Powtórka z Geometrii

Antoni Łuczak

25.01.2025

Zadanie 1. W trójkącie ABC dwusieczna kąta BCA przecina okrąg opisany na ABC ponownie w R, symetralną BC w P oraz symetralną AC w Q. Oznaczmy przez K środek BC oraz przez L środek AC. Udowodnić, że trójkąty RPK, RQL mają równe pola.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt M wewnątrz niego. Udowodnić, że

$$\min\{AM, BM, CM\} + AM + BM + CM < AB + BC + CA.$$

Zadanie 3. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg Γ. Punkty D, E leżą na AB, AC odpowiednio, przy czym $AD = AE$. Symetralne odcinków BD, CE przecinają krótsze łuki AB, AC odpowiednio w punktach F oraz G. Udowodnij, że proste DE, FG są równoległe.

Zadanie 4. Dany jest czworokąt cykliczny $ABCD$. Niech $E = AC \cap BD$ oraz $F = AB \cap CD$. Oznaczmy przez H_1, H_2 ortocentra trójkątów EAD oraz EBC odpowiednio. Udowodnić, że punkty F, H_1, H_2 leżą na jednej prostej.

Zadanie 5. W trójkącie ABC niech ω będzie okręgiem dopisanym naprzeciwko wierzchołka A. Niech D, E i F będą punktami, w których ω jest styczny odpowiednio do boków BC, CA i AB. Okrąg AEF przecina prostą BC w punktach P i Q. Niech M będzie środkiem odcinka AD. Udowodnij, że okrąg MPQ jest styczny do ω.

Zadanie 6. Punkty P, Q leżą na boku BC trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ oraz $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Niech M, N będą takimi punktami na AP, AQ odpowiednio, że P jest środkiem AM oraz Q jest środkiem AN. Udowodnić, że proste BM oraz CN przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zadanie 7. Punkt D leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $BD = CD$ oraz $\sphericalangle BDC = 120°$. E jest takim punktem, że trójkąt ACE jest równoboczny oraz punkty B, E leżą po przeciwnych stronach prostej AC. F jest środkiem odcinka BE. Udowodnij, że $\sphericalangle AFD = 90°$

Zadanie 8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt P oznacza spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka A, natomiast O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC. Załóżmy, że $\sphericalangle C > \sphericalangle B + 30°$. Udowodnić, że $\sphericalangle A + \sphericalangle COP < 90°$.

Zadanie 9. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkty A_1, C_1 na bokach AB, BC odpowiednio. Proste AC_1, A_1C przecinają się w P. Załóżmy, że okręgi opisane na trójkątach AA_1P, CC_1P przecinają się po raz drugi w punkcie Q. Udowodnić, że $\sphericalangle PDA = \sphericalangle QBA$.

Zadanie 10. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg oraz niech E oznacza przecięcie przekątnych tego czworokąta. Udowodnić, że prosta przechodząca przez rzuty punktu E na boki AB, CD jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki boków AD, BC.

Zadanie 11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 60°$ oraz $AB \neq AC$. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w ABC, natomiast M środek łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Prosta MI oraz dwusieczna zewnętrzna kąta BIC przecinają BC w punktach D, E odpowiednio. Udowodnić, że prosta ME przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie DIE.

Zadanie 12. Niech C, D będą różnymi punktami na półokręgu o średnicy AB. Oznaczmy przez E, F, G środki odcinków AC, CD, DB odpowiednio. Prosta prostopadła do AF przechodząca przez E przecina styczną do półokręgu w A w punkcie M. Prosta prostopadła do BF przechodząca przez G przecina styczną do półokręgu w B w punkcie N. Udowodnić, że proste MN, CD są równoległe.

Zadanie 13. Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC leżą punkty N, K, L odpowiednio, przy czym $AL = BK$ oraz CN jest dwusieczną kąta ACB. Odcinki AK, BL przecinają się w punkcie P. Oznaczmy przez I oraz J środki okręgów wpisanych w trójkąty APL oraz BPK odpowiednio. Niech Q oznacza przecięcie prostych CN, IJ. Udowodnić, że $IP = JQ$.

Zadanie 14. Dany jest trójkąt ABC. Punkt P leży wewnątrz trójkąta i spełnia $BP = CP$. Niech M oznacza środek łuku BAC okręgu opisanego na ABC. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty ABP, ACP, punkt A oraz punkt M leżą na jednym okręgu.

Zadanie 15. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Symetralne odcinków AB, CD przecinają się w Y. Niech X będzie takim punktem wewnątrz czworokąta, że $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX < 90°$ oraz $\sphericalangle DAX = \sphericalangle CBX < 90°$. Udowodnić, że $\sphericalangle AYB = 2\sphericalangle ADX$.