Kąty w Okręgach

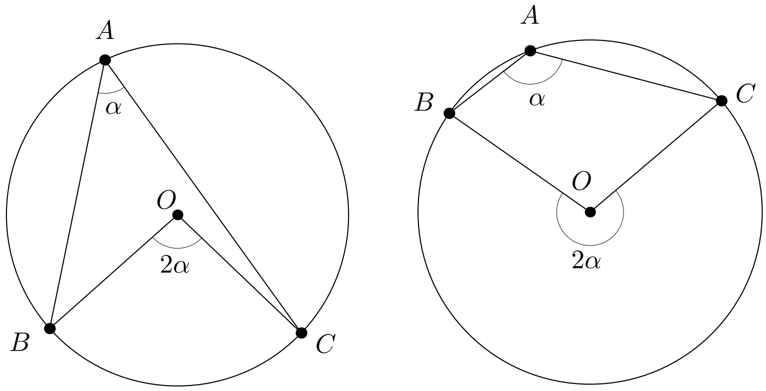
Antoni Łuczak

10.06.2024

Teoria

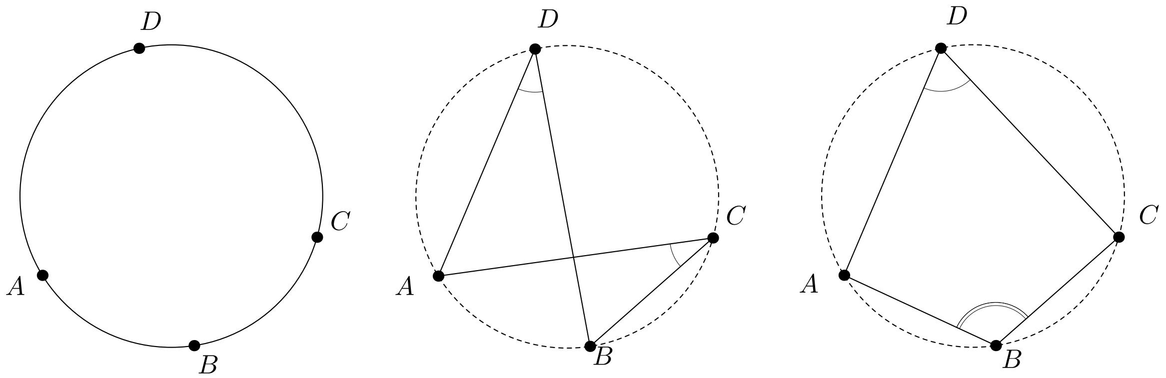
Twierdzenie o Kącie Środkowym i Wpisanym

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Wtedy kąt BOC jest dwa razy większy niż kąt BAC.



Wniosek: Następujące warunki są równoważne:

1. Punkty A, B, C, D leżą w tej kolejności na jednym okręgu.
2. Punkty C, D leżą po tej samej stronie prostej AB oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.
3. Punkty B, D leżą po przeciwnych stronach prostej AC oraz $\sphericalangle ADC + \sphericalangle CBA = 180°$.



Zadania

Zadanie 1 (Twierdzenie o Kącie Dopisanym)**.** Punkty A, B, C leżą na okręgu o. Na prostej l stycznej do o w punkcie B wybrano punkt D w ten sposób, że D oraz A leżą po przeciwnych stronach prostej BC. Udowodnij, że $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BAC$.

Zadanie 2 (Twierdzenie o Czapeczkach)**.** Punkty A, B leżą na okręgu o. Styczne do o w punktach A, B przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że $SA = SB$.

Zadanie 3. Dwa okręgi przecinają się w punktach A, B. Przez punkt A poprowadzono prostą przecinającą okręgi w punktach C oraz D, natomiast przez B poprowadzono prostą przecinającą okręgi w punktach E oraz F. Udowodnij, że $\sphericalangle CBD = \sphericalangle EAF$.

Zadanie 4. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Dodatkowo zachodzi równość

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE.$$

Udowodnij, że $BC = DE$.

Zadanie 5. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Niech D oznacza rzut prostokątny punktu A na prostą BC. Udowodnij, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle OAC$.

Zadanie 6 (10 OMG 1-2)**.** Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu o. Punkt E jest symetryczny do punktu B względem prostej CD. Wykaż, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.

Zadanie 7. Punkt P leży wewnątrz kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle APB = 90°$. Niech O oznacza środek kwadratu. Wyznacz miarę kąta OPA.

Zadanie 8. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę $60°$. Dwusieczne kątów CBA, ACB przecinają się w punkcie I oraz przecinają boki AC, AB odpowiednio w punktach D, E. Udowodnij, że na czworokącie $ADIE$ da się opisać okrąg.

Zadanie 9. Okręgi o_1, o_2 przecinają się w punktach A oraz B. Prosta l jest styczna do okręgu o_1 w punkcie X oraz do okręgu o_2 w punkcie Y. Udowodnij, że $\sphericalangle XAY + \sphericalangle XBY = 180°$.

Zadanie 10 (Twierdzenie o Trójliściu)**.** Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Dwusieczna kąta BAC przecina o w punkcie $M \neq A$. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnij, że $MA = MB = MI$.

Zadanie 11 (Twierdzenie o Prostej Simsona)**.** Punkty A, B, C, P leżą na jednym okręgu. Udowodnij, że rzuty prostokątne punktu P na proste AB, BC, CA leżą na jednej prostej.

Zadanie 12. Dany jest równoległobok $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie O. Punkty E, F wybrano na boku BC w ten sposób, że E leży pomiędzy B i F. Udowodnij, że jeśli proste AE, DF są styczne do okręgu opisanego na trójkącie AOD, to są też styczne do okręgu opisanego na trójkącie EOF.

Zadanie 13. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB oraz CD przecinają się w punkcie E, natomiast proste AD oraz BC w punkcie F. Udowodnij, że dwusieczne kątów AED oraz BFD są prostopadłe.

Zadanie 14. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Punkt P leży wewnątrz trójkąta i spełnia

$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle PAC \text{ oraz } \sphericalangle BAP = \sphericalangle ACP.$$

Udowodnij, że kąt APO jest prosty.

*Styczne w punktach B oraz C do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że punkty A, P, S leżą na jednej prostej.

Zadanie 15 (75 OM 3-1)**.** Dany jest prostokąt $ABCD$ i punkt X leżący w jego wnętrzu. Dwusieczne kątów DAX oraz CBX Przecinają się w punkcie P. Punkt Q spełnia równość

$$\sphericalangle QAP = \sphericalangle QBP = 90°.$$

Udowodnić, że $PX = QX$.