Nierówności w Teorii Liczb

Antoni Łuczak

Poręba Wielka, Listopad 2023

Podstawowe techniki

Fakcik 1: Jeżeli $a, b \neq 0$ są liczbami całkowitymi oraz $a \mid b$, to $|a| \leqslant |b|$.

Fakcik 2: Jeżeli a, b są liczbami całkowitymi oraz $a < b$, to $a \leqslant b - 1$.

Zadania:

* 1. Niech a, b będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $a + b \mid ab$. Wykazać, że

$$\mathrm{NWD}(a, b) \geqslant \sqrt{a+b}.$$

* 2. Niech x, y, z będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$$

jest całkowita. Wykazać, że $\mathrm{NWD}(x, y, z) \leqslant \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.

* 3. Rozwiązać równanie

$$a + b + c = abc$$

w dodatnich liczbach całkowitych.

* 4. (55 OM 2-1) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, mające dokładnie $\sqrt{n}$ dzielników dodatnich.

** 5. Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi oraz p, q takimi różnymi liczbami pierwszymi, że liczba $aq - 1$ jest podzielna przez p oraz liczba $bp - 1$ jest podzielna przez q. Wykazać, że

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} > 1$$

** 6. (60 OM 2-1) Dane są takie liczby całkowite a i b, że $a > b > 1$ oraz liczba $ab + 1$ jest podzielna przez $a + b$, zaś liczba $ab - 1$ jest podzielna przez $a - b$. Wykazać, że $a < b\sqrt{3}$.

** 7. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b

$$\left|a\sqrt{2} - b\right| > \frac{1}{2(a+b)}.$$

*** 8. Liczby d', d są dzielnikami pewnej dodatniej liczby całkowitej n, przy czym $d' > d$. Wykazać, że $d' > d + \frac{d^2}{n}$

**** 9. (57 OM 2-1) Liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$a^2 + b^2 = c^2,\ x^2 + y^2 = z^2$$

oraz nierówności

$$|x - a| \leqslant 1,\ |y - b| \leqslant 1.$$

Wykazać, że zbiory $\{a, b\}$ oraz $\{x, y\}$ są równe.

Wstawianie między potęgi

Fakcik 3: Jeżeli $a^k < n < (a+1)^k$ dla pewnej liczby całkowitej a oraz dodatniej liczby całkowitej k, to n nie może być $k-$tą potęgą liczby całkowitej.

Zadania:

* 10. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, że $a^2 + 2b + 1, b^2 + 2a + 1$ są kwadratami liczb całkowitych. Udowodnij, że $a = b$.

** 11. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, dla których $a^3 + 6ab + 1, b^3 + 6ab + 1$ są sześcianami liczb całkowitych.

** 12. (58 OM 1-2) Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (k, m), dla których każda z liczb

$$k^2 + 4m,\ m^2 + 5k$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

** 13. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite k, że

$$x^2 + kx + 1$$

jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnego całkowitego x.

*** 14. (64 OM 3-1) Rozwiązać równanie

$$x^4 + y = x^3 + y^2$$

w liczbach całkowitych x, y.

***** 15. Znaleźć wszystkie takie pary liczb całkowitych $a, b > 1$, że $a \mid b + 1$ oraz $b \mid a^3 - 1$.

Rozwiązania

1. Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$ oraz $a = dx, b = dy$. Mamy

$$d(x+y) = a+b \mid ab = d^2xy \implies x+y \mid dxy.$$

Liczby x, y są z definicji względnie pierwsze. To oznacza, że $x+y$ jest względnie pierwsze z x oraz y. W takim razie $x+y \not| \; xy$, czyli $x+y \mid d \implies a+b \mid d^2 \implies a+b \leqslant d^2 \implies \sqrt{a+b} \leqslant d$

2. Zauważmy, że

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x} = \frac{(x+1)zx + (y+1)xy + (z+1)yz}{xyz} = \frac{(x^2z + y^2x + z^2y) + xy + yz + zx}{xyz}.$$

Zauważmy, że jeśli $d = \mathrm{NWD}(x,y,z)$, to

$$d^3 \mid xyz,\ x^2z,\ y^2x,\ z^2y,$$

czyli $d^3 \mid xy+yz+zx \implies d^3 \leqslant xy+yz+zx \implies d \leqslant \sqrt[3]{xy+yz+zx}$.

3. Niech $a = x+1,\ b = y+1,\ c = z+1$. Mamy

$$x+y+z+3 = xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1 \implies 2 = xyz+xy+yz+zx.$$

Wszystkie liczby po prawej stronie ostatniej równości są nieujemne, zatem co najmniej dwie z nich są równe 0. W szczególności jedna z liczb x, y, z musi być zerem, bez straty ogólności niech będzie to z. Mamy $2 = xy$, zatem $x = 1,\ y = 2$ lub $x = 2,\ y = 1$. Bez straty ogólności niech $x = 1,\ y = 2$. Wtedy $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ i widać, że ta trójka spełnia warunki zadania, zatem każda permutacja trójki $(1,2,3)$ jest rozwiązaniem.

5. Zauważmy, że liczba $aq+bp-1$ jest podzielna przez pq. To oznacza, że

$$aq+bp-1 \geqslant pq \implies \frac{a}{p} + \frac{b}{q} - \frac{1}{pq} \geqslant 1 \implies \frac{a}{p} + \frac{b}{q} > 1.$$

7. Przekształćmy równoważnie tezę w następujący sposób

$$\left|a\sqrt{2} - b\right| > \frac{1}{2(a+b)} \iff \left|2a^2 - b^2\right| > \frac{a\sqrt{2}+b}{2(a+b)}$$

Wystarczy teraz zauważyć, że równanie $2a^2 = b^2$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich, zatem

$$|2a^2 - b^2| \geqslant 1$$

oraz

$$a\sqrt{2} + b < \sqrt{2}(a+b) < 2(a+b) \implies \frac{a\sqrt{2}+b}{2(a+b)} < 1,$$

zatem nasza nierówność jest spełniona.

8. Niech

$$x = \frac{d'}{\mathrm{NWD}(d',d)},\ y = \frac{d}{\mathrm{NWD}(d',d)},\ m = \frac{n}{\mathrm{NWD}(d',d)}.$$

Mamy wtedy $x \perp y,\ x > y$ oraz chcemy pokazać, że $x > y + \frac{y^2}{m}$. Skoro $x \perp y$, to możemy zapisać $m = xyk$ dla pewnego całkowitego k. Nasza teza jest równoważna wtedy temu, że

$$x > y + \frac{y}{kx} \iff \frac{x(x-y)}{y} > \frac{1}{k}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że $x^2 - xy > y \iff y < \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. Jednak skoro $x > y$, to $x - 1 \geqslant y \implies y < x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

10. Załóżmy, że $a \neq b$ oraz bez straty ogólności niech $a < b$. Mamy

$$b^2 < b^2 + 2a + 1 < b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2,$$

co oczywiście nie jest możliwe jeśli b^2+2a+1 jest kwadratem.

11. Jeżeli $a=b$, to

$$a^3 < a^3+6a^2+1 < a^3+6a^2+12a+8=(a+2)^3.$$

Musimy zatem mieć $a^3+6a^2+1=(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1 \implies 3a^2=3a \implies a=1$. Widzimy, że para $(1,1)$ spełnia warunki zadania. Załóżmy teraz bez straty ogólności, że $a>b$. Podobnie mamy

$$a^3 < a^3+6ab+1 < a^3+6a^2+1 < (a+2)^3,$$

czyli $a^3+6ab+1=a^3+3a^2+3a+1 \implies 6ab=3a^2+3a \implies 2b=a+1$. Wiemy, że liczba $b^3+6ab+1=b^3+6(2b-1)b+1=b^3+12b^2-6b+1$ jest sześcianem liczby całkowitej. Zauważmy jednak, że

$$b^3 < b^3+12b^2-6b+1 < b^3+12b^2+48b+64=(b+4)^3.$$

To oznacza, że liczba $x=b^3+12b^2-6b+1$ jest równa $(b+1)^3,(b+2)^3$, lub $(b+3)^3$. Zauważmy jednak, że liczba x daje resztę 1 z dzielenia przez b, natomiast liczby $(b+1)^3,(b+2)^3,(b+3)^3$ dają reszty 1,8,27 z dzielenia przez b. W takim razie jeśli $x=(b+2)^3$ lub $(b+3)^3$, to b musi być dzielnikiem 7 lub 26. Łatwo sprawdzić, że wtedy x nie jest sześcianem. Pozostaje zatem

$$b^3+12b^2-6b+1=b^3+3b^2+3b+1 \implies 9b^2=9b \implies b=1 \implies a=1$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $a>b$.

13. Bez straty ogólności niech k będzie nieujemne (zawsze możemy zmienić znak x). Mamy

$$\left(x+\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil\right)^2 = x^2+2\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil^2 \geqslant x^2+kx+1,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $k=2$. Zauważmy jednak, że dla $x>\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor^2$ mamy

$$x^2+kx+1 > x^2+(k-1)x+\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor^2 \geqslant \left(x+\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor\right)^2.$$

Mamy jednak, że $\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor,\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$ są kolejnymi liczbami całkowitymi, zatem $k=2$ i istotnie taka liczba spełnia warunki zadania. Wcześniej założyliśmy, że k jest dodatnie, zatem rozwiązaniami są $k=2,-2$.

15. Dla pewnych liczb całkowitych dodatnich k,l mamy

$$b+1=ak,\ a^3-1=bl \implies a^3-1=l(ak-1)=akl-l.$$

Z ostatniej równości wynika, że l daje resztę 1 z dzielenia przez a. W takim razie dla pewnego nieujemnego całkowitego m mamy $l=am+1$. Wstawiając to do wcześniejszej równości mamy

$$a^3-1=(am+1)(ak-1)=a^2mk-am+ak-1 \implies a^2=amk-m+k.$$

Aby wielomian $x^2-xmk+m-k$ miał pierwiastek całkowity, jego wyróżnik musi być kwadratem. To oznacza, że

$$m^2k^2-4m+4k$$

jest kwadratem liczby całkowitej. Jeżeli $m=k$, to $a=mk=k^2 \implies b=k^3-1$. Widzimy, że dla dowolnego $n>1$ para (n^2,n^3-1) spełnia warunki zadania. Załóżmy teraz, że $k>m$. Zachodzi nierówność $m^2k^2-4m+4k>(mk)^2$, więc musimy mieć

$$m^2k^2-4m+4k \geqslant m^2k^2+2mk+1 \iff 2(m-2)(k+2)+9 \leqslant 0.$$

To oznacza, że $m=0$ lub 1. Jeżeli $m=0$, to $l=1 \implies b=a^3-1$. Widzimy, że dla dowolnego $n>1$ para (n,n^3-1) spełnia warunki zadania. Jeżeli $m=1$ oraz $k>1$, to

$$(k+1)^2 < k^2+4k-4 < (k+2)^2,$$

co nie jest możliwe. Mamy zatem $k=1, l=a+1 \implies a=b+1, a^3-1=(a-1)(a+1)=a^2-1 \implies a=1$, co również nie jest możliwe. Jeżeli $m>k$, to $m^2k^2-4m+4k<(mk)^2$, więc

$$m^2k^2-4m+4k \leqslant m^2k^2-2mk+1 \iff 2(m+2)(k-2)+7 \leqslant 0.$$

Musimy mieć $k=1 \implies b=a-1$. Widzimy, że dla każdego $n>1$ para $(n,n-1)$ spełnia warunki zadania. Finalnie jedynymi rozwiązaniami są

$$(a,b)=(n,n-1),\ (n,n^3-1),\ (n^2,n^3-1)$$

dla dowolnego całkowitego $n>1$.