Trójliść (aka Kleiner/Puma)

Antoni Łuczak

Grudzień 2023

Zadania Proste

1. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg opisany na trójkącie ABI przecina BC po raz drugi w punkcie D. Okrąg opisany na trójkącie AIC przecina BC po raz drugi w punkcie E. Udowodnij, że I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADE.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt M jest środkiem boku AB, natomiast N to drugie przecięcie prostej AI z okręgiem opisanym na ABC. Załóżmy, że $\sphericalangle BIM = 90°$. Wyznaczyć stosunek $AI : IN$.

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste BI, CI przecinają okrąg opisany na ABC odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że prosta PQ jest symetralną odcinka AI.

4. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I. Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q, różnych od A i B. Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to $\sphericalangle CIF = 90°$.

Zadania Trochę Trudniejsze

5. Punkt H jest ortocentrum ABC. Proste AH, BH, CH przecinają BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez środek odcinka AH.

6. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Niech J_a, J_b i J_c będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, CDE. Prosta l_a jest symetryczna do prostej BC względem prostej J_bJ_c, analogicznie określamy proste l_b i l_c. Dowieść, że proste l_a, l_b, l_c przecinają się w jednym punkcie.

7. Niech K i L będą punktami na łukach odpowiednio BC i BA okręgu opisanego na trójkącie ABC tak, że $KL||AC$. Udowodnij, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCK i ABL są równoodległe od środka łuku AC, zawierającego punkt B, okręgu opisanego na trójkącie ABC.

8. Trójkąt ABC spełnia $\sphericalangle BAC = 60°$. Niech O, I, H oznaczają odpowiednio środek okręgu opisanego, środek okręgu wpisanego oraz ortocentrum trójkąta ABC. Udowodnij, że $OI = IH$.

9. (IMO 2006-1) Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC punkt P leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Wykazać, że $AP \geqslant AI$ oraz że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy $P = I$.

10. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

Ćwiczenia Po Kółku

1. Punkty B, C leżą na okręgu Ω. Punkty A_1, A_2 leżą na tym samym łuku BC okręgu Ω oraz spełniają $A_1A_2 = 1$. Niech I_1, I_2 oznaczają odpowiednio środki okręgów wpisanych w A_1BC, A_2BC. Udowodnij, że długość odcinka I_1I_2 nie zależy od wyboru punktów A_1, A_2.

2. Trójkąt ABC, w którym $AB < AC$, jest wpisany w okrąg Ω. Dwusieczne kątów CBA, ACB przecinają się w I oraz przecinają Ω po raz drugi odpowiednio w punktach P, Q. Niech N oznacza środek łuku BAC okręgu Ω. Udowodnij, że

1. $AN||PQ$
2. $NPIQ$ jest równoległobokiem oraz wywnioskuj stąd, że NI przechodzi przez środek PQ.
3. Niech I_B, I_C oznaczają odpowiednio środki okręgów $B-$dopisanego oraz $C-$dopisanego trójkąta ABC. Udowodnij, że punkty B, C, I_B, I_C leżą na okręgu o środku N.
4. * Wywnioskuj z poprzednich podpunktów, że $\sphericalangle ANI = \sphericalangle IMB$, gdzie M to środek BC.

3. W konfiguracji z zadania 7, udowodnij, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCK, ABL, punkt B oraz środek łuku ABC leżą na jednym okręgu.

4. Wysokości BE, CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Niech M oznacza środek odcinka BC. Dodatkowo, niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt MEF. Udowodnij, że $\sphericalangle AIH = 90°$.