Zadania powtórkowe z TL

Filip Manijak

12.01.2025

Zadania są ułożone +/- rosnąco trudnościowo

Zadanie 1. Liczby naturalne a i b są dzielnikami n. Wykazać, że jeśli liczba $\frac{n}{a} + \frac{n}{b}$ jest podzielna przez a i b, to liczba n jest podzielna przez liczbę $\frac{\mathrm{NWW}_{(a,b)}^2}{\mathrm{NWD}_{(a,b)}}$.

Zadanie 2. Pokaż, że

$$n^n + (n+1)^{n+1}$$

jest liczbą złożoną dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych n.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite a i b takie, że

$$4a^2 + 9b^2 - 1$$

jest podzielne przez n.

Zadanie 4. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą taką, że $4n+1$ jest liczbą pierwszą. Udowodnij, że $4n+1$ dzieli $n^{2n} - 1$.

Zadanie 5. Czy istnieje takie 2024 różnych liczb całkowitych dodatnich takich, że suma ich kwadratów również jest kwadratem liczby całkowitej?

Zadanie 6. Dana jest liczba pierwsza $p = 4k+1$. Dla ilu liczb $1 \leqslant a \leqslant p-1$ istnieje rozwiązanie równania $x^4 \equiv_p a$?

Zadanie 7. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej $k = 3n$ zachodzi:

$$k \mid 2^{(2n-2)!} - 1$$

Zadanie 8. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Dla l (dodatniego całkowitego) oznaczamy:

$$f(l) = (4l+1)(4l+2)...(4l+4*5^n)$$

Znajdź najmniejszą liczbę l taką że f(l) ma w rozkładzie na czynniki pierwsze dokładnie 5^n piątek.

Zadanie 9. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dane są 2 ciągi różnych liczb od 0 do $p-1$: $a_1, a_2, ..., a_p$ i $b_1, b_2, ..., b_p$. Udowodnij, że istnieją takie liczby $1 \leqslant i \leqslant p$,$1 \leqslant j \leqslant p$ które spełniają:

$$a_i b_i \equiv_p a_j b_j.$$

Zadanie 10. Czy istnieje ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, ...$ taki, że suma kolejnych n wyrazów podzielna jest przez n^2.

Zadanie 11. Niech a i b to dodanie liczby rzeczywiste, takie że liczby $a-b$, a^2-b^2, a^3-b^3,.... są dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że a i b to liczby całkowite.

Zadanie 12. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieją parami względnie pierwsze liczby całkowite $k_0, k_1, \ldots, k_n$, wszystkie większe od 1, takie że

$$k_0 k_1 \cdots k_n - 1$$

jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych.

Zadanie 13. Niech n będzie liczbą naturalną i p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że $p \mid 2^{p-1} - 1$ i $p^2 \nmid 2^{p-1} - 1$, jeżeli $p \mid 2^n - 1$ i $p^2 \nmid 2^n - 1$

Zadanie 14. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p oraz dodatnie liczby całkowite (x, y) takie, że

$$x^{p-1} + y \quad \text{oraz} \quad y^{p-1} + x$$

są potęgami liczby p.

Zadanie 15. Udowodnij, że każdy zbiór $2n-1$ liczb całkowitych zawiera jakiś podzbiór n elementów, taki że jego suma jest podzielna przez n.