MIKO

Powtórzenie przed II etapem - Kombinatoryka

Karol Musieliński

30.01.2025

Lista tematów, które będziemy przerabiać

- Zliczanie i zasada szufladkowa
- Indukcja
- Zasada ekstremum
- Niezmienniki
- Teoria grafów
- Metoda probabilistyczna

Podstawy zliczania

1. Liczba sposobów ustawienia n elementów w kolejności
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$
2. Liczba sposobów wyboru k-elementowego podzbioru zbioru n-elementowego
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
3. Liczba sposobów wyboru k-elementowego **multizbioru** ze zbioru n-elementowego
$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Bajki kombinatoryczne, zliczanie ścieżek

Fakt 1 (Uproszczona tożsamość Vandermonde'a)

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

$\rightarrow \binom{n+m}{n}$ jako liczba ścieżek

Zadanie 1 (Ścieżki Dycka)

Policz niemalejące funkcje $f : [n] \rightarrow [n]$, takie że $f(k) \geqslant k$.

MIKO

Zliczanie – oszacowania

Zadanie 2

Dane są skończone zbiory A i B. Rozważmy

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Udowodnij, że $|A + B| \geqslant |A| + |B| - 1$.

Twierdzenie 1 (Sperner)

Niech $|A| = n$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów A, taką że żaden zbiór z $\mathcal{F}$ nie jest podzbiorem innego. Wykaż, że

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Zasada szufladkowa

Fakt 2 (Zasada szufladkowa Dirichleta)

Jeśli co najmniej $kn + 1$ obiektów rozdzielimy na n zbiorów, to w pewnym zbiorze jest co najmniej $k + 1$ elementów.

Twierdzenie 2 (Erdős-Szekeres)

Ciąg złożony z $rs + 1$ różnych liczb zawiera podciąg rosnący długości $r + 1$ lub podciąg malejący długości $s + 1$.

Zasada szufladkowa – zadania

Zadanie 3

Wybrano k różnych punktów kratowych płaszczyzny $A_1, \ldots, A_k$. Wiadomo, że środek odcinka A_iA_j nie jest punktem kratowym dla $i \neq j$. Jak duże może być k?

Zadanie 4

Wybrano pewien podzbiór A liczb naturalnych od 1 do 100. Wiadomo, że nie istnieją takie $a, b \in A$, że $2a = b$. Znaleźć największą możliwą moc A.

Kolorowanki

Zadanie 5

Mamy szachownicę 15×15 wewnątrz szachownicy 17×17. Udowodnij, że mniejszej szachownicy nie da się przykryć klockami 1×9 oraz 1×10 ułożonymi na większej szachownicy.

Zadanie 6 (LXXV OM)

Sześciokątną planszę złożoną z $6n^2$ trójkątnych pól przykryto $3n^2$ rombami. Udowodnij, że przekątna planszy przecina dokładnie n rombów.

Indukcja

Fakt 3 (Zasada indukcji)

Załóżmy, że $P(0)$ oraz $P(n) \implies P(n+1)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $P(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 7

Na płaszczyźnie narysowano n prostych, które podzieliły płaszczyznę na k obszarów. Udowodnij, że

$$k \leqslant \binom{n+1}{2} + 1.$$

Zadanie 8 (LXXII OM)

Jacek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami $1, \ldots, n$, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Jacek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją kart: wpierw zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Jacek zacznie zdejmować karty, Placek koloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko lub żółto. Udowodnić, że Placek może po kolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Jacka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.

Indukcja – zadania

Zadanie 9 (IMO 2009)

Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, zaś M będzie zbiorem $n-1$ dodatnich liczb całkowitych, przy czym M nie zawiera liczby $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Konik polny skacze wzdłuż osi liczbowej w dodatnią stronę, zaczynając w zerze i wykonując n skoków, których długościami są liczby $a_1, \ldots, a_n$ w pewnej kolejności. Udowodnić, że kolejność tę można wybrać w taki sposób, by po żadnym ze skoków konik polny nie wylądował w punkcie należącym do zbioru M.

Zasada ekstremum

Fakt 4 (Zasada ekstremum)

- Każdy niepusty podzbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy.
- Każdy skończony i niepusty podzbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy i największy.

Zasada ekstremum – zadania

Zadanie 10 (LIX OM)

W każdym polu tablicy $n \times n$ jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną tam liczbę o liczbę pól sąsiednich (bokiem), zaś liczby w sąsiednich polach zwiększamy o 1. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy z każdej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę samych zer.

Zasada ekstremum – zadania

Zadanie 11

Na płaszczyźnie jest n punktów czerwonych i n punktów niebieskich. Wykaż, że można znaleźć n rozłącznych par różnokolorowych punktów i połączyć je nieprzecinającymi się odcinkami.

Zadanie 12

Na płaszczyźnie danych jest n punktów o tej własności, że każde trzy z nich wyznaczają trójkąt o polu nie większym od 1. Udowodnij, że wszystkie dane punkty są zawarte w pewnym trójkącie o polu nie większym od 4.

Niezmienniki

Definicja 1 (Niezmiennik)

Niezmiennik to funkcja, która każdemu stanowi przypisuje jakąś wartość i ma tę własność, że wartość tej funkcji nie zmienia się, gdy wykonujemy pewne operacje, przechodząc do sąsiednich stanów.
Jeśli wartość funkcji zmienia się, ale w sposób kontrolowany, możemy ją nazwać **półniezmiennikiem.**

Niezmienniki – złoty standard

Zadanie 13 (IMO 2011, przypadek nieparzysty)

Niech S będzie zbiorem $2n + 1$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe. Wiatrakiem nazwiemy następujący proces. Na początku dana jest prosta l zawierająca jeden punkt $P \in S$. Prosta ta obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, wokół P tak długo, aż osiągnie inny punkt należący do zbioru S. Punkt ten staje się nowym środkiem obrotu i prosta dalej obraca się wokół niego, w tym samym kierunku, dopóki ponownie nie osiągnie punktu ze zbioru S. Dowieść, że punkt P oraz prosta l mogą zostać wybrane w taki sposób, że każdy punkt z S będzie środkiem obrotu nieskończenie wiele razy.

Niezmienniki – zadania

Zadanie 14 (LVIII OM)

Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n. Każda płytka jest z jednej strony biała, z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności. Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami innego koloru. Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę. Dla każdego $n \geqslant 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

Niezmienniki – zadania

Zadanie 15 (IMO 1997)

Niech liczby $x_1, \ldots, x_n$ spełniają $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$ oraz $|x_i| \leqslant \frac{1}{2}(n+1)$. Udowodnij, że istnieje taka permutacja $y_1, \ldots, y_n$ liczb $x_1, \ldots, x_n$, że

$$|1y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

MIKO

Teoria grafów

Definicja 2 (Graf)

Grafem nazywamy uporządkowaną parę $G = (V, E)$, gdzie V to zbiór wierzchołków, a E to zbiór krawędzi, czyli nieuporządkowanych par wierzchołków.

Definicja 3 (Stopień wierzchołka)

Niech $v \in V$ i $e \in E$. Jeśli $v \in e$ (krawędź e łączy wierzchołek v z jakimś innym), to mówimy, że v i e są **incydentne**. **Stopniem wierzchołka** nazywamy liczbę incydentnych do niego krawędzi i oznaczamy $\deg v$.

Teoria grafów – cd.

Lemat 1 (O uściskach dłoni)

W każdym grafie zachodzi

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Teoria grafów – cd.

Definicja 4 (Ścieżka)

Spacerem w grafie nazywamy każdy ciąg krawędzi, który *łączy* pewien ciąg wierzchołków. **Ścieżką** nazywamy taki spacer, który nie przechodzi przez żaden wierzchołek wielokrotnie.

Definicja 5 (Cykl)

Cyklem w grafie nazywamy ścieżkę, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku.

Teoria grafów - zadanie

Zadanie 16

Mamy n miast połączonych jednokierunkowymi drogami. Dla każdej pary miast A i B można dojechać z A do B lub z B do A. Wykaż, że istnieje takie miasto, z którego da się dojechać do każdego innego.

Teoria grafów – cd.

Definicja 6 (Graf dwudzielny)

Graf dwudzielny to taki, którego zbiór wierzchołków V można rozdzielić na dwa zbiory V_1 i V_2 w taki sposób, że żadna krawędź nie jest incydentna do dwóch wierzchołków z tego samego zbioru.

Lemat 2

Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma cykli nieparzystej długości.

Teoria grafów – cd.

Definicja 7 (Cykl Eulera)

Cyklem Eulera nazywamy taki cykl, który przechodzi przez wszystkie krawędzie grafu dokładnie raz.

Twierdzenie 3

Graf spójny ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki maja parzysty stopień.

Teoria grafów – cd.

Definicja 8 (Cykl Hamiltona)

Cyklem Hamiltona nazywamy taki cykl, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki grafu dokładnie raz.

Twierdzenie 4 (Ore)

Jeśli $|V| = n$ oraz $\deg v + \deg u \geqslant n$ dla każdych dwóch różnych i **niepołączonych krawędzią** $u, v \in V$, to taki graf ma cykl Hamiltona.

Cykl Eulera - zadania

Zadanie 17 (LXXIII OM)

W turnieju badmintona wzięło udział n zawodników, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Każdych dwóch zawodników zagrało ze sobą dokładnie dwa mecze, nie było remisów. Okazało się, że każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał. Wykazać, że można unieważnić dokładnie połowę wszystkich meczów w taki sposób, by również wśród ważnych meczów każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał.

Zadanie 18

W tablicy $n \times n$ wybrano k pól. Udowodnij, że da się je pokolorować na biało i czarno w taki sposób, żeby w każdym wierszu i kolumnie liczba białych i czarnych pól różniła się o co najwyżej 1.

Metoda probabilistyczna – podstawy

Fakt 5 (Union Bound)

Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są zdarzeniami losowymi oraz

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) < 1,$$

to z niezerowym prawdopodobieństwem nie zachodzi żadne z tych zdarzeń.

Fakt 6 (Liniowość wartości oczekiwanej)

Dla zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zachodzi równość

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n).$$

Metoda probabilistyczna – cd.

Fakt 7 (Wartość oczekiwana jako średnia)

Dla każdej zmiennej losowej X zachodzi

$$\min(X) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \max(X).$$

Ponadto jeśli $\min(X) < \max(X)$, to obie powyższe nierówności są ostre.

Metoda probabilistyczna – próbka

Twierdzenie 5 (Caro-Wei)

Udowodnij, że w każdym grafie $G = (V, E)$ istnieje zbiór niezależny o liczbie wierzchołków co najmniej

$$\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg v + 1}.$$

Zadanie 19

Dane są wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n \in^m$, każdy o długości 1. Udowodnij, że istnieją takie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, że

$$|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n| \geqslant \sqrt{n}.$$