Powtórzenie przed II etapem - Geometria

Antoni Łuczak

25.01.2025

Lista tematów które będziemy przerabiać

- Kąty
- Podobieństwo
- Potęga punktu
- Jednokładność
- Jeszcze trochę stosunków
- Ghost points
- Okrąg wpisany
- Kąty 60°, 120°.
- Pola
- Nierówności geometryczne

Kąty

Zadanie 1 (73OM-3-1)

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M różnym od A. Punkty X i Y wybrano tak, że $MX \perp AB$, $BX \perp MB$, $MY \perp AC$ oraz $CY \perp MC$. Dowieść, że punkty X, D, Y leżą na jednej prostej.

Zadanie 2 (74OM-2-5)

Dany jest trójkąt ABC, przy czym $AC < BC$. Okrąg ω wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Odcinek CD przecina ω w punkcie $K \neq D$. Punkt L jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą CD. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Punkt H jest ortocentrum trójkąta KLM. Wykazać, że kąt AHK jest prosty

Podobieństwo

Zadanie 3 (Symediana)

Dany jest trójkąt ABC. Styczne do okręgu opisanego na ABC w B oraz C przecinają się w S. Niech dodatkowo M oznacza środek boku BC. Udowodnić, że $\sphericalangle BAS = \sphericalangle MAC$.

Podobieństwo

Zadanie 4 (73OM-2-2)

Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Środek tego okręgu leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S. Punkty P i Q są środkami odpowiednio boków AD i BC. Niech p będzie prostą prostopadłą do prostej AC i przechodzącą przez punkt P , q prostą prostopadłą do prostej BD i przechodzącą przez punkt Q, zaś s prostą prostopadłą do prostej CD i przechodzącą przez punkt S. Dowieść, że proste p, q, s przecinają się w jednym punkcie.

Podobieństwo

Zadanie 5 (69OM-2-3)

Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q, przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC. Punkt S jest środkiem odcinka AQ. Wykazać, że punkty A, B, R i S leżą na jednym okręgu.

Podobieństwo

Zadanie 6

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Niech M oznacza środek boku BC, N środek łuku BAC okręgu opisanego na ABC oraz I środek okręgu wpisanego w ABC. Udowodnić, że $\sphericalangle IMB = \sphericalangle ANI$.

Potęga punktu

Zadanie 7 (72OM-2-2)

Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D. Wykazać, że $AO = OC$.

Potęga punktu

Zadanie 8

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB, AC > BC$. Punkty D, E leżą na AB, AC odpowiednio, przy czym $BD = BC = CE$. Udowodnić, że prosta DE jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środek okręgu wpisanego oraz opisanego na ABC.

Potęga punktu

Zadanie 9 (ISL)

Dany jest trójkąt ABC oraz punkty P, Q na bokach AB, AC. Niech K, L, M oznaczają środki odcinków BQ, CP oraz PQ odpowiednio. Załóżmy, że okrąg opisany na KLM jest styczny do PQ. Udowodnić, że $OP = OQ$, gdzie O to środek okręgu opisanego na ABC.

Jednokładność

Zadanie 10 (ISL 2002 G7)

Dany jest trójkąt ABC. Okrąg wpisany w ten trójkąt ma środek I oraz jest styczny do BC w D. Niech N oznacz środek wysokości opuszczonej z wierzchołka A oraz niech prosta DN przecina okrąg wpisany po raz drugi w punkcie K. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie BKC jest styczny w K do okręgu wpisanego

Zadanie 11 (Mszana 2023)

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB > AC$. Punkt Q leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, przy czym $\sphericalangle AQI = 90^\circ$. Proste AQ i BC przecinają się w punkcie P . Prosta CI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie w punkcie $K \neq C$. Udowodnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie QIC leży na prostej KP .

Jeszcze trochę stosunków

Zadanie 12

Dany jest trójkąt ABC. Okrąg ω leży wewnątrz trójkąta, jest styczny do boków AB, AC w punktach D, E oraz nie jest styczny do BC. Niech Ω oznacza okrąg przechodzący przez B, C oraz styczny zewnętrznie do ω w P. Udowodnić, że proste DE, BC oraz dwusieczna zewnętrzna kąta BPC przecinają się w jednym punkcie.

Ghost points

Zadanie 13

Punkt P leży wewnatrz kwadratu $ABCD$ i spełnia

$$\sphericalangle PDC = \sphericalangle DCP = 15^\circ.$$

Udowodnić, że trójkąt ABP jest równoboczny.

Ghost points

Zadanie 14 (Sharky-Devil point)

okrąg o środku I jest wpisany w trójkąt ABC oraz styczny do BC w D. Niech M oznacza drugie przecięcie AI z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech MD przecina okrąg opisany na ABC po raz drugi w S. Wtedy $\sphericalangle ISA = 90^\circ$.

Okrąg wpisany

Zadanie 15 (2006 IMO P1)

Dany jest trójkąt ABC ze środkiem okręgu wpisanego I. Punkt P wewnątrz trójkąta spełnia

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Udowodnić, że $AP \geqslant AI$ oraz że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P = I$.

Okrąg wpisany

Zadanie 16 (67OM-3-6)

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB, a punkt L — w trójkąt DSC. Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL. Wykazać, że kąt BPC jest prosty

Kąty 60°, 120°

Zadanie 17 (75OM-2-2)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty przy wierzchołkach B i D mają miarę $120°$. Punkt E leży na odcinku AD, przy czym $AE \cdot BC = AB \cdot DE$. Punkt F leży na odcinku BC, przy czym $BF \cdot CD = AD \cdot FC$. Udowodnić, że proste BE i DF są równoległe.

Kąty 60°, 120°

Zadanie 18 (74OM-3-2)

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC. Punkt X leży na odcinku BC po tej samej stronie prostej AI, co punkt B. Punkt Y leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC. Spełnione są przy tym równości kątów

$$\sphericalangle AIX = \sphericalangle XYA = 120^\circ.$$

Dowieść, że prosta YI jest dwusieczną kąta XYA

Katy 60°, 120°

Zadanie 19 (63OM-2-5)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI, prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie

Pola

Zadanie 20 (68OM-2-2)

W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina BC w punkcie D. Punkty P, Q są rzutami D odpowiednio na AB oraz AC. Dowieść, że pole trójkąta APQ jest takie samo jak pole czworokąta $BPQC$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na ABC leży na PQ.

Zadanie 21 (6OM-2-4)

Wewnątrz boku BC trójkąta ABC znajdują się takie punkty D, E, że $BD < BE$. Niech p_1, p_2 oznaczają obwody trójkątów ABC, ADE odpowiednio. Udowodnić, że

$$p_1 > p_2 + 2 \cdot \min\{BD, EC\}.$$