Inwolucje

Antoni Łuczak

18.04.2024

Definicja 1 (Inwolucja)

Inwolucja to mapa rzutowa, która jest inwolucją. (w tym kontekście identyczności nie uznajemy za inwolucję)

Lemat 1

Inwolucja ma max 2 punkty stałe.

Lemat 2 (Inwolucja na prostej)

Każda inwolucja na prostej to branie sprzężenia harmonicznego względem pewnej ustalonej pary punktów. Jest to jednocześnie inwersja lub symetria o środku na tej prostej

Lemat 3 (Inwolucja na stożkowej)

Inwolucja na stożkowej to rzutowanie przez punkt poza stożkową.

Twierdzenie 1 (DIT)

Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w stożkową Γ oraz prosta l, która nie przechodzi przez żadne dwa wierzchołki tego czworokąta. Niech l przecina proste AB, CD, AD, BC, AC, BD oraz Γ odpowiednio w punktach $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, T_1, T_2$. Wtedy $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2), (T_1, T_2)$ są parami pewnej inwolucji na l.

Twierdzenie 2 (DDIT)

Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na stożkowej Γ. Proste AB oraz CD przecinają się w E, natomiast AD oraz BC przecinają się w F. Niech L będzie dowolnym punktem różnym od A, B, C, D, E, F. Niech s, t będą stycznymi do Γ przechodzącymi przez L. Wtedy $(LA, LC), (LB, LD), (LE, LF), (s, t)$ są parami pewnej inwolucji na pęku L.

Zadania:

1. (Lemat izogonalny) Dane są parami różne punkty A, B, C, D, O, przy czym proste OC, OD są izogonalne w kącie AOB. Udowodnij, że proste przez O oraz przecięcia AC z BD oraz AD z BC również są izogonalne w tym kącie.

2. (Jakiś bardzo stary OM) Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK \cdot AD = DL \cdot AB$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\sphericalangle DAP = \sphericalangle BAC$.

3. (xd) Udowodnij, że punkty styczności okręgu wpisanego oraz $A-$dopisanego do boku BC są symetryczne względem środka tego odcinka

4. (xd x2) Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B oraz C przecinają się w punkcie X. Udowodnij, że AX jest symedianą.

5. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. In the triangle ABC let I and J be the incenter and the excenter opposite the vertex A, respectively. In the triangle ACD let K and L be the incenter and the excenter opposite the vertex A, respectively. Show that the lines IL and JK, and the bisector of the angle BCD are concurrent.

6. (Serbia MO 2017 P6). Let k be the circumcircle of ABC and let k_a be $A-$excircle. Let the two common tangents of k, k_a cut BC in P, Q. Prove that $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$.

7. (IMO shortlist 2005 G6). Let ABC be a triangle, and M the midpoint of its side BC. Let γ be the incircle of triangle ABC. The median AM of triangle ABC intersects the incircle γ at two points X and Y . Let the lines through X and Y , parallel to BC, intersect the incircle γ again in two points X_1 and Y_1. Let the lines AX_1 and AY_1 intersect BC again at the points P and Q. Prove that $BP = CQ$.

8. (USAMO 2008) Let ABC be an acute, scalene triangle, and let M, N, and P be the midpoints of $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, and $\overline{AB}$, respectively. Let the perpendicular bisectors of $\overline{AB}$ and $\overline{AC}$ intersect ray AM in points D and E respectively, and let lines BD and CE intersect in point F, inside of triangle ABC. Prove that points A, N, F, and P all lie on one circle.

9. (68 finał zad 5) Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC, w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD i AC odpowiednio w punktach K i L. Proste styczne do ω przechodzące przez M przecinają prostą KL w punktach X i Y, przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL. Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

10. (Taiwan TST3 2014 P3). Let M be any point on the circumcircle of ABC. Suppose the tangents from M to the incircle meet BC at two points X_1 and X_2. Prove that the circumcircle of MX_1X_2 intersects the circumcircle of ABC again at the tangency point of the $A-$mixtilinear incircle.

11. (Iran TST 2015) AH is the altitude of triangle ABC and H' is the reflection of H trough the midpoint of BC. If the tangent lines to the circumcircle of ABC at B and C, intersect each other at X and the perpendicular line to XH' at H', intersects AB and AC at Y and Z respectively, prove that $\sphericalangle ZXC = \sphericalangle YXB$.