanego oraz ortocentrum trójkąta ABC . Udowodnij, że $OI = IH$.

Zadanie 9. (IMO 2006-1) Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkt P leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Wykazać, że $AP \geq AI$ oraz że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P = I$.

Zadanie 10. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D . Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I .

Ćwiczenia Po Kółku

Ćwiczenie 1. Punkty B, C leżą na okręgu Ω . Punkty A_1, A_2 leżą na tym samym łuku BC okręgu Ω oraz spełniają $A_1A_2 = 1$. Niech I_1, I_2 oznaczają odpowiednio środki okręgów wpisanych w A_1BC, A_2BC . Udowodnij, że długość odcinka I_1I_2 nie zależy od wyboru punktów A_1, A_2 .

Ćwiczenie 2. Trójkąt ABC , w którym $AB < AC$, jest wpisany w okrąg Ω . Dwusieczne $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle ACB$ przecinają się w I oraz przecinają Ω po raz drugi odpowiednio w punktach P, Q . Niech N oznacza środek łuku BAC okręgu Ω . Udowodnij, że

1. $AN \parallel PQ$
2. $NPIQ$ jest równoległobokiem oraz wywnioskuj stąd, że NI przechodzi przez środek PQ .
3. Niech I_B, I_C oznaczają odpowiednio środki okręgów B -dopisanego oraz C -dopisanego trójkąta ABC . Udowodnij, że punkty B, C, I_B, I_C leżą na okręgu o środku N .
4. * Wywnioskuj z poprzednich podpunktów, że $\sphericalangle ANI = \sphericalangle IMB$, gdzie M to środek BC .

Ćwiczenie 3. W konfiguracji z zadania 7, udowodnij, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCK, ABL , punkt B oraz środek łuku ABC leżą na jednym okręgu.

Ćwiczenie 4. Wysokości BE, CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Niech M oznacza środek odcinka BC . Dodatkowo, niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt MEF . Udowodnij, że $\sphericalangle AIH = 90^\circ$.

Rozwiązania zadań

Rozwiązanie 1. Na mocy twierdzenia o trójlściu, okrąg opisany na ABI jest symetryczny względem dwusiecznej kąta ACB . Dostajemy zatem, że D jest odbiciem A względem tej dwusiecznej oraz $ID = IA$. Podobnie $IE = IA$ i dostajemy tezę.

Rozwiązanie 2. Niech J oznacza środek okręgu A -dopisanego do ABC . Na mocy twierdzenia o trójlściu mamy $IN = JN$. Dodatkowo $\sphericalangle JBI = 90^\circ$, więc $IM \parallel AJ$. Z twierdzenia o linii środkowej mamy $AI = IJ$. W takim razie $AI : IN = 2$.

Rozwiązanie 3. Na mocy twierdzenia o trójlściu mamy $PA = PI$ oraz $QA = QI$, co daje tezę.

Rozwiązanie 4. Na mocy poprzedniego zadania PQ jest symetralną CI . Skoro F jest odbiciem C względem środka PQ , to $IF \parallel PQ$. Jednak $PQ \perp CI$, zatem $\sphericalangle CIF = 90^\circ$.

Rozwiązanie 5. Wystarczy zauważyć, że H, A, B, C to środek okręgu wpisanego oraz środki odpowiednich okręgów dopisanych do trójkąta DEF . Na mocy twierdzenia o trójlściu, środek odcinka AH jest środkiem łuku EF okręgu opisanego na trójkącie DEF , co daje nam tezę.

Rozwiązanie 6. Proste kąty pokazują, że punkty J_a, J_b, J_c są środkami odpowiednich łuków EF, FD, DE okręgu wpisanego. Na mocy zadania 3 proste l_a, l_b, l_c przechodzą przez środek okręgu wpisanego w DEF .

Rozwiązanie 7. Niech X, Y oznaczają środki łuków CK, AL odpowiednio, natomiast I, J środki okręgów wpisanych w BCK oraz ABL odpowiednio. Skoro łuki CK, BL mają równe długości, to $IX = XC = YA = YJ$. Niech N oznacza środek łuku ABC . Mamy $NA = NC$ oraz $\sphericalangle NAB = \sphericalangle NCB$. To daje nam przystawanie $\triangle NCI \equiv \triangle NAJ$. W szczególności mamy $NI = NJ$, co należało pokazać.

Rozwiązanie 8. Proste kąty pokazują, że O oraz H leżą na okręgu trójlściowym BIC . Dodatkowo wiadomo, że proste AH, AO są symetryczne względem dwusiecznej kąta BAC . Skoro środek okręgu BIC również leży na tej dwusiecznej, to dostajemy tezę.

Rozwiązanie 9. Korzystając z podanej równości jesteśmy w stanie obliczyć, że $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BIC$, zatem punkt P leży na okręgu trójlściowym i spełnia $PN = IN$, gdzie N to środek łuku BC . Na mocy nierówności trójkąta mamy

$$AP + PN \geq AN = AI + IN \iff AP \geq AI,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P = I$.

Rozwiązanie 10. Wystarczy pokazać, że $PD \perp QC$ oraz $QD \perp PB$. Skoro $AQ = QD$ oraz Q leży na dwusiecznej kąta ACB , to czworokąt $AQDC$ jest cykliczny. Analogicznie czworokąt $APDB$ jest cykliczny. Proste kąty lub potęga punktu w I pokazują, że $BCPQ$ też jest cykliczny. Mamy zatem

$$\sphericalangle CQP = \sphericalangle CBP = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PDA.$$

Analogicznie $\sphericalangle QPB = \sphericalangle ADQ$. W połączeniu z faktem, że $PQ \perp AD$ otrzymujemy pozostałe prostopadłości.

Rozwiązania ćwiczeń

Rozwiązanie 1. Na mocy twierdzenia o trójlściu punkty B, C, I_1, I_2 leżą na jednym okręgu o środku N , gdzie N to środek tego łuku BC , który nie zawiera A_1, A_2 . Warunek $A_1A_2 = 1$ mówi, że $\sphericalangle A_1NA_2$ jest stały. W takim razie również długość I_1I_2 jest stała.

Rozwiązanie 2. 1. AN jest dwusieczną zewnętrzną kąta BAC , zatem jest prostopadła do AI . Podobnie PQ jest prostopadła do AI , zatem $AN \parallel PQ$.

2. Z twierdzenia o trójlściu $PI = AP$. Dodatkowo kąty oparte na łukach AP, AQ, AN to odpowiednio $\frac{\gamma}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{|\beta-\gamma|}{2}$. Wynika stąd, że kąty oparte na łukach AP, QN są równe. W takim razie $NQ = AP = IP$. Analogicznie $NP = AQ$.

3. Mamy $\sphericalangle I_CBI_B = \sphericalangle I_CCI_B = 90^\circ$, zatem punkty B, C, I_B, I_C leżą na okręgu o średnicy I_BI_C . Punkt N leży na I_BI_C oraz spełnia $NB = NC$. Oznacza to, że jest środkiem tego okręgu.

4. Z poprzednio pokazanej cykliczności mamy podobieństwo $\triangle I_BI_CI \sim \triangle BCI$. Skoro N, M są środkami odpowiadających boków tych trójkątów, to otrzymujemy również podobieństwo $\triangle I_BNI \sim \triangle BMI$. To daje nam równość kątów z tezy.

Rozwiązanie 3. Przystawanie udowodnione w rozwiązaniu zadania 7 daje nam równość $\sphericalangle NIB = \sphericalangle NJB$, co implikuje, że punkty B, N, I, J leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie 4. Podobnie jak w zadaniu 5, korzystamy z faktu, że H, A, B, C to środek okręgu wpisanego i środki odpowiednich okręgów dopisanych do trójkąta DEF , gdzie D to trzeci spodek wysokości w trójkącie ABC . Skoro $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$ oraz M jest środkiem BC , to M jest środkiem okręgu opisanego na $BCEF$ oraz w szczególności $ME = MF$. Ponadto M leży na dwusiecznej zewnętrznej kąta EDF , więc punkt M leży na okręgu opisanym na DEF . Dostajemy zatem, że I leży na okręgu trójlściowym opisanym na $EHFA$. Skoro średnicą tego okręgu jest AH , to $\sphericalangle AIH = 90^\circ$, co należało pokazać.