Powtórzenie przed II etapem - Algebra

Konstanty Smolira

18.01.2025

Lista tematów które będziemy przerabiać

- Tożsamości algebraiczne
- Nierówności
- Układy równań
- Równania funkcyjne
- Ciągi
- Wielomiany

Tożsamości algebraiczne

Warto pamiętać następujące zależności:

Fakt 1 (Różnica i suma potęg)

1. $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$
2. Dla parzystych n:

   $x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$

Fakt 2 (Tożsamość Sophie-Germain)

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + y^2)$$

Tożsamości algebraiczne

Fakt 3 (Tożsamość Brahmagupty)

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) =$$
$$= (ac - nbd)^2 + n(ad + bc)^2 = (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2$$

Powyższe tożsamości głównie przydają się w zadaniach teorioliczbowych (równaniach diofantycznych), w których rozłożenie jakiegoś wyrażenia na czynniki jest kluczowe.

Zadanie 1

Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$$

Nierówności

Twierdzenie 1 (AM-GM)

Dla $a_i \geqslant 0$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad \text{równość dla } a_i \text{ stałego}$$

Zadanie 2 (zeszłoroczny II etap)

Liczby dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równość

$$5a + 4b + 3c = 5x + 4y + 3z$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^5}{x^4} + \frac{b^4}{y^3} + \frac{c^3}{z^2} \geqslant x + y + z$$

Nierówności

Twierdzenie 2 (Średnie potęgowe)

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\alpha^{-1}} \leqslant \left(\frac{a_1^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\beta^{-1}} \quad \text{dla } \alpha < \beta, a_i \geqslant 0$$

Zadanie 3

Dla danej liczby $2 \mid n > 0$ rozważmy wielomiany postaci

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$$

o współczynnikach rzeczywistych posiadających co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Wyznaczyć minimalną wartość sumy $a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2$.

Nierówności

Twierdzenie 3 (Ciągi jednomonotoniczne)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b'_{n+1-i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b'_i$$

Gdzie a_i, $b_i \geqslant 0$, ciąg a jest niemalejący, a ciąg b' to b posortowany niemalejąco.

Zadanie 4

W trójkącie ABC boki mają długości a, b, c a opuszczone na nie wysokości – odpowiednio h_a, h_b, h_c. Wykaż

$$(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) \geqslant 18P_{ABC}$$

Układy równań – zadania

Zadanie 5

Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x^4 + y^2 + 4 = 5yz, y^4 + z^2 + 4 = 5zx, z^4 + x^2 + 4 = 5xy \end{cases}$$

Zadanie 6

Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań:

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3, b^2 = c^3 + d^3, c^2 = d^3 + e^3, \\ d^2 = e^3 + a^3, e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Równania funkcyjne

Zadanie 7

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x) \cdot f(y)$$

Zadanie 8

Funkcja f trzech zmiennych rzeczywistych spełnia dla dowolnych a, b, c, d, e zależność

$$f(a,b,c) + f(b,c,d) + f(c,d,e) + f(d,e,a) + f(e,a,b) = \\ = a + b + c + d + e$$

Pokazać, że dla dowolnego n oraz $x_1, \ldots, x_n$

$$f(x_1,x_2,x_3)+f(x_2,x_3,x_4)+\cdots+f(x_n,x_1,x_2) = x_1+x_2+\cdots+x_n$$

Ciągi

Zadanie 9

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$. Wykaż, że $a_n \in \mathbb{Z}_+$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$.

Zadanie 10

Ciąg $a_0, a_1, \ldots$ jest określony przez warunki: $a_0 = -1$ oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \cdots + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0 \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

Wykazać, że $a_n \geqslant 0$ dla $n \geqslant 1$.

Wielomiany

Definicja 1 (Stopień wielomianu)

Stopniem $\deg f$ wielomianu $f \neq 0$ nazywamy największą liczbę taką, że f ma niezerowy współczynnik przy $x^{\deg f}$.

Fakt 4 (Własności stopni)

$\deg f \cdot g = \deg f + \deg g$, $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$, $\deg f + g \leqslant \max(\deg f, \deg g)$ (dla $\deg f \neq \deg g$ zachodzi równość).

Twierdzenie 4 (Darboux dla wielomianów)

Jeśli $f \in \mathbb{R}[x]$ oraz x_1, x_2, a są takie, że $f(x_1) \leqslant a \leqslant f(x_2)$, to istnieje takie $x_0 \in [x_1, x_2]$, że $f(x_0) = a$.

Wielomiany

Twierdzenie 5 (Bezout)

Dla dowolnego wielomianu f: jeśli $f(a) = 0$, to $x - a \mid f$ (istnieje taki wielomian g, że $f(x) = (x - a)g(x)$).

Zadanie 11

Wielomian $P(x)$ spełnia $\deg P = n$ oraz $P(k) = \frac{1}{k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, 2^n$. Obliczyć $P(0)$.

Zadanie 12

Znajdź wszystkie $W \in \mathbb{R}[x]$ takie, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$, jeśli $x + y \in \mathbb{Q}$, to $W(x) + W(y) \in \mathbb{Q}$.