



Inwolucje

Antoni Łuczak

Teoria

Definicja 1 (Inwolucja)

Abuse of notation: Inwolucja to mapa rzutowa, która złożona ze sobą daje identyczność. (w tym kontekście identyczności nie uznajemy za inwolucję)

Lemat 1

Inwolucja ma co najwyżej 2 punkty stałe.

Lemat 2 (Inwolucja na prostej)

Każda inwolucja na prostej to branie sprzężenia harmonicznego względem pewnej ustalonej pary punktów. Jest to jednocześnie inwersja lub symetria o środku na tej prostej

Lemat 3 (Inwolucja na stożkowej)

Inwolucja na stożkowej to rzutowanie przez punkt poza stożkową.

Twierdzenie 1 (DIT)

Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w stożkową Γ oraz prosta l , która nie przechodzi przez żadne dwa wierzchołki tego czworokąta. Niech l przecina proste AB , CD , AD , BC , AC , BD oraz Γ odpowiednio w punktach $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, T_1, T_2$. Wtedy $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2), (T_1, T_2)$ są parami pewnej inwolucji na l .

Twierdzenie 2 (DDIT)

Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na stożkowej Γ . Proste AB oraz CD przecinają się w E , natomiast AD oraz BC przecinają się w F . Niech L będzie dowolnym punktem różnym od A, B, C, D, E, F . Niech s, t będą stycznymi do Γ przechodzącymi przez L . Wtedy $(LA, LC), (LB, LD), (LE, LF), (s, t)$ są parami pewnej inwolucji na pęku L .

Zadania

Zadanie 1 (Lemat izogonalny). Dane są parami różne punkty A, B, C, D, O , przy czym proste OC, OD są izogonalne w kącie AOB . Udowodnij, że proste przez O oraz przecięcia AC z BD oraz AD z BC również są izogonalne w tym kącie.

(Jakiś bardzo stary OM) Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK \cdot AD = DL \cdot AB$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P . Wykazać, że $\sphericalangle DAP = \sphericalangle BAC$.

Zadanie 2. Udowodnij, że punkty styczności okręgu wpisanego oraz A -dopisanego do boku BC są symetryczne względem środka tego odcinka

Zadanie 3. Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B oraz C przecinają się w punkcie X . Udowodnij, że AX jest symedianą.

Zadanie 4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. W trójkącie ABC niech I oraz J oznaczają środek okręgu wpisanego i A -dopisanego odpowiednio. W trójkącie ACD niech K oraz L oznaczają środek okręgu wpisanego i A -dopisanego odpowiednio. Udowodnić, że proste IL , JK oraz dwusieczna kąta BCD są współpękowe.

Zadanie 5 (Serbia MO 2017 P6). Niech k oznacza okrąg opisany na trójkącie ABC oraz niech k_a oznacza okrąg A -dopisany do ABC . Niech wspólne styczne zewnętrzne okręgów k , k_a przecinają BC w P oraz Q . Udowodnić, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$

Zadanie 6. Niech ABC będzie trójkątem, a M środkiem boku BC . Niech γ będzie jego okręgiem wpisanym. Środkowa AM przecina γ w punktach X oraz Y . Niech proste przez X , Y , równoległe do BC przecinają γ ponownie w X_1 , Y_1 . Proste AX_1 , AY_1 przecinają BC w punktach P oraz Q . Udowodnić, że $BP = CQ$.

Zadanie 7 (68 finał zad 5). Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC , w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB . Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD i AC odpowiednio w punktach K i L . Proste styczne do ω przechodzące przez M przecinają prostą KL w punktach X i Y , przy czym punkty X , K , L , Y leżą w tej kolejności na prostej KL . Udowodnić, że punkty M , D , X , Y leżą na jednym okręgu.

Zadanie 8 (Taiwan TST3 2014 P3). Niech M będzie dowolnym punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABC . Załóżmy, że styczne z M do okręgu wpisanego w ABC przecinają BC w punktach X_1 , X_2 . Udowodnić, że okrąg opisany na MX_1X_2 przecina okrąg opisany na ABC po raz drugi w punkcie styczności okręgu A -dopisanego.

Rozwiązania

Rozwiązanie 1. Na mocy DDIT istnieje inwolucja zamieniająca OA z OB , OC z OD oraz OE z OF , gdzie $E = AC \cap BD$, $F = AD \cap BC$. Jeżeli złożymy tę inwolucję z symetrią względem dwusiecznej kąta AOB , to otrzymamy inwolucję, która jest stała w OA, OB, OC, OD , czyli jest identycznością. W takim razie nasza inwolucja jest symetrią względem dwusiecznej kąta OAB i stąd teza.

Rozwiązanie 2. Niech D oznacza punkt styczności okręgu wpisanego, a E punkt styczności okręgu dopisanego. Niech dodatkowo F oznacza odbicie D przez środek okręgu wpisanego. Znanym faktem jest, że punkty A, E, F leżą na jednej prostej. Zastosujmy teraz DDIT dla czworokąta zdegenerowanego $ABDC$, punktu F oraz stożkowej wpisanej będącej okręgiem wpisanym. Dostajemy w ten sposób inwolucję zamieniającą FB z FC , FA z FD oraz zachowującą prostą przechodzącą przez F , równoległą do BC . Rzutując tę inwolucję na prostą BC przez F otrzymujemy inwolucję, która zamienia B z C , D z E oraz zachowuje punkt w nieskończoności. Jeżeli złożymy tę inwolucję z symetrią względem środka BC , to otrzymamy inwolucję, która jest stała w B, C, ∞_{BC} . Dostajemy zatem, że nasza inwolucja jest tą symetrią i stąd teza.

Rozwiązanie 3. Niech ω oznacza okrąg wpisany w trójkąt BCX . Proste kąty pokazują, że środek tego okręgu jest środkiem łuku BC okręgu opisanego na ABC , który nie zawiera A . Niech M oznacza środek boku BC . Zastosujmy DDIT dla czworokąta zdegenerowanego $BM CX$, punktu A oraz stożkowej ω . Dostajemy inwolucję, która zamienia AB z AC , AM z AX oraz styczne z A do ω . Skoro środek ω leży na dwusiecznej kąta BAC , to styczne z A są symetryczne względem dwusiecznej kąta BAC . Postępując analogicznie jak w rozwiązaniu zadania 1, dostajemy, że nasza inwolucja to symetria względem dwusiecznej kąta BAC i stąd teza.

Rozwiązanie 4. Mamy $\angle ICJ = \angle LCK = 90^\circ$, więc proste CJ, CL są izogonalne w kącie ICK . Z DDIT dostajemy, że CA oraz CX również są izogonalne w tym kącie, gdzie X oznacza przecięcie IL z JK . Wystarczy policzyć na kątach, że CA oraz dwusieczna kąta BCD są symetryczne względem dwusiecznej kąta ICK .

Rozwiązanie 5. Oznaczmy punkt przecięcia stycznych przez O oraz niech E to punkt styczności okręgu k_a z BC . Stosując DDIT dla czworokąta $ABEC$, punktu O oraz stożkowej k_a , dostajemy inwolucję zamieniającą OB z OC , OA z OE oraz OP z OQ . Niech D oznacza przecięcie OA z BC . Rzutując naszą inwolucję na BC otrzymujemy inwolucję zamieniającą B z C , D z E oraz P z Q . Wystarczy pokazać, że AD oraz AE są izogonalne w kącie BAC . Niech ω oznacza okrąg wpisany w ABC . Zauważmy, że O jest środkiem dodatniej jednokładności przeprowadzającej k na k_a oraz A jest środkiem dodatniej jednokładności przeprowadzającej k_a na ω . W takim razie środek dodatniej jednokładności przeprowadzającej ω na k , czyli sprzężenie izogonalne punktu Nagela, leży na prostej AO . W takim razie AO jest sprzężona izogonalnie do AE , co chcieliśmy pokazać.

Rozwiązanie 6. Oznaczmy przez R przecięcie XY_1 z YX_1 . Z DDIT dostajemy inwolucję usalającą AM oraz zamieniającą AX_1 z AY_1 , $A\infty_{BC}$ z AR . Pokażemy teraz, że $AR \parallel BC$. Niech K, L, D oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego do AB, AC, BC odpowiednio. Niech dodatkowo S oznacza przecięcie AM z KL . Wtedy $SD \perp BC$, co można policzyć obliczając stosunek KS/SL za pomocą twierdzenia sinusów w trójkątach AKS, ALS, DKS, DLS . W takim razie X_1Y_1 również przechodzi przez S i RS jest dwusieczną kąta XX_1 . Z twierdzenia o dwusiecznej mamy $RX/R_Y = XS/S_Y = XA/A_Y$, gdyż $(A, X; S, Y) = -1$ (biegunowa A , czyli KL przechodzi przez S). Z drugiej strony $RX/R_Y = RX/R_{X_1}$, zatem z twierdzenia Talesa mamy rządany równoległość. Teraz nasza inwolucja zachowuje kierunek AM , kierunek BC oraz zamienia P z Q . Rzutując tę inwolucję na BC dostajemy, że zachowuje ona M oraz punkt w nieskończoności, czyli jest symetrią względem M .

Rozwiązanie 7. Oznaczmy przez S punkt styczności okręgu wpisanego do CD , przez N środek KL oraz przez R przecięcie CD z KL . teza jest równoważna z $RX \cdot RY = RD \cdot RS$, jednak prawa strona jest równa $RK \cdot RN$ ($\angle MDK = \angle KNM = 90^\circ$). W takim razie teza jest równoważna z istnieniem inwolucji na prostej KL , która zamienia R z nieskończonością, K z N oraz X z Y . Na mocy DDIT dostajemy inwolucję zamieniającą MX na MY , MA na MS oraz MR na MC . Rzutując

tę inwolucję przez M na KL dostajemy, że jest to prawie nasza szukana inwolucja. Aby skończyć zadanie, wystarczy pokazać, że M, S, K leżą na jednej prostej. Zauważmy jednak, że są to rzuty środka okręgu wpisanego na boki trójkąta BCD . Skoro jednak B to odbicie C względem dwusiecznej kąta DAC , to środek tego okręgu leży na okręgu opisanym na BCD i nasza współliniowość wynika z twierdzenia o prostej Simsona.

Rozwiązanie 8. Niech D oznacza punkt styczności okręgu wpisanego do BC oraz T punkt styczności okręgu A -dowpisanego do okręgu opisanego na ABC . Niech ponadto S oznacza przecięcie AM z BC . Z DDIT daje nam inwolucję, która po zrzutowaniu na BC zamienia B z C , D z S oraz X_1 z X_2 . Korzystając z faktu, że TD przechodzi przez odbicie A względem symetralnej BC , łatwo policzyć na kątach, że M, T, S, D leżą na jednym okręgu. W takim razie nasza inwolucja to inwersja o środku w przecięciu MT z BC . W takim razie również punkty M, T, X_1, X_2 leżą na jednym okręgu.