Zadania powtórkowe z Algebry

Konstanty Smolira

18.01.2025

Zadania są $\pm$ ułożone trudnością; zaakcentować zapewne należy "$\pm$".

Zadanie 1. Liczby dodatnie x, y, z spełniają $xyz \geqslant xy+yz+zx$. Wykaż, że $\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Zadanie 2. Znaleźć w liczbach rzeczywistych wszystkie rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = 1.1 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 2.2 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 3.3 \end{cases}$$

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych nieujemnych spełniające:

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2$$

Zadanie 4. Dla danych a, b, $c \in \mathbb{R}_+$ rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} ax + by = (x-y)^2 \\ by + cz = (y-z)^2 \\ cz + ax = (z-x)^2 \end{cases}$$

Zadanie 5. Dane są wielomiany P, Q o współczynnikach rzeczywistych takie, że równanie $P(x) = Q(x)$ nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych. Wiedząc, że $\deg P = \deg Q = 2024$ oraz współczynniki wiodące obu wielomianów są równe 1 pokazać, że $Q(x+1) = P(x-1)$ dla pewnego x.

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniające

$$a + b + c + d = 12$$

$$abcd = 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

Zadanie 7. Punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej nazwę *mieszanym*, jeśli jedna z jego współrzędnych jest wymierna, a druga niewymierna. Znaleźć wszystkie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych, których wykresy nie zawierają żadnego punktu mieszanego.

Zadanie 8. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz ciąg a_0, a_1, $\ldots$, a_n zdefiniowany przez $a_0 = \frac{1}{2}$ oraz $a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Pokazać $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

Zadanie 9. Dane są wielomiany P, Q nieparzystego stopnia takie, że

$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2).$$

Wykazać $P = Q$.

Zadanie 10. Dane jest 101 liczb rzeczywistych; wykazać, że możemy z nich wybrać dwie liczby u, v tak, że

$$100|u-v| \cdot |1-uv| \leqslant (1+u^2)(1+v^2)$$

Zadanie 11. Dana jest liczba rzeczywista c. Ciąg liczb rzeczywistych a_1, a_2, $\ldots$ jest taki, że $0 \leqslant a_i \leqslant c$ dla każdego i. Ponadto, dla każdych $i \neq j$ zachodzi

$$|a_i - a_j| \geqslant \frac{1}{i+j}$$

Wykazać, że $c \geqslant 1$.

Zadanie 12. Pokazać, że dla liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geqslant 0$$

Zadanie 13. Dany jest wielomian P stopnia $n > 1$ o współczynnikach całkowitych oraz liczba całkowita dodatnia k. Pokazać, że jest co najwyżej n liczb całkowitych t takich, że $\underbrace{P(P(\ldots P}_{k \text{ razy}}(t)\ldots)) = t$.

Zadanie 14. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$

$$f(n+1) > f(f(n))$$

Zadanie 15. Znajdź wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych dodatnich spełniających układ równań

$$\begin{cases} 2x^3 = 2y(x^2+1) - (z^2+1) \\ 2y^4 = 3z(y^2+1) - 2(x^2+1) \\ 2z^5 = 4x(z^2+1) - 3(y^2+1) \end{cases}$$