Funkcje arytmetyczne

Antoni Łuczak

26 lipca 2024

Teoria

Definicja 1 *Funkcją arytmetyczną nazywamy dowolną funkcję* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definicja 2 *Mówimy, że funkcja arytmetyczna* f *jest multiplikatywna, jeśli dla dowolnych względnie pierwszych liczb naturalnych* a, b *zachodzi* $f(ab) = f(a)f(b)$.

Definicja 3 *Zdefiniujmy następujące funkcje*

- $id(x) = x$
- $\mathbb{1}(x) = 1$ *dla każdego* x.
- $\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases}$
- $\sigma_k(x) =$ *suma* k*-tych potęg dzielników* x.
- $\tau = \sigma_0$.
- $\Omega(x) =$ *liczba dzielników pierwszych* x *z powtórzeniami.*
- $\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } p^2 \mid x \\ (-1)^{\Omega(x)} & \text{inaczej} \end{cases}$
- $\lambda(x) = (-1)^{\Omega(x)}$

Ćwiczenie 1 *Udowodnij, że powyższe funkcje (poza* Ω*) są multiplikatywne.*

Definicja 4 *Dla dwóch funkcji arytmetycznych* f, g *definiujemy Splot Dirichleta*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Twierdzenie 1 *Jeżeli funkcje* f, g *są multiplikatywne, to* $f * g$ *również jest multiplikatywna.*

Ćwiczenie 2 *Pokaż, że zbiór wszystkich funkcji arytmetycznych wraz ze splotem tworzy grupę przemienną, której zerem jest* δ.

Ćwiczenie 3 *Pokaż, że* $\mathbb{1} * \mu = \delta$.

Twierdzenie 2 *(Inwersja Mobiusa) Dane są funkcje arytmetyczne* f, F *spełniające*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Wtedy

$$f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Ćwiczenie 4 *Udowodnij multiplikatywną wersję Inwersji Mobiusa: Jeżeli*

$$F(n) = \prod_{d|n} f(d)$$

to

$$f(n) = \prod_{d|n} f(d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$$

Zadania

Zadanie 1 *Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej* n *zachodzi*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Zadanie 2 *Udowodnij, że*

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d)\right)^2$$

Zadanie 3 *(IMO shortlist 1989) Ciąg* (a_n) *spełnia zależność*

$$\sum_{d|n} a_d = 2^n.$$

Pokaż, że $n \mid a_n$.

Zadanie 4 *Dla* $j \in \{1, 3\}$ *definiujemy*

$$f_j(n) = \sum_{d|n,\ d \equiv_4 j} d.$$

Udowodnij, że dla dowolnego naturalnego n, $f_1(n) \neq f_3(n)$.

Zadanie 5 *Dana jest funkcja arytmetyczna* f. *Udowodnij, że*

$$\sum_{k=1}^{n} f(NWD(k, n)) = (f * \varphi)(n).$$

Zadanie 6 *Dana jest liczba bezkwadratowa N i pewna liczba pierwsza p. Marek napisał na tablicy wszystkie liczby od 1 do N^p. Następnie każdą z tych liczb zmazał i zastąpił jej największym wspólnym dzielnikiem z N^p. Pokaż, że suma liczb na tablicy daje resztę N z dzielenia przez p.*

Zadanie 7 *Dane są funkcje arytmetyczne g, h. Niech $f = g * h$ oraz $G(n) = \sum_{k=1}^{n} g(k)$. Udowodnij, że*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} h(k) G\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

Zadanie 8 *Udowodnij, że wartość oczekiwana sumy dzielników liczby $n \in \{1, \ldots, N\}$ jest mniejsza niż N.*

Zadanie 9 *(72 OM, finał) Dana jest dodatnia liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą k najmniejszymi liczbami pierwszymi i niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, \ldots, p_k$.*

Zadanie 10 *Dana jest liczba naturalna N. Niech $f(N)$ oznacza liczbę par uporządkowanych liczb naturalnych (a, b) takich, że*

$$\frac{ab}{a+b}$$

jest całkowite i jest dzielnikiem N. Udowodnij, że $f(N)$ jest kwadratem.

Zadanie 11 *(Bułgaria 1989) Wyznacz*

$$\sum_{n=1}^{1989} \lambda(n) \left\lfloor \frac{1989}{n} \right\rfloor$$

Zadanie 12 *Udowodnij, że wielomiany cyklotomiczne mają współczynniki całkowite.*