

Małe Twierdzenie Fermata

Antoni Łuczak

Styczeń 2024

Teoria

Definicja 1 Dana jest liczba naturalna n oraz liczba całkowita a . Wówczas liczby a, n są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taka liczba całkowita b , że

$$ab \equiv 1 \pmod{n}.$$

Liczbę b nazywamy odwrotnością a modulo n . w szczególności gdy n jest liczbą pierwszą, to wszystkie liczby niepodzielne przez n mają odwrotność.

Twierdzenie 1 (Małe Twierdzenie Fermata) Dana jest liczba całkowita a oraz liczba pierwsza p . Wtedy

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Zadania

Zadanie 1 Dana jest liczba całkowita n względnie pierwsza z 35. Udowodnić, że $35 \mid n^{12} - 1$.

Zadanie 2 Dana jest liczba pierwsza różna od 2, 5. Udowodnij, że posiada ona wielokrotność postaci $11 \dots 1$.

Zadanie 3 Dana jest liczba całkowita a oraz różne liczby pierwsze p, q . Udowodnić, że

$$a^{pq-p-q+2} \equiv a \pmod{pq}.$$

Zadanie 4 Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$ zachodzi

$$1^p + 2^p + \dots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zadanie 5 Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n , że

$$p \mid 2^n - n.$$

Zadanie 6 Dana jest liczba pierwsza p oraz liczby całkowite a, b . Udowodnić, że jeśli $p \mid a^p - b^p$, to $p^2 \mid a^p - b^p$.

Zadanie 7 Udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje taka liczba naturalna n , że

$$2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}$$

Zadanie 8 Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz liczba całkowita a . Udowodnić, że jeśli $p \mid a^2 + 1$, to p daje resztę 1 z dzielenia przez 4.

Zadanie 9 Dana jest liczba pierwsza p dająca resztę 2 z dzielenia przez 3 oraz liczby całkowite a, b . Udowodnić, że jeśli $p \mid a^2 + ab + b^2$, to $p \mid a, b$.