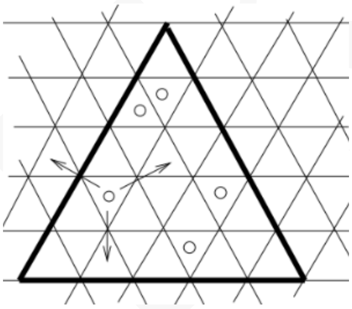
Zadania powtórkowe z Kombi

12.01.2025

Zadania są ułożone +/- rosnąco trudnościowo

Zadanie 1. Na tablicy napisano 100 parami różnych liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Następnie pod każdą liczbą a_i napisano liczbę b_i, otrzymaną przez dodanie do a_i największego wspólnego dzielnika pozostałych 99 liczb. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba różnych wartości wśród liczb $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?

Zadanie 2. Na nieskończonej kartce papieru podzielonej na trójkąty znajduje się n pcheł. Początkowo każda pchła znajduje się w innym małym trójkącie, przy czym wszystkie te trójkąty mieszczą się w pewnym trójkącie równobocznym składającym się z n^2 małych trójkątów (patrz rysunek dla przykładowej konfiguracji początkowej z $n = 5$). Raz na sekundę każda pchła przeskakuje ze swojego trójkąta do jednego z trzech sąsiednich małych trójkątów, zgodnie z regułami pokazanymi na rysunku. Dla których dodatnich liczb całkowitych n istnieje początkowa konfiguracja, taka że po skończonej liczbie skoków wszystkie n pcheł mogą spotkać się w jednym małym trójkącie?



Zadanie 3. Czy istnieje zbiór S 100 punktów na płaszczyźnie, taki że środek masy dowolnych 10 punktów w S jest również punktem należącym do S?

Zadanie 4. Janek i Tomek grają w grę na szachownicy $n \times n$. Początkowo cała plansza jest biała, z wyjątkiem narożnego pola — ono jest czarne i stoi na nim wieża. Gracze wykonują ruchy na przemian. W każdym ruchu gracz przesuwa wieżę poziomo lub pionowo, a wszystkie pola, przez które wieża przechodzi (włącznie z polem docelowym), są zamalowywane na czarno. Wieża nie może przechodzić przez czarne pola ani się na nich zatrzymywać. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu; pierwszy ruch wykonuje Janek. Kto wygra przy optymalnej grze obu graczy?

Zadanie 5. W tabeli o wymiarach $100 \times n$ w każdym wierszu znajdują się liczby od 1 do 100 w pewnej kolejności (bez powtórzeń). Tabela ma n wierszy i 100 kolumn. Dozwolona operacja polega na zamianie miejscami w wierszu dwóch liczb różniących się o 1, pod warunkiem że nie sąsiadują one ze sobą. Okazało się, że za pomocą takich operacji nie można uzyskać dwóch identycznych wierszy. Jaką największą wartość może przyjąć n?

Zadanie 6. Dwie osoby grają w następującą grę z liczbami całkowitymi. Liczba początkowa to 2025^{2025}. Gracze wykonują ruchy na zmianę. Każdy ruch polega na odjęciu liczby całkowitej z zakresu od 1 do 2025 (włącznie) lub podzieleniu przez 2025, zaokrąglając w dół do najbliższej liczby całkowitej, jeśli to konieczne. Gracz, który jako pierwszy uzyska liczbę całkowitą niedodatnią, wygrywa. Który gracz ma strategię wygrywającą?

Zadanie 7. Na półce znajduje się n tomów książek, ponumerowanych od 1 do n w pewnej kolejności. Bibliotekarz chce ustawić je w poprawnym porządku, stosując następującą metodę: Bibliotekarz wybiera tom, który znajduje się zbyt daleko na prawo, np. tom o numerze k, wyciąga go i umieszcza na k-tej pozycji. Na przykład, jeśli książki są ustawione w kolejności $1, 3, 2, 4$, bibliotekarz może wyjąć tom 2 i umieścić go na drugiej pozycji. Po tej operacji kolejność stanie się $1, 2, 3, 4$, czyli poprawna. Pokaż, że jeśli proces ten jest powtarzany, to niezależnie od wyboru tomów, wszystkie książki ostatecznie znajdą się w poprawnej kolejności, oraz policz ile maksymalnie takich akcji można wykonać.

Zadanie 8. Dana jest tablica $m \times n$, w której każda komórka zawiera liczbę $+1$ lub -1. Wiadomo, że początkowo dokładnie jedna komórka zawiera -1, a wszystkie pozostałe wartości to $+1$. Podczas ruchu można wybrać dowolną komórkę zawierającą -1, zamienić to -1 na 0 i jednocześnie pomnożyć wszystkie liczby w sąsiednich komórkach przez -1 (przyjmujemy, że dwie komórki sąsiadują, jeśli mają wspólną krawędź). Znajdź wszystkie pary (m, n), dla których możliwe jest uzyskanie tablicy zawierającej wyłącznie zera, niezależnie od początkowego położenia -1.

Zadanie 9. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnij, że liczba prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych i dokładnie jeden inny punkt o całkowitych współrzędnych (x, y), gdzie $0 \leqslant x, y \leqslant n$, jest co najmniej $\frac{n^2}{4}$.

Zadanie 10. Rozważamy grę dla dwóch graczy rozgrywaną na $n \geqslant 3$ punktach, przy czym żadne trzy punkty nie są współliniowe. Każdy ruch polega na wybraniu dwóch punktów i narysowaniu nowego odcinka łączącego je. Przegrywa ten gracz, który jako pierwszy narysuje odcinek tworzący cykl o nieparzystej długości. (Cykl musi składać się wyłącznie z początkowych n punktów, więc jego wierzchołkami nie mogą być punkty przecięć wcześniej narysowanych odcinków.) Znajdź wszystkie wartości n, dla których gracz rozpoczynający grę ma strategię wygrywającą.

Zadanie 11. Dany jest silnie spójny turniej T o $n \geqslant 4$ wierzchołkach. Udowodnij, że możemy tak ustawić wierzchołki w ciąg $v_1, v_2, \ldots, v_n$, że dla każdego i $(3 \leqslant i \leqslant n)$ podgraf T na wierzchołkach $v_1, v_2, \ldots, v_i$ jest silnie spójny.

Zadanie 12. Metryka Manhattańska między dwoma punktami (a, b) i (c, d) na płaszczyźnie jest zdefiniowana jako:

$$|a - c| + |b - d|$$

Załóżmy, że tylko n różnych odległości Manhattańskich występuje między wszystkimi parami różnych punktów pewnego zbioru punktów. Udowodnij, że w tym zbiorze jest maksymalnie $(n+1)^2$ punktów.