MATEMATYCZNE INTERNETOWE KOŁO OLIMPIJSKIE

MIKO

ROK SZKOLNY 2023/24

wybrane materiały z kół matematycznych,
w tym zadania z rozwiązaniami.

Matematyczne Internetowe Koło Olimpijskie

Rok szkolny 2023/24

Inuni Publishing

Komitet redakcyjny
Karol Musieliński*
Michał Oprocha*
Szymon Adamek
Antoni Bryłowski
Michał Gawron
Julian Kapustka
Jan Kosiorowski
Tomasz Kossakowski
Mirosław Koziak
Mariia Kulyk
Julian Kuryłłowicz-Kaźmierczak
Oskar Kuźmik
Antoni Łuczak
Antoni Mazur
Miłosz Płatek
Robert Rośczak
Tomasz Styczeń
Bartosz Trojanowski
Adam Tutkowski
Tomasz Wiśniewski

Skład komputerowy
Antoni Łuczak*
Dominik Bysiewicz
Karol Musieliński
Michał Oprocha
Miłosz Płatek

**kierujący pracami zespołu*

Autorzy rozwiązań zadań
Szymon Adamek
Maria Bażęcka
Tomasz Czyżewski
Michał Gawron
Wiktor Jażdżyński
Julian Kapustka
Tomasz Kossakowski
Bartosz Kotwicki
Oskar Kowalski
Mirosław Koziak
Mariia Kulyk
Julian Kuryłłowicz-Kaźmierczak
Oskar Kuźmik
Karol Musieliński
Michał Oprocha
Albert Siekański
Bartosz Trojanowski
Adam Tutkowski

Autorzy rysunków
Tomasz Kossakowski*
Szymon Gross
Stanisław Jółkowski
Mirosław Koziak
Igor Popowski
Jan Sałkowski
Tomasz Styczeń
Adam Tutkowski

Projekt okładki
Wojciech Kisała
Oliwia Wysocka

Wydanie elektroniczne
ISBN 978-83-980162-1-6

Inuni Publishing
ul. Powstańców Wielkopolskich 19
89-100 Nakło nad Notecią

inuni.org.pl

mikomath.org

Partner społeczności
Jane Street

Słowo wstępne

Rok szkolny 2023/2024 był pierwszym rokiem działalności Matematycznego Internetowego Koła Olimpijskiego, w skrócie MIKO. Od samego początku MIKO wyróżniało się na tle znanych przedsięwzięć, tworząc ogólnopolską społeczność, która nie tylko łączy doświadczonych olimpijczyków, ale też stawia na dzielenie się wiedzą z mniej doświadczonymi kolegami.

U podstaw MIKO leży zasada zarazem prosta i owocna. Wyrazem głębokiego zrozumienia tematu jest umiejętność objaśnienia go innym. Fundament tej inicjatywy stanowi z kolei zasada wzajemności – każdy wnosi coś od siebie, mając świadomość, że jego wysiłek wraca do niego w postaci pracy i zaangażowania reszty społeczności. To właśnie ta nieformalna umowa i poczucie współodpowiedzialności sprawiają, że niewielki wkład jednostki współtworzy prężnie działające środowisko i przynosi nieprzeciętne efekty.

W roku szkolnym 2023/24 działały dwie grupy – „Średnia" oraz „Finał++". Zajęcia prowadzili znakomici olimpijczycy, w tym medaliści i medalistki Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, Środkowoeuropejskiej Olimpiady Matematycznej oraz Europejskiej Olimpiady Matematycznej Dziewcząt. Uczestnicy mierzyli się z zadaniami na poziomie odpowiednio drugiego etapu Olimpiady Matematycznej lub finału tejże i olimpiad międzynarodowych. W spotkaniach grupy „Finał++" regularnie brało udział około 20 osób, natomiast grupy „Średniej" – zwykle 40–60 osób.

Serdecznie zachęcamy do dołączenia do społeczności MIKO i współtworzenia jej w kolejnych latach. Od czasu utrwalonego w tej publikacji MIKO istotnie się rozwinęło – powstały nowe grupy poza matematyką obejmujące informatykę, sztuczną inteligencję oraz fizykę, a liczba członków przekroczyła już 2000.

Składamy serdeczne podziękowania wszystkim prowadzącym za ich czas, zaangażowanie i gotowość do dzielenia się wiedzą oraz doświadczeniem. Wyrazy wdzięczności kierujemy również do osób pracujących nad niniejszą publikacją – za staranność i ogrom wysiłku włożony w opracowanie i udostępnienie tych materiałów.

Mamy nadzieję, że przygotowane opracowanie stanie się rzetelnym wsparciem dla kolejnych uczniów przygotowujących się do Olimpiady Matematycznej, a także inspiracją do dalszego dojrzewania matematycznego.

Organizatorzy MIKO

Spis treści

Grupa Średnia

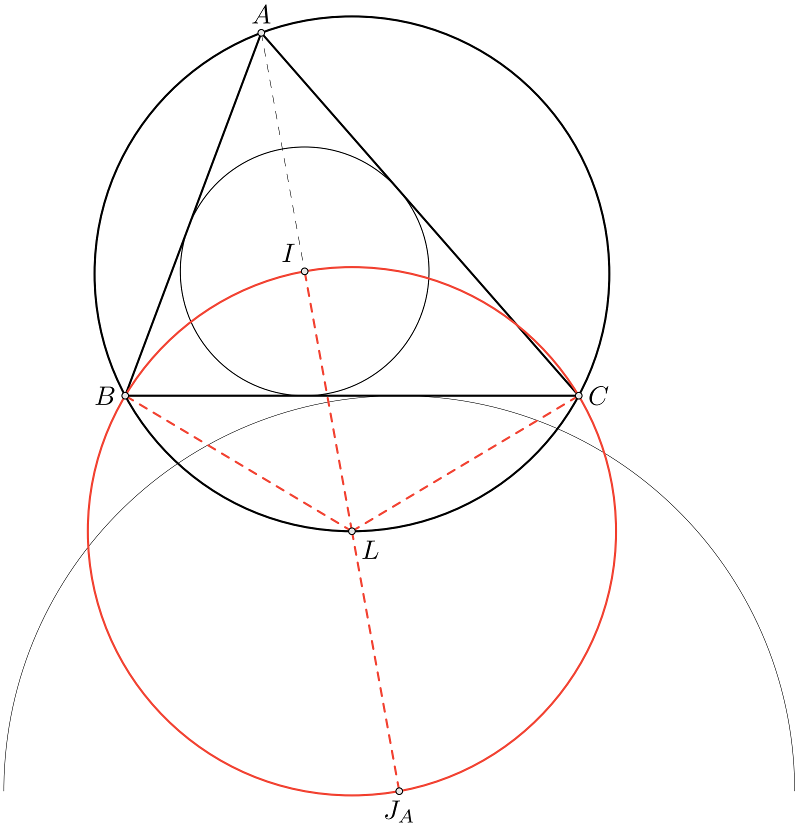
Twierdzenie o trójliściu

Antoni Łuczak

Twierdzenie (O trójliściu)

Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Przez L oznaczmy środek łuku BC niezawierającego punktu A. Z kolei J_A niech będzie środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC stycznego do boku BC. Wówczas spełnione są równości

$$IL = BL = CL = J_A L.$$



Dowód. Niech $\sphericalangle BAC = 2\alpha$, $\sphericalangle ABC = 2\beta$ oraz $\sphericalangle BCA = 2\gamma$, wtedy

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Na początku pokażemy, że $LI = LB$, co jest równoważne pokazaniu, że $\sphericalangle IBL = \sphericalangle LIB$. Przenosząc kąty po okręgu dostajemy, że

$$\sphericalangle CBL = \sphericalangle CAL = \sphericalangle IAC = \alpha,$$

czyli

$$\sphericalangle IBL = \alpha + \beta \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BIL = \sphericalangle IBA + \sphericalangle BAI = \alpha + \beta,$$

a więc $LI = LB$. Analogicznie, $LI = LC$.

Zauważmy, że $\sphericalangle IBJ_A = 90^\circ$, bowiem BI i BJ_A są dwusiecznymi pod kątem prostym. Wtedy IJ_A jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym IBJ_A. Analogicznie IJ_A jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ICJ_A, czyli mamy okrąg $\odot(IBJ_AC)$, w którym $BL = IL = CL$, czyli L jest środkiem tego okręgu, co oznacza, że $IL = LJ_A$. $\square$

Zadania łatwe

Zadanie 1.
Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg opisany na trójkącie ABI przecina BC po raz drugi w punkcie D. Okrąg opisany na trójkącie AIC przecina BC po raz drugi w punkcie E. Udowodnić, że I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADE.

Zadanie 2.
Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt M – środkiem boku AB. Oznaczmy przez N drugie przecięcie prostej AJ z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Załóżmy, że $\sphericalangle BIM = 90°$. Wyznaczyć stosunek $AI : IN$.

Zadanie 3.
Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste BI, CI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że prosta PQ jest symetralną odcinka AI.

Zadanie 4.
W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I. Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q, różnych od A i B. Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to $\sphericalangle CIF = 90°$.

Zadania trochę trudniejsze

Zadanie 5.
Punkt H jest ortocentrum ABC. Proste AH, BH, CH przecinają BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez środek odcinka AH.

Zadanie 6.
Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Niech J_a, J_b i J_c będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, CDE. Prosta l_a jest symetryczna do prostej BC względem prostej J_bJ_c, analogicznie określamy proste l_b i l_c. Dowieść, że proste l_a, l_b, l_c przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 7.
Niech K i L będą takimi punktami na łukach odpowiednio BC i BA okręgu opisanego na trójkącie ABC, że $KL \parallel AC$. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCK i ABL są równoodległe od środka łuku AC, zawierającego punkt B, okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 8.
Trójkąt ABC spełnia $\sphericalangle BAC = 60°$. Niech O, I, H oznaczają odpowiednio środek okręgu opisanego, środek okręgu wpisanego oraz ortocentrum trójkąta ABC. Udowodnić, że $OI = IH$.

Zadanie 9. (IMO 2006 P1)
Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt P leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Wykazać, że $AP \geqslant AI$ oraz, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P = I$.

Zadanie 10.
Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

Zadania po kole

Zadanie 11.
Punkty B, C leżą na okręgu Ω. Punkty A_1, A_2 leżą na tym samym łuku BC okręgu Ω oraz spełniają $A_1A_2 = 1$. Niech I_1, I_2 oznaczają odpowiednio środki okręgów wpisanych w A_1BC, A_2BC. Udowodnić, że długość odcinka I_1I_2 nie zależy od wyboru punktów A_1, A_2.

Zadanie 12.
Trójkąt ABC, w którym $AB < AC$, jest wpisany w okrąg Ω. Dwusieczne $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle ACB$ przecinają się w I oraz przecinają Ω po raz drugi odpowiednio w punktach P, Q. Niech N oznacza środek łuku BAC okręgu Ω. Udowodnić, że

(1) $AN \parallel PQ$,

(2) $NPIQ$ jest równoległobokiem oraz wywnioskować stąd, że NI przechodzi przez środek PQ,

(3) gdy I_B, I_C oznaczają odpowiednio środki okręgów B-dopisanego oraz C-dopisanego trójkąta ABC, to punkty B, C, I_B, I_C leżą na okręgu o środku N,

(4) $\sphericalangle ANI = \sphericalangle IMB$, przy czym M to środek BC.

Zadanie 13.
W konfiguracji z Zadania 7, udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCK, ABL, punkt B oraz środek łuku ABC leżą na jednym okręgu.

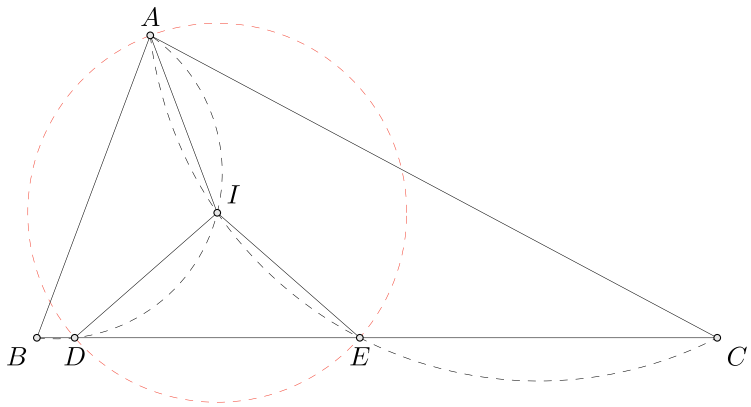
Zadanie 14.
Wysokości BE, CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Niech M oznacza środek odcinka BC. Dodatkowo, niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt MEF. Udowodnić, że $\sphericalangle AIH = 90^\circ$.

Rozwiązania

Autor rozwiązań: Antoni Łuczak.

Zadanie 1.
Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg opisany na trójkącie ABI przecina BC po raz drugi w punkcie D. Okrąg opisany na trójkącie AIC przecina BC po raz drugi w punkcie E. Udowodnić, że I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADE.

Rozwiązanie:
Na mocy twierdzenia o trójliściu, okrąg opisany na ABI jest symetryczny względem dwusiecznej kąta ACB. Otrzymujemy zatem, że D jest odbiciem A względem tej dwusiecznej oraz $ID = IA$. Podobnie $IE = IA$, co daje tezę.



Zadanie 2.
Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt M – środkiem boku AB. Oznaczmy przez N drugie przecięcie prostej AJ z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Załóżmy, że $\sphericalangle BIM = 90°$. Wyznaczyć stosunek $AI : IN$.

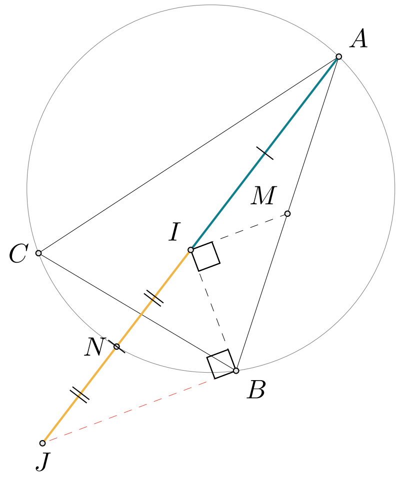
Rozwiązanie:
Niech J oznacza środek okręgu A-dopisanego do ABC. Na mocy twierdzenia o trójliściu mamy

$$IN = JN.$$

Ponadto $\sphericalangle JBI = 90°$, więc $IM \parallel AJ$. Z twierdzenia o linii środkowej wynika, że

$$AI = IJ.$$

W takim razie $AI : IN = 2$.

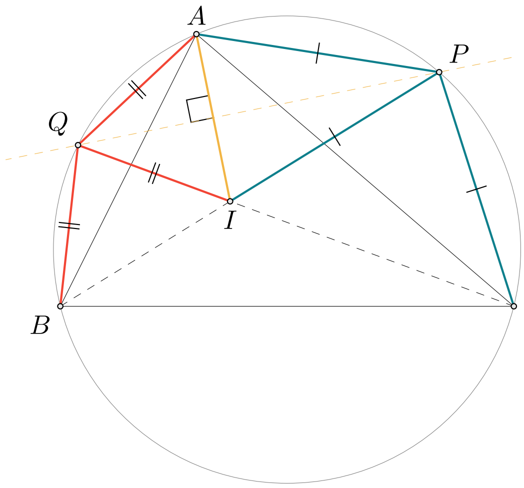


Zadanie 3.
Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste BI, CI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q. Wykazać, że prosta PQ jest symetralną odcinka AI.

Rozwiązanie:
Na mocy twierdzenia o trójliściu mamy

$$PA = PI \quad \text{oraz} \quad QA = QI,$$

co daje tezę.

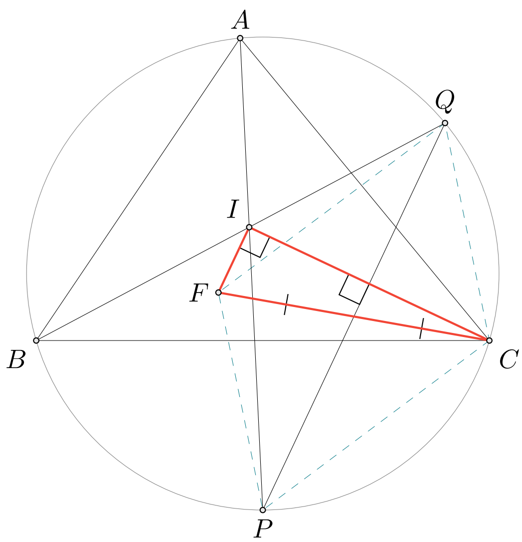


Zadanie 4.
W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I. Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q, różnych od A i B. Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to $\sphericalangle CIF = 90°$.

Rozwiązanie:
Na mocy poprzedniego zadania prosta PQ jest symetralną odcinka CI. Skoro F jest odbiciem wierzchołka C względem środka PQ, to $IF \parallel PQ$. Jednak $PQ \perp CI$, zatem

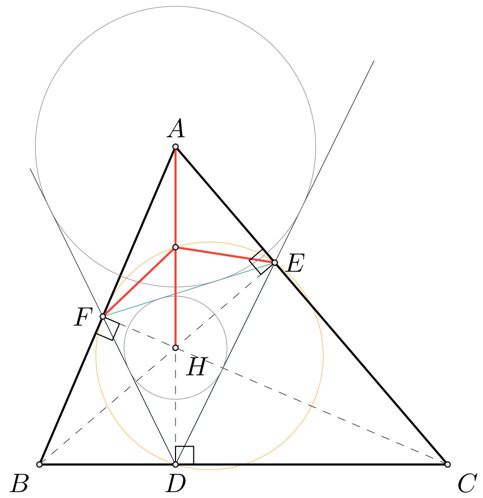
$$\sphericalangle CIF = 90°,$$

co było do wykazania.



Zadanie 5.
Punkt H jest ortocentrum ABC. Proste AH, BH, CH przecinają BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez środek odcinka AH.

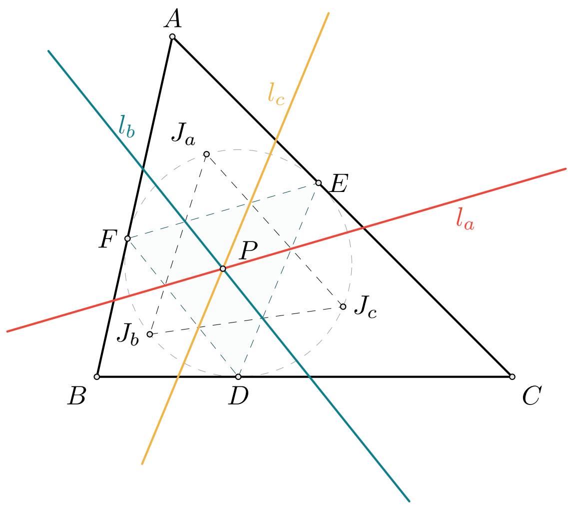
Rozwiązanie:
Wystarczy zauważyć, że H, A, B, C to odpowiednio środek okręgu wpisanego oraz środki odpowiednich okręgów dopisanych do trójkąta DEF. Na mocy twierdzenia o trójliściu środek odcinka AH jest środkiem łuku EF okręgu opisanego na trójkącie DEF, co kończy dowód.



Zadanie 6.
Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Niech J_a, J_b i J_c będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, CDE. Prosta l_a jest symetryczna do prostej BC względem prostej J_bJ_c, analogicznie określamy proste l_b i l_c. Dowieść, że proste l_a, l_b, l_c przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:
Trójkąty AFE, BFD oraz CDE są równoramienne, zatem punkty J_a, J_b i J_c leżą odpowiednio na symetralnych odcinków FE, FD i DE. Wtedy punkty J_a, J_b, J_c są środkami odpowiednich łuków EF, FD, DE okręgu wpisanego.

Na mocy Zadania 3 otrzymujemy, że $EP \perp J_aJ_c$, wtedy punkt E przechodzi po symetrii na punkt P, analogicznie dla dwóch pozostałych. Zatem proste l_a, l_b, l_c przechodzą przez środek okręgu wpisanego w DEF.



Zadanie 7.
Niech K i L będą takimi punktami na łukach odpowiednio BC i BA okręgu opisanego na trójkącie ABC, że $KL \parallel AC$. Udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCK i ABL są równoodległe od środka łuku AC, zawierającego punkt B, okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie:
Niech X, Y oznaczają odpowiednio środki łuków CK, AL, natomiast I, J środki okręgów wpisanych w BCK oraz ABL. Skoro łuki CXK, AYL mają równe długości, to z twierdzenia o trójliściu otrzymujemy

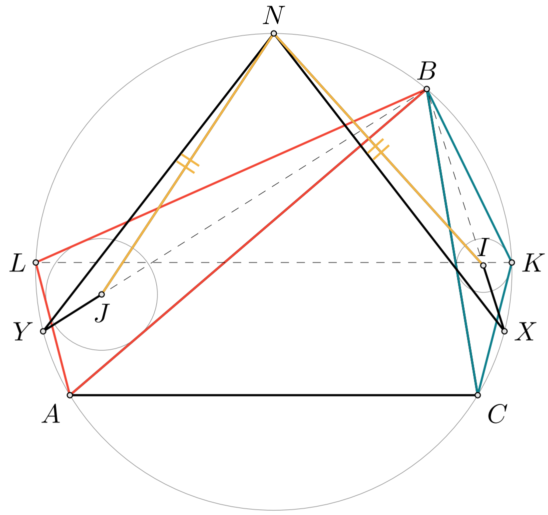
$$IX = XC = YA = YJ.$$

Niech N oznacza środek łuku ABC. Mamy $NA = NC$ oraz $\sphericalangle NAB = \sphericalangle NCB$.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle NYJ = \sphericalangle NYB = \sphericalangle NXB = \sphericalangle NXI,$$

zatem $\triangle NYJ \equiv \triangle NIX$, z czego dostajemy tezę.

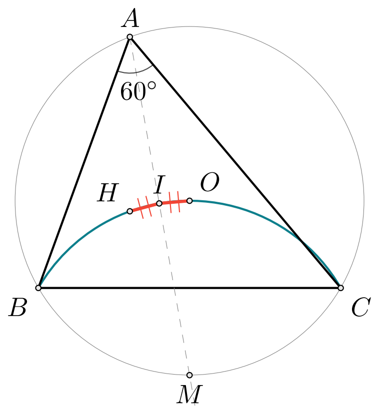


Zadanie 8.
Trójkąt ABC spełnia $\sphericalangle BAC = 60°$. Niech O, I, H oznaczają odpowiednio środek okręgu opisanego, środek okręgu wpisanego oraz ortocentrum trójkąta ABC. Udowodnić, że $OI = IH$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle BIC = \sphericalangle BOC = 120°.$$

Kąty te pokazują, że O oraz H leżą na okręgu trójliściowym BIC. Ponadto wiadomo, że proste AH, AO są symetryczne względem dwusiecznej kąta BAC. Skoro środek okręgu BIC również leży na tej dwusiecznej, to $HI = IO$, co było do wykazania.



Zadanie 9. (IMO 2006 P1)
Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt P leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB.$$

Wykazać, że $AP \geqslant AI$ oraz, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P = I$.

Rozwiązanie:
Korzystając z podanej równości obliczamy, że

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle BAC}{2},$$

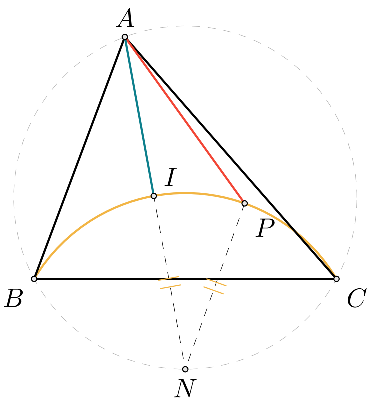
zatem punkt P leży na okręgu trójliściowym i spełnia

$$PN = IN,$$

gdzie N to środek łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Na mocy nierówności trójkąta mamy

$$AP + PN \geqslant AN = AI + IN \iff AP \geqslant AI,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P = I$.



Zadanie 10.
Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D. Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I.

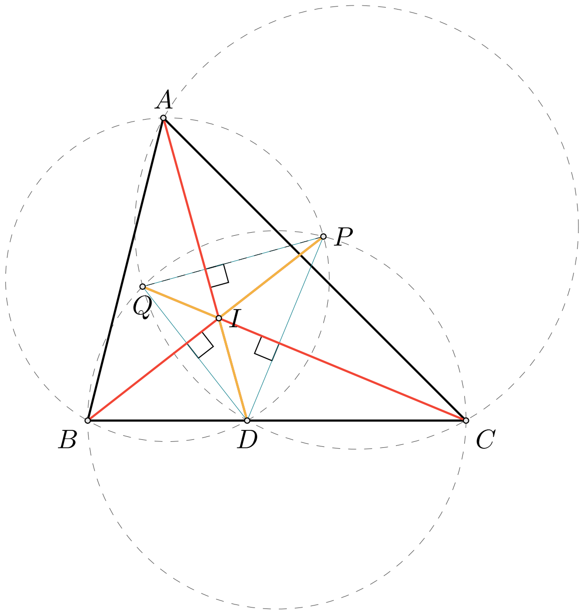
Rozwiązanie:
Wystarczy pokazać, że $PD \perp QC$ oraz $QD \perp PB$. Skoro $AQ = QD$ oraz Q leży na dwusiecznej kąta ACB, to czworokąt $AQDC$ jest cykliczny. Analogicznie czworokąt $APDB$ jest cykliczny. Potęga punktu w I pokazuje, że $BCPQ$ także jest cykliczny. Mamy zatem

$$\sphericalangle CQP = \sphericalangle CBP = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PDA.$$

Analogicznie

$$\sphericalangle QPB = \sphericalangle ADQ.$$

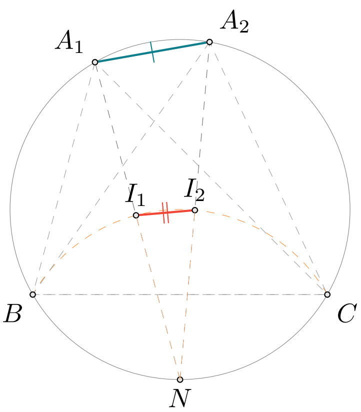
W połączeniu z faktem, że $PQ \perp AD$, otrzymujemy pozostałe prostopadłości.



Zadanie 11.
Punkty B, C leżą na okręgu Ω. Punkty A_1, A_2 leżą na tym samym łuku BC okręgu Ω oraz spełniają $A_1A_2 = 1$. Niech I_1, I_2 oznaczają odpowiednio środki okręgów wpisanych w A_1BC, A_2BC. Udowodnić, że długość odcinka I_1I_2 nie zależy od wyboru punktów A_1, A_2.

Rozwiązanie:
Na mocy twierdzenia o trójliściu punkty B, C, I_1, I_2 leżą na jednym okręgu o środku N, gdzie N to środek tego łuku BC, który nie zawiera A_1, A_2. Warunek $A_1A_2 = 1$ mówi, że $\sphericalangle A_1NA_2$ jest stały.

Wtedy $\triangle I_1NI_2$ będzie takim samym trójkątem równoramiennym we wszystkich przypadkach, zgodnie z cechą bok-kąt-bok. W takim razie również długość I_1I_2 jest stała.



Zadanie 12.
Trójkąt ABC, w którym $AB < AC$, jest wpisany w okrąg Ω. Dwusieczne $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle ACB$ przecinają się w I oraz przecinają Ω po raz drugi odpowiednio w punktach P, Q. Niech N oznacza środek łuku BAC okręgu Ω. Udowodnić, że

(1) $AN \parallel PQ$,

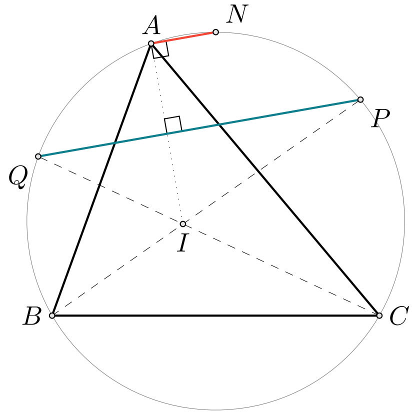
(2) $NPIQ$ jest równoległobokiem oraz wywnioskować stąd, że NI przechodzi przez środek PQ,

(3) gdy I_B, I_C oznaczają odpowiednio środki okręgów B-dopisanego oraz C-dopisanego trójkąta ABC, to punkty B, C, I_B, I_C leżą na okręgu o środku N,

(4) $\sphericalangle ANI = \sphericalangle IMB$, przy czym M to środek BC.

Rozwiązanie:

(1) AN jest dwusieczną zewnętrzną kąta BAC, zatem jest prostopadła do AI. Podobnie $PQ \perp AI$, więc $AN \parallel PQ$.



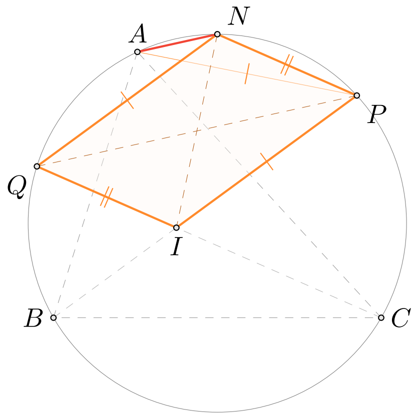
(2) Z twierdzenia o trójliściu

$$PI = AP.$$

Dodatkowo kąty oparte na łukach AP, AQ, AN to odpowiednio $\gamma/2$, $\beta/2$, $|\beta-\gamma|/2$. Wynika stąd, że kąty oparte na łukach AP, QN są równe. W takim razie

$$NQ = AP = IP.$$

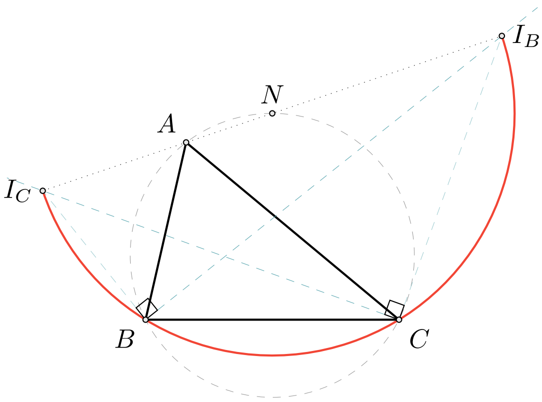
Analogicznie $NP = AQ = QI$.



(3) Mamy

$$\sphericalangle I_C B I_B = \sphericalangle I_C C I_B = 90°,$$

zatem punkty B, C, I_B, I_C leżą na okręgu o średnicy $I_B I_C$. Zgodnie z punktem 1., punkt N leży na $I_B I_C$ oraz spełnia $NB = NC$. Oznacza to, że jest środkiem tego okręgu.



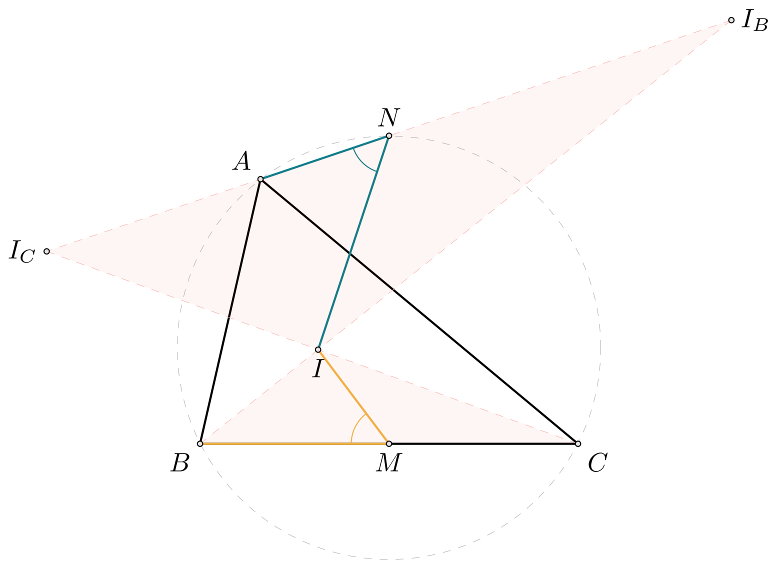
(4) Z poprzednio pokazanej cykliczności mamy podobieństwo

$$\triangle I_B I_C I \sim \triangle BCI.$$

Skoro N, M są środkami odpowiadających boków tych trójkątów, to otrzymujemy również podobieństwo

$$\triangle I_B N I \sim \triangle BMI.$$

To daje nam równość kątów z tezy.

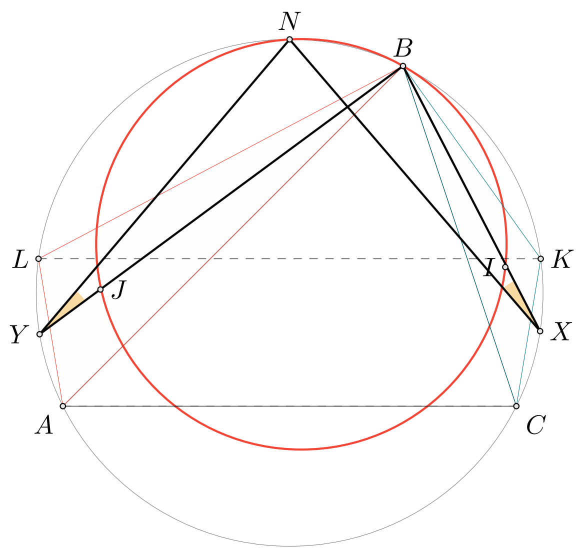


Zadanie 13.
W konfiguracji z Zadania 7, udowodnić, że środki okręgów wpisanych w trójkąty BCK, ABL, punkt B oraz środek łuku ABC leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Jak zauważono w Zadaniu 7, zachodzi

$$\sphericalangle NIB = \sphericalangle NJB,$$

co implikuje, że punkty B, N, I, J leżą na jednym okręgu.



Zadanie 14.
Wysokości BE, CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Niech M oznacza środek odcinka BC. Dodatkowo, niech I oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt MEF. Udowodnić, że $\sphericalangle AIH = 90°$.

Rozwiązanie:
Podobnie jak w Zadaniu 5 korzystamy z faktu, że H, A, B, C to środek okręgu wpisanego i środki odpowiednich okręgów dopisanych do trójkąta DEF, gdzie D to trzeci spodek wysokości w trójkącie ABC. Skoro

$$\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90°$$

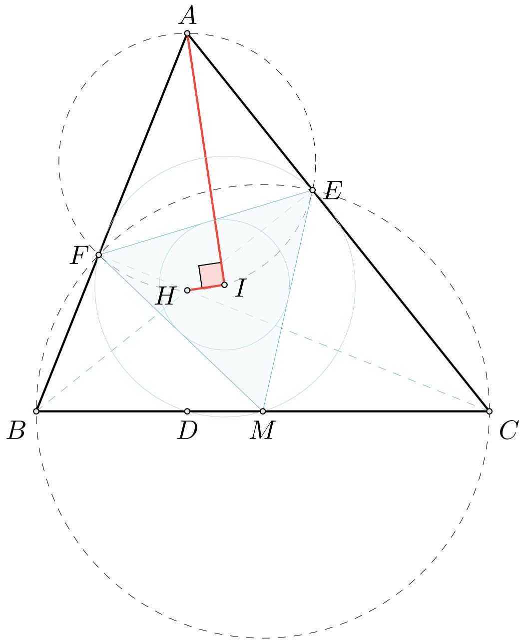
oraz punkt M jest środkiem BC, to M jest środkiem okręgu opisanego na $BCEF$ oraz w szczególności

$$ME = MF.$$

Ponadto M leży na dwusiecznej zewnętrznej kąta EDF, więc punkt M leży na okręgu opisanym na DEF. Dostajemy zatem, że I leży na okręgu trójliściowym opisanym na $EHFA$. Skoro średnicą tego okręgu jest AH, to

$$\sphericalangle AIH = 90^\circ,$$

co należało pokazać.



Inwersja

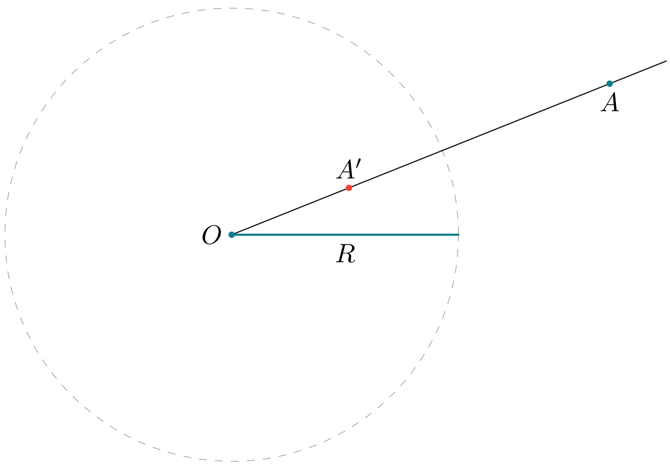
Filip Manijak

Teoria

Definicja (Inwersja)

Inwersja to przekształcenie płaszczyzny. Inwersję wykonujemy względem danego okręgu (o środku w punkcie O i promieniu R). Obraz A' punktu A to punkt na półprostej OA, taki że

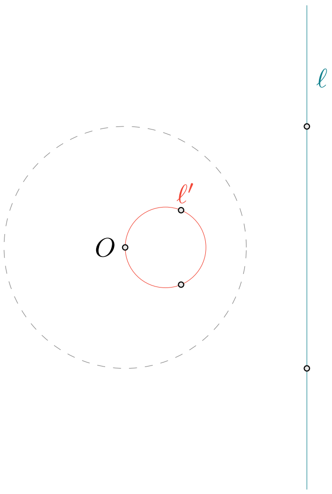
$$R^2 = OA \cdot OA'.$$



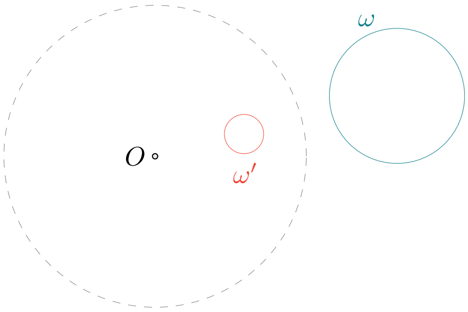
Twierdzenie (Własności inwersji)

(1) Inwersja jest dualna, czyli dla dowolnego punktu A mamy $(A')' = A$;
(2) Proste przechodzą w okręgi przechodzące przez środek okręgu inwersyjnego;
(3) Okręgi przechodzące przez środek okręgu inwersyjnego przechodzą w proste;
(4) Okręgi nieprzechodzące przez środek okręgu inwersyjnego przechodzą w inne okręgi;
(5) Okrąg inwersyjny przechodzi na samego siebie;
(6) Proste przez środek okręgu inwersyjnego przechodzą na siebie same
(7) Jeżeli dwa obiekty są styczne, to ich obrazy również są styczne (proste równoległe uznaje się za styczne);
(8) Dla dowolnych punktów $A \neq B$ spełniona jest równość $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OB'A'$.

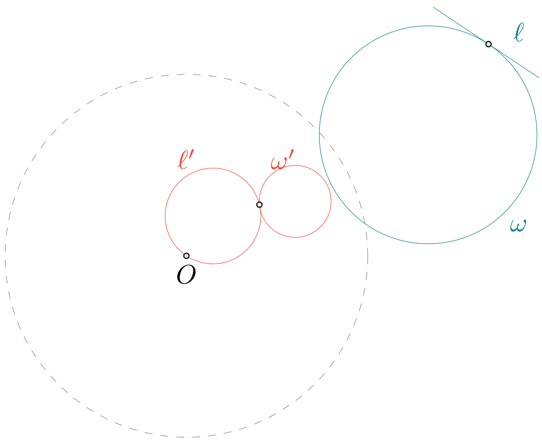
Dowód powyższych własności zostaje pozostawiony Czytelnikowi – jest to idealne ćwiczenie, aby lepiej zrozumieć działanie tego przekształcenia. Ilustracje poszczególnych własności:



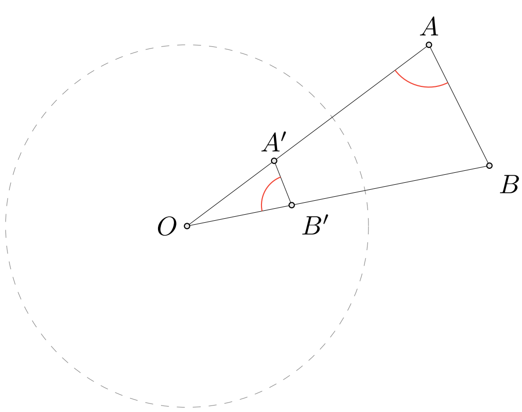
Własność 2. i 3.



Własność 4.



Własność 7.



Własność 8.

Zadania ćwiczeniowe

Zadanie 1.
Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O i promieniu OA. Na promieniu OA leżą punkty B i C. Punkty B' i C' to obrazy inwersyjne punktów B i C względem okręgu ω. Punkt D leży na okręgu ω. Udowodnić, że

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle B'DC'.$$

Zadanie 2.
Dany jest trójkąt ABC z okręgiem wpisanym ω o środku w punkcie I. Udowodnić, że punkt I jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$, gdzie punkty A', B' i C' są obrazami inwersyjnymi punktów A, B i C względem okręgu ω.

Zadanie 3.
Dane są proste prostopadłe AB i CD przecinające się w punkcie E. Niech ω_A to okrąg o środku w punkcie A, który przechodzi przez punkt E. Analogicznie definiujemy okręgi ω_B, ω_C i ω_D. Udowodnić, że przecięcia okręgów ω_A i ω_C, ω_A i ω_D, ω_B i ω_C oraz ω_B i ω_D leżą na jednym okręgu.

Inwersja $\sqrt{BC}$

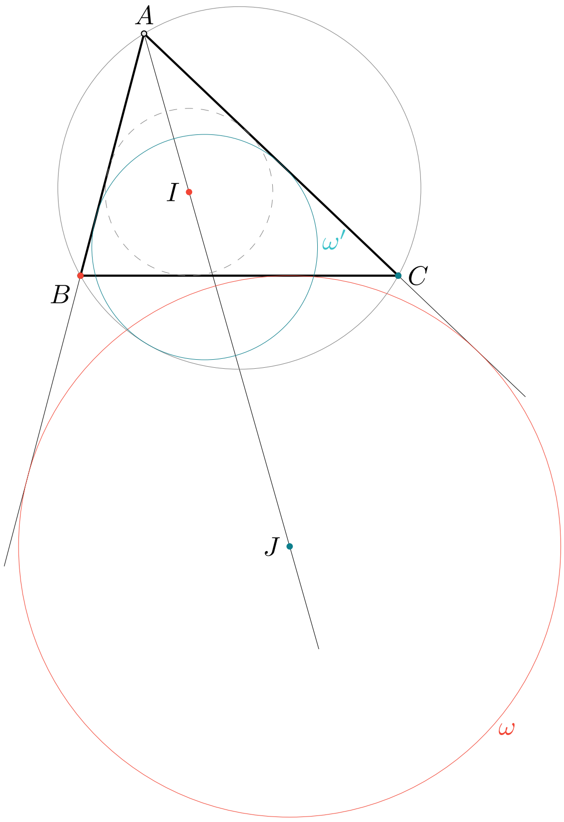
Definicja (Inwersja $\sqrt{BC}$)

Dla danego trójkąta ABC *inwersja* $\sqrt{BC}$ to złożenie dwóch przekształceń (dla danego trójkąta ABC), czyli inwersji względem okręgu o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ oraz odbicia względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$.

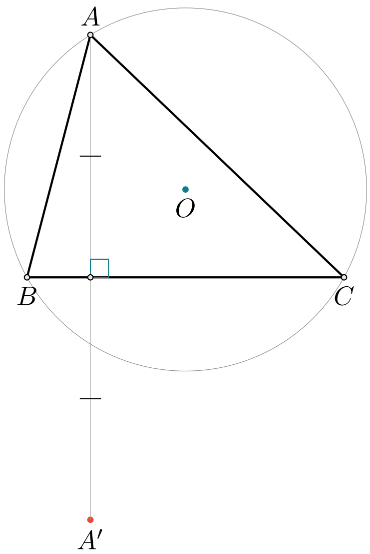
Twierdzenie (Własności inwersji $\sqrt{BC}$)

W inwersji $\sqrt{BC}$:
(1) Obraz punktu B to punkt C;
(2) Obraz środka okręgu wpisanego to środek okręgu A-dopisanego;
(3) Obraz prostej BC to okrąg opisany na trójkącie ABC;
(4) Obraz środka okręgu opisanego to odbicie punktu A względem prostej BC;
(5) Obraz okręgu dopisanego to okrąg dowpisany;
(6) Obraz ortocentrum leży na okręgu opisanym na trójkącie BOC, przy czym O to środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

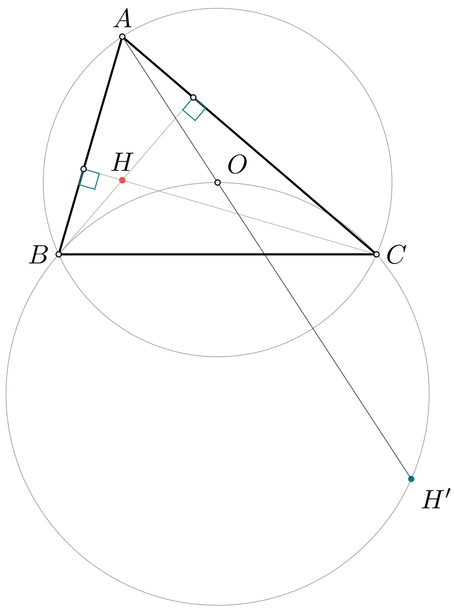
Podobnie, jak wcześniej dowód powyższych własności pozostawiamy Czytelnikowi.



Własności 1., 2. i 5.



Własność 4.



Własność 6.

Zadania po kole

Zadanie 4.
Okrąg Ω ma promień R i środek A. Udowodnić, że jeżeli okrąg ω przechodzi na samego siebie w inwersji względem Ω, to potęga punktu A względem ω to R^2.

Zadanie 5.
Dany jest okrąg Ω o średnicy AB i środku w punkcie O. Cięciwa CD okręgu Ω przecina odcinek AB w punkcie M. Załóżmy, że okręgi $\odot(AOC)$ i $\odot(BOD)$ przecinają się w punkcie K. Udowodnić, że

$$\sphericalangle MKO = 90^\circ.$$

Zadanie 6.
Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC jako ω, a środek okręgu wpisanego w ten trójkąt jako I. Okrąg O jest styczny do odcinków AC, BC i do okręgu ω w punkcie P, a S jest środkiem tego łuku AB okręgu ω, na którym leży punkt C. Wykazać, że punkty P, I, S są współliniowe.

Zadanie 7.
Niech AB będzie cięciwą okręgu Ω. Niech ω będzie okręgiem stycznym do prostej AB w punkcie X i do krótszego łuku AB okręgu Ω w punkcie Y. Punkt M to środek łuku AB okręgu Ω, który nie zawiera punktu Y. Udowodnić, że prosta XY przechodzi przez punkt M.

Zadanie 8.
Punkty A, B, C leżą na jednej prostej. Punkt D leży poza prostą AB. Udowodnić, że środki okręgów $\odot(ABD)$, $\odot(ACD)$, $\odot(BDC)$ i punkt D leżą na jednym okręgu.

Zadanie 9.
W trójkącie ABC dwusieczna kąta $\sphericalangle BAC$ przecina bok BC w punkcie D i okrąg $\odot(ABC)$ w punkcie E. Okrąg o średnicy DE przecina okrąg $\odot(ABC)$ w punkcie F. Udowodnić, że prosta AF to symediana w trójkącie ABC.

Zadanie 10.
Dany jest trójkąt ABC. Punkt I to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkt D leży na okręgu $\odot(AIC)$ i nie leży na odcinku BI. Punkt M to środek odcinka DI. Punkt M leży na okręgu $\odot(ABC)$. Udowodnić, że

$$\sphericalangle ICA = \sphericalangle MCD.$$

Zadanie 11.
Dane są dwa okręgi ortogonalne: ω_1 i ω_2. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω_1, przy czym punkt B leży wewnątrz okręgu ω_2. Niech punkt O to środek okręgu ω_1. Okręgi γ_1 i γ_2 to okręgi przechodzące przez punkt A i punkt O oraz styczne do okręgu ω_2, odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnić, że punkty X, Y, O, B leżą na jednym okręgu.

Zadanie 12.
Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o_1. Okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie F. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinka AB w punkcie E. Dowieść, że punkty E, F, D leżą na jednej prostej.

Zadanie 13.
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o średnicy AC. Punkt E to przecięcie odcinków AC i BD. Punkt F to taki punkt na okręgu $\odot(COD)$, że odcinek OF to średnica okręgu $\odot(COD)$. Punkt G to przecięcie okręgów $\odot(AOB)$ i $\odot(COD)$. Udowodnić, że punkty G, F i E są współliniowe.

Zadanie 14. (Inwersja ujemna)
Dany jest trójkąt ABC, przy czym $AB > AC$. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Punkt F jest spodkiem wysokości z punktu A, punkt M to środek odcinka BC, zaś punkt Q to taki punkt na okręgu $\odot(ABC)$, że $\sphericalangle AQH = 90°$. Punkt K to taki punkt na okręgu $\odot(ABC)$, że $\sphericalangle QKH = 90°$. Załóżmy, że punkty A, B, C, K, Q leżą na okręgu $\odot(ABC)$ w tej kolejności. Udowodnić, że okręgi $\odot(KHQ)$ i $\odot(KFM)$ są styczne.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Filip Manijak*, Antoni Mazur.

Zadanie 1.
Dany jest okrąg ω o środku w punkcie O i promieniu OA. Na promieniu OA leżą punkty B i C. Punkty B' i C' to obrazy inwersyjne punktów B i C względem okręgu ω. Punkt D leży na okręgu ω. Udowodnić, że

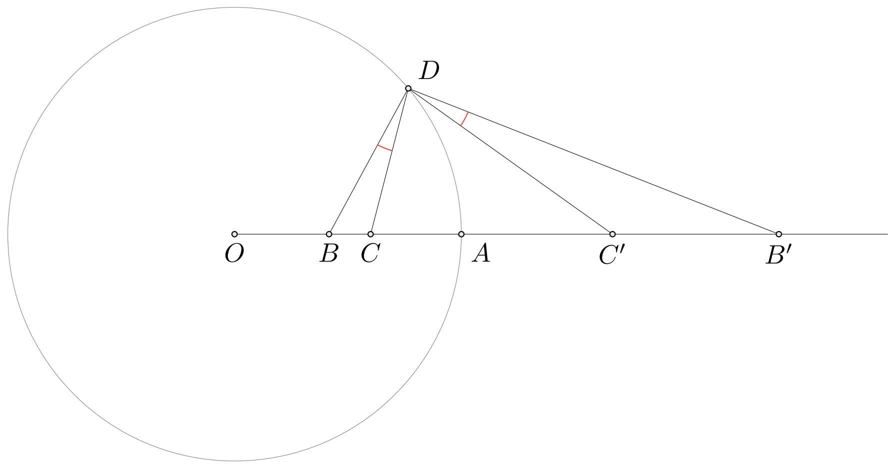
$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle B'DC'.$$

Rozwiązanie:
Z własności inwersji wiemy, że

$$\sphericalangle ODB = \sphericalangle DB'C \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ODC = \sphericalangle OC'D.$$

Zauważmy, że

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ODC - \sphericalangle ODB = \sphericalangle OC'D - \sphericalangle OB'D = \sphericalangle B'DC'.$$



Zadanie 2.
Dany jest trójkąt ABC z okręgiem wpisanym ω o środku w punkcie I. Udowodnić, że punkt I jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$, gdzie punkty A', B' i C' są obrazami inwersyjnymi punktów A, B i C względem okręgu ω.

Rozwiązanie:
Oznaczmy D jako punkt przecięcia prostej $B'I$ z prostą $A'C'$ i E jako punkt przecięcia prostej $A'I$ i prostą $B'C'$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle A'B'I = \sphericalangle BAI, \quad \sphericalangle IA'C' = \sphericalangle ICA, \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle IA'B' = \sphericalangle IBA.$$

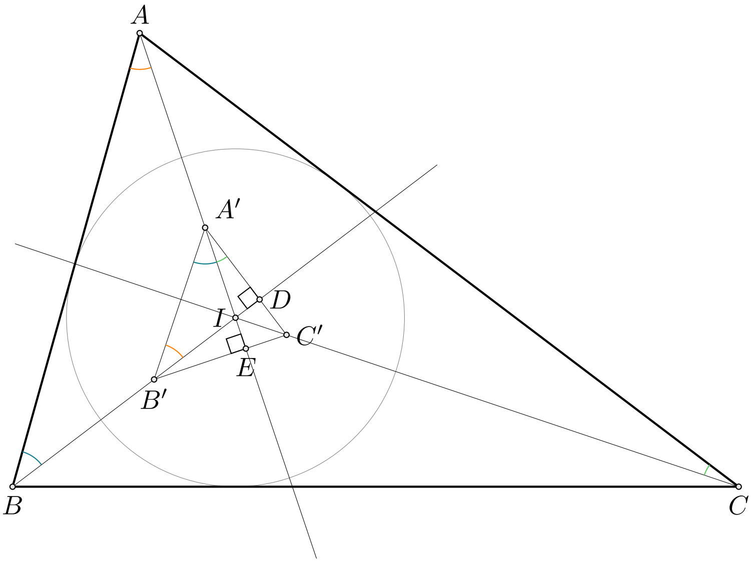
Stąd otrzymujemy, że

$$\sphericalangle B'DA' = 180^\circ - \sphericalangle A'B'I - \sphericalangle IA'C' - \sphericalangle IA'B' = 90^\circ,$$

ponieważ połowa sumy kątów w trójkącie ABC jest równa

$$\sphericalangle BAI + \sphericalangle IBA + \sphericalangle ICA = 90^\circ.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle C'EA' = 90^\circ$. Otrzymujemy, że punkt I leży na dwóch wysokościach trójkąta $A'B'C'$, co należało wykazać.

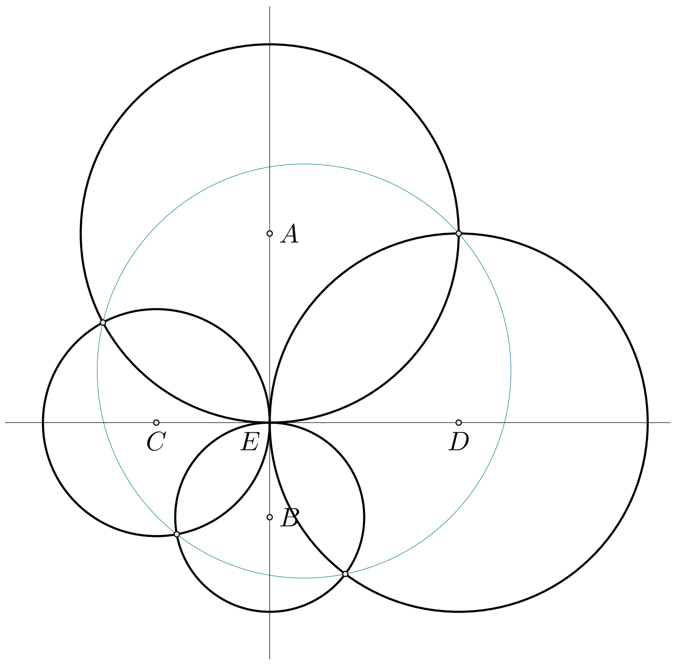


Zadanie 3.
Dane są proste prostopadłe AB i CD przecinające się w punkcie E. Niech ω_A to okrąg o środku w punkcie A, który przechodzi przez punkt E. Analogicznie definiujemy okręgi ω_B, ω_C i ω_D. Udowodnić, że przecięcia okręgów ω_A i ω_C, ω_A i ω_D, ω_B i ω_C oraz ω_B i ω_D leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy inwersję o środku w punkcie E i dowolnym promieniu

$$r < \min\{AE, BE, CE, DE\}.$$

Wtedy okrąg ω_A przechodzi na prostą prostopadłą do AE, okrąg ω_B na prostą prostopadłą do BE, i analogicznie okręgi ω_C i ω_D. Proste te tworzą prostokąt. Przecięcia okręgów przechodzą na przecięcia prostych, a ponieważ na prostokącie można opisać okrąg, to na przecięciach też, co kończy dowód.

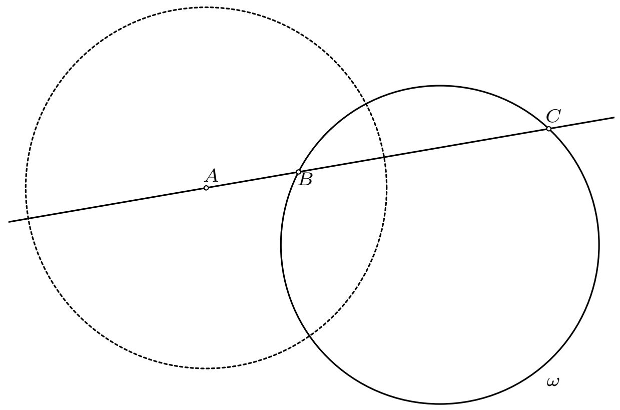


Zadanie 4.
Okrąg Ω ma promień R i środek A. Udowodnić, że jeżeli okrąg ω przechodzi na samego siebie w inwersji względem Ω, to potęga punktu A względem ω to R^2.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli prosta przechodząca przez punkt A tnie okrąg ω w punktach B i C, to po inwersji punkt B przechodzi na punkt C, więc

$$R^2 = AB \cdot AC = \mathrm{Pot}(A,\ \omega),$$

co kończy dowód.



Zadanie 5.
Dany jest okrąg Ω o średnicy AB i środku w punkcie O. Cięciwa CD okręgu Ω przecina odcinek AB w punkcie M. Załóżmy, że okręgi $\odot(AOC)$ i $\odot(BOD)$ przecinają się w punkcie K. Udowodnić, że

$$\sphericalangle MKO = 90^\circ.$$

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności cięciwa CD przecina odcinek AB na odcinku OB. Zauważmy, że po inwersji względem okręgu Ω otrzymujemy, że punkt K' to punkt przecięcia AC i BD, a M' to punkt przecięcia prostej AB z okręgiem $\odot(OCD)$. Teza jest równoważna temu, że

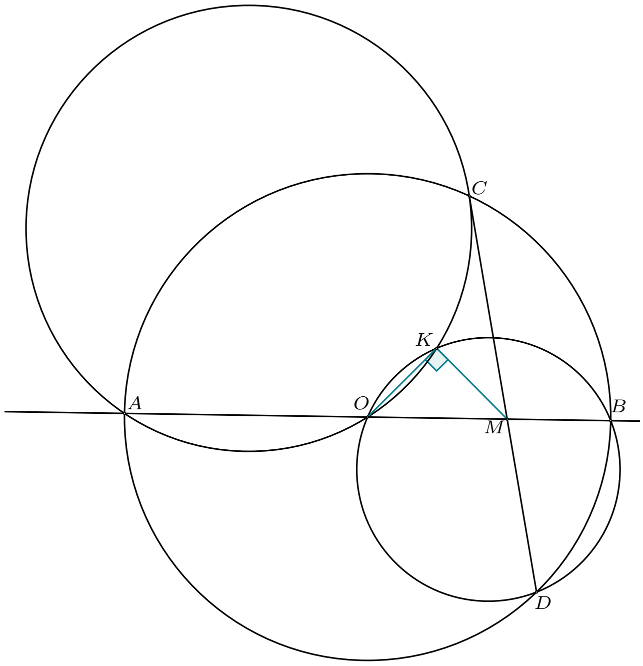
$$\sphericalangle OM'K' = 90^\circ.$$

Z powodu, że

$$\sphericalangle ACB = 90^\circ,$$

to wystarczy wykazać, że punkty K', M', B i C leżą na jednym okręgu. Przenosząc kąt $\sphericalangle CM'O$ po okręgach $\odot(OCM'D)$ i $\odot(ABC)$ wyliczamy

$$\begin{aligned}\sphericalangle CM'O = \sphericalangle CDO = 90^\circ - \frac{\sphericalangle COD}{2} = 90^\circ - \sphericalangle CAD = \\ = \sphericalangle CBD - 90^\circ = 90^\circ - \sphericalangle CBK' = \sphericalangle CK'B.\end{aligned}$$



Zadanie 6.
Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC jako ω, a środek okręgu wpisanego w ten trójkąt jako I. Okrąg O jest styczny do odcinków AC, BC i do okręgu ω w punkcie P, a S jest środkiem tego łuku AB okręgu ω, na którym leży punkt C. Wykazać, że punkty P, I, S są współliniowe.

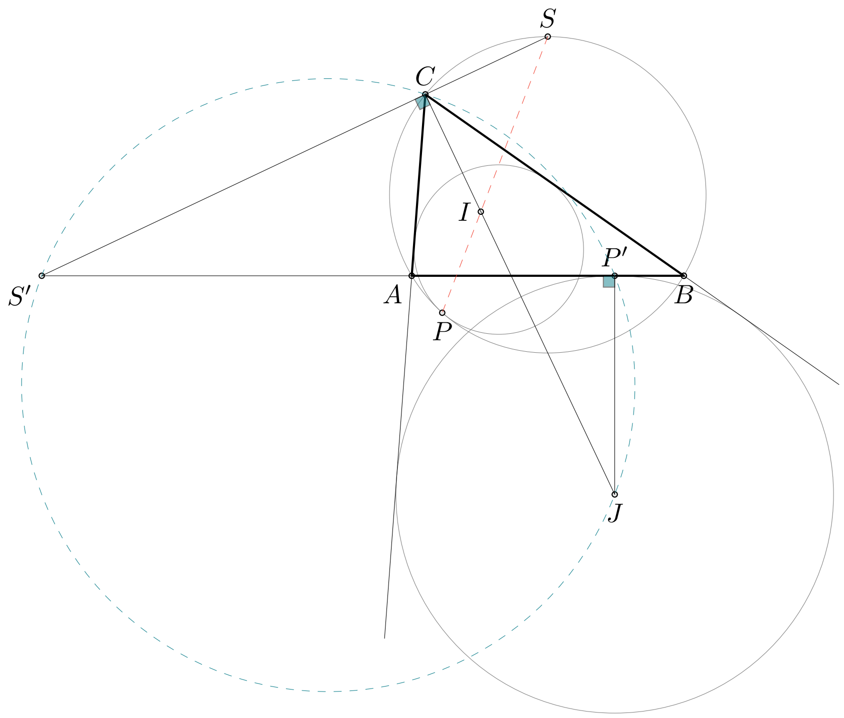
Rozwiązanie:
Po inwersji względem okręgu o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ i odbiciu względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle ACB$ otrzymujemy, że

- punkt P przechodzi na punkt styczności okręgu C-dopisanego z bokiem AB,
- punkt S przechodzi na przecięcie prostych CS i AB,
- punkt I przechodzi na punkt J,

gdzie J oznacza środek okręgu C-dopisanego trójkąta ABC. Zauważmy, że punkty C, J, S', P' leżą na jednym okręgu, ponieważ

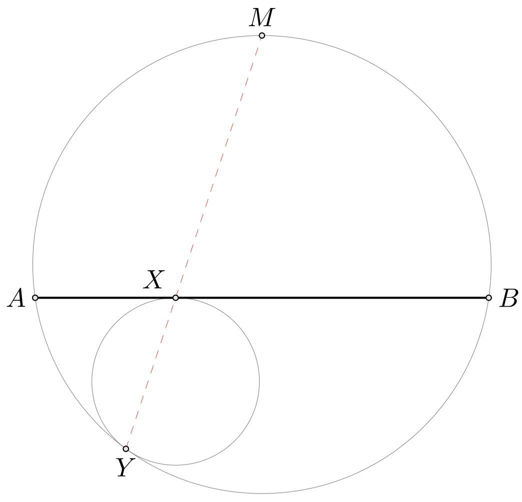
$$\sphericalangle S'CJ = 90^\circ = \sphericalangle S'P'J.$$

Wobec tego punkty P, I, S przed inwersją leżały na jednej prostej, co należało wykazać.



Zadanie 7.
Niech AB będzie cięciwą okręgu Ω. Niech ω będzie okręgiem stycznym do prostej AB w punkcie X i do krótszego łuku AB okręgu Ω w punkcie Y. Punkt M to środek łuku AB okręgu Ω, który nie zawiera punktu Y. Udowodnić, że prosta XY przechodzi przez punkt M.

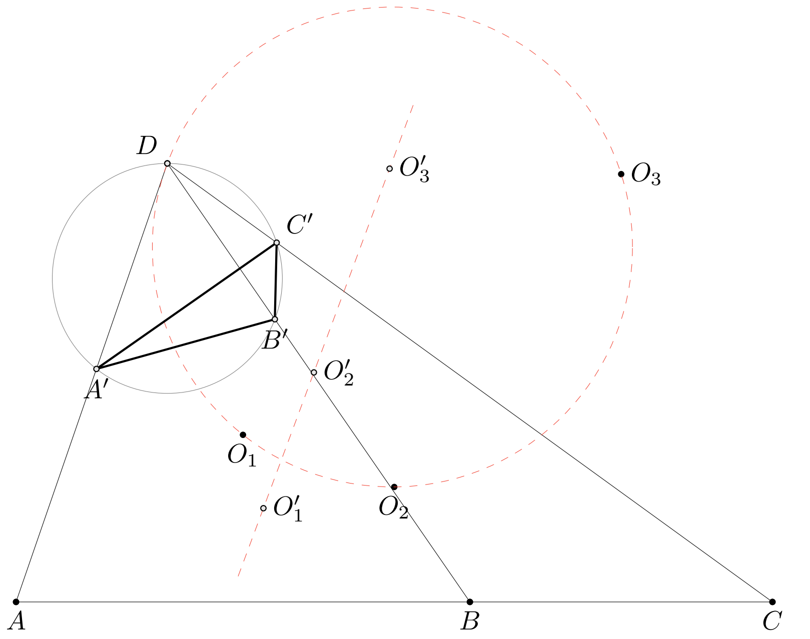
Rozwiązanie:
Zróbmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie M i promieniu $MA = MB$. Zauważmy, że okrąg ω przechodzi na prostą AB oraz, że punkt styczności do cięciwy AB przechodzi na punkt styczności do łuku AB. Stąd punkty styczności X oraz Y są swoimi obrazami inwersyjnymi. Leżą one zatem na jednej prostej ze środkiem inwersji.



Zadanie 8.
Punkty A, B, C leżą na jednej prostej. Punkt D leży poza prostą AB. Udowodnić, że środki okręgów $\odot(ABD)$, $\odot(ACD)$, $\odot(BDC)$ i punkt D leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Oznaczmy środek okręgu $\odot(ABD)$ jako O_1, środek okręgu $\odot(ACD)$ jako O_2 i środek okręgu $\odot(BCD)$ jako O_3. Rozważmy inwersję o środku w punkcie D i dowolnym promieniu. Wtedy punkty A', B', C' i D leżą na jednym okręgu. Zauważmy, że punkt O_1' leży na okręgu o środku w punkcie A' i promieniu $A'D$ oraz na okręgu o środku w punkcie B' i promieniu $B'D$. Punkt O_1' jest zatem odbiciem punktu D względem prostej $A'B'$. Analogicznie dowodzimy, że punkty O_2' i O_3' są odbiciami punktu D względem prostych $A'C'$ i $B'C'$. Punkty O_1', O_2' i O_3' leżą

zatem na prostej Steinera punktu D i trójkąta $A'B'C'$, są zatem współliniowe. Wynika stąd, że przed inwersją punkty D, O_1, O_2 i O_3 leżały na jednym okręgu, co należało pokazać.



Zadanie 9.
W trójkącie ABC dwusieczna kąta $\sphericalangle BAC$ przecina bok BC w punkcie D i okrąg $\odot(ABC)$ w punkcie E. Okrąg o średnicy DE przecina okrąg $\odot(ABC)$ w punkcie F. Udowodnić, że prosta AF to symediana w trójkącie ABC.

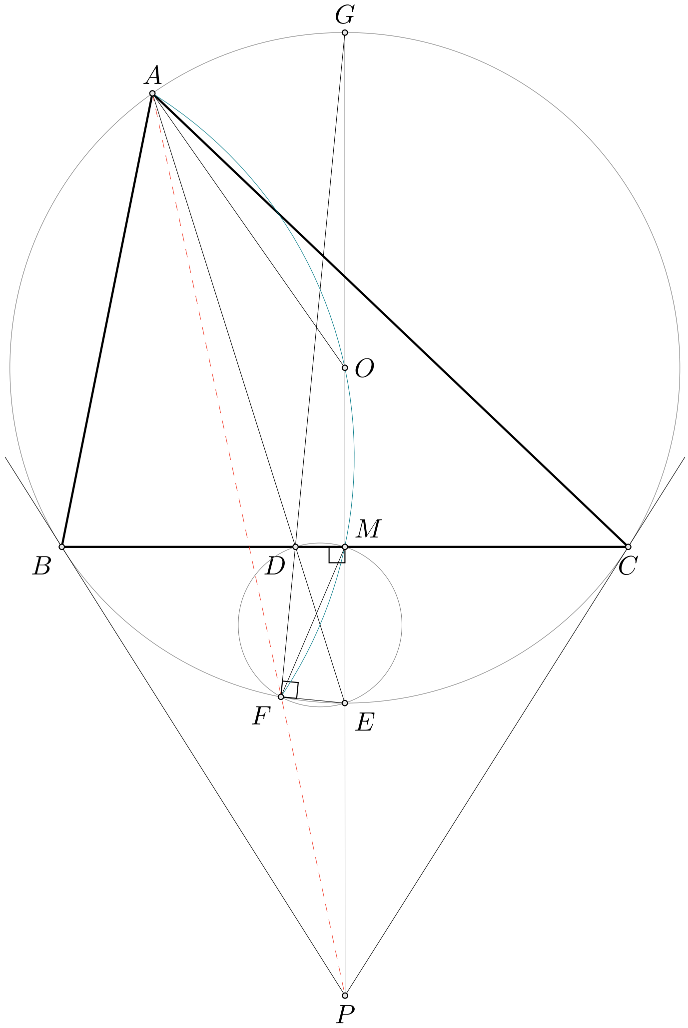
Rozwiązanie:
Rozważmy inwersję względem okręgu $\odot(ABC)$. Wtedy punkt przecięcia stycznych do okręgu $\odot(ABC)$ w punktach B i C przechodzi na środek BC, który oznaczmy przez M. Chcemy teraz wykazać, że punkty A, F, M, O leżą na jednym okręgu. Zauważmy, że punkt E jest środkiem łuku BC okręgu $\odot(ABC)$ niezawierającego punktu A. Niech punkt G będzie środkiem łuku BAC okręgu $\odot(ABC)$. Wówczas

$$\sphericalangle GFE = 90^\circ = \sphericalangle DFE,$$

więc punkty G, D, F są współliniowe. Stąd

$$\begin{aligned}\sphericalangle AFM &= \sphericalangle AFD + \sphericalangle DFM = \sphericalangle AFG + \sphericalangle DEM \\ &= \sphericalangle AEG + \sphericalangle AEG = 2\sphericalangle AEO = 180^\circ - \sphericalangle AOM,\end{aligned}$$

więc punkty A, F, M, O leżą na jednym okręgu, co trzeba było pokazać.



Zadanie 10.
Dany jest trójkąt ABC. Punkt I to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkt D leży na okręgu $\odot(AIC)$ i nie leży na odcinku BI. Punkt M to środek odcinka DI. Punkt M leży na okręgu $\odot(ABC)$. Udowodnić, że

$$\sphericalangle ICA = \sphericalangle MCD.$$

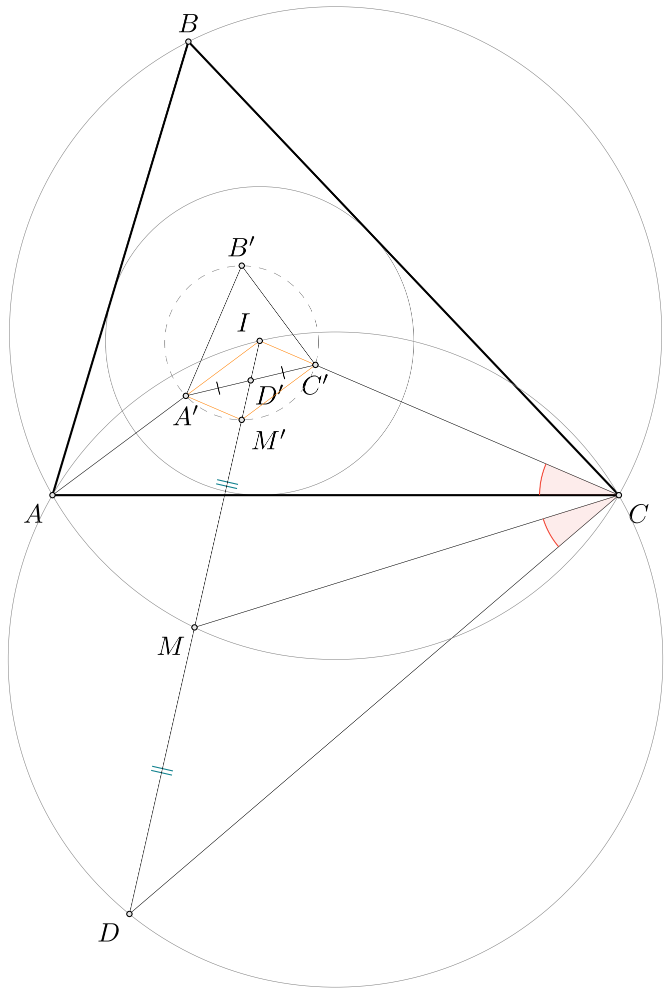
Rozwiązanie:
Zauważmy, że po inwersji względem okręgu wpisanego w trójkąt ABC punkt D przechodzi na punkt leżący na odcinku $A'C'$, a odbicie punktu I względem punktu D' – punkt M' – leży na okręgu $\odot(A'B'C')$. Ponieważ punkt I to ortocentrum trójkąta $A'B'C'$ i punkt D' nie leży na odcinku $B'I$, to punkt D' jest środkiem odcinka $A'C'$. Jest tak, ponieważ jedyne dwa punkty leżące na odcinku $A'C'$ takie, że punkt I odbity względem nich leży na okręgu opisanym na trójkącie $A'B'C'$, to spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka B', który leży na odcinku $B'I$, i środek odcinka $A'C'$. Stąd dostajemy, że czworokąt $IA'M'C'$ jest równoległobokiem. Zatem

$$\sphericalangle IA'C' = \sphericalangle A'C'M = 180^\circ - \sphericalangle C'D'M - \sphericalangle D'M'C = \sphericalangle ID'C' - \sphericalangle IM'C'.$$

oraz z własności inwersji

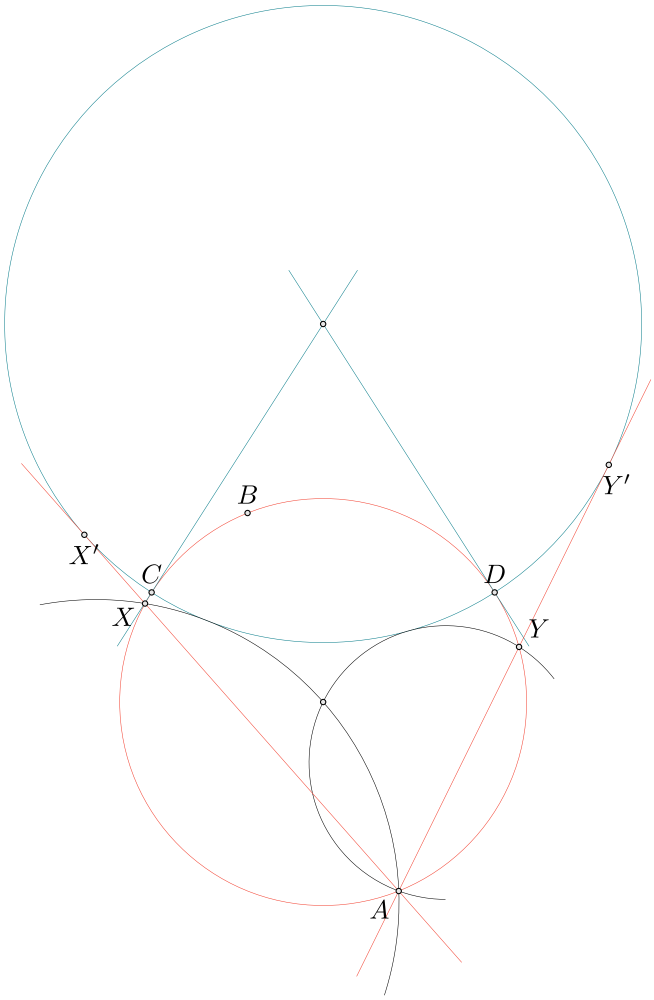
$$\sphericalangle ICA = \sphericalangle IA'C' = \sphericalangle ID'C' - \sphericalangle IM'C' = \sphericalangle ICD - \sphericalangle ICM = \sphericalangle MCD,$$

co należało dowieść.



Zadanie 11.
Dane są dwa okręgi ortogonalne: ω_1 i ω_2. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω_1, przy czym punkt B leży wewnątrz okręgu ω_2. Niech punkt O to środek okręgu ω_1. Okręgi γ_1 i γ_2 to okręgi przechodzące przez punkt A i punkt O oraz styczne do okręgu ω_2, odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnić, że punkty X, Y, O, B leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Rozważmy inwersję względem okręgu ω_1, wtedy punkty X i Y przechodzą na punkty styczności stycznych z punktu A do okręgu ω_2. Teza jest równoważna temu, że obrazy tych punktów są współliniowe z punktem B. Niech punkt B' będzie obrazem punktu B po inwersji względem okręgu ω_2. Ponieważ punkt B leży na okręgu ω_1, to punkt B' także, zatem $\sphericalangle AB'B = 90°$. Biegunowa punktu B względem okręgu ω_2 to prosta przechodząca przez punkt B' i prostopadła do prostej BB', przechodzi ona zatem przez punkt A. Z twierdzenia La Hire'a punkt B leży na biegunowej punktu A względem okręgu ω_2, tak samo jak punkty X' i Y', co kończy dowód.

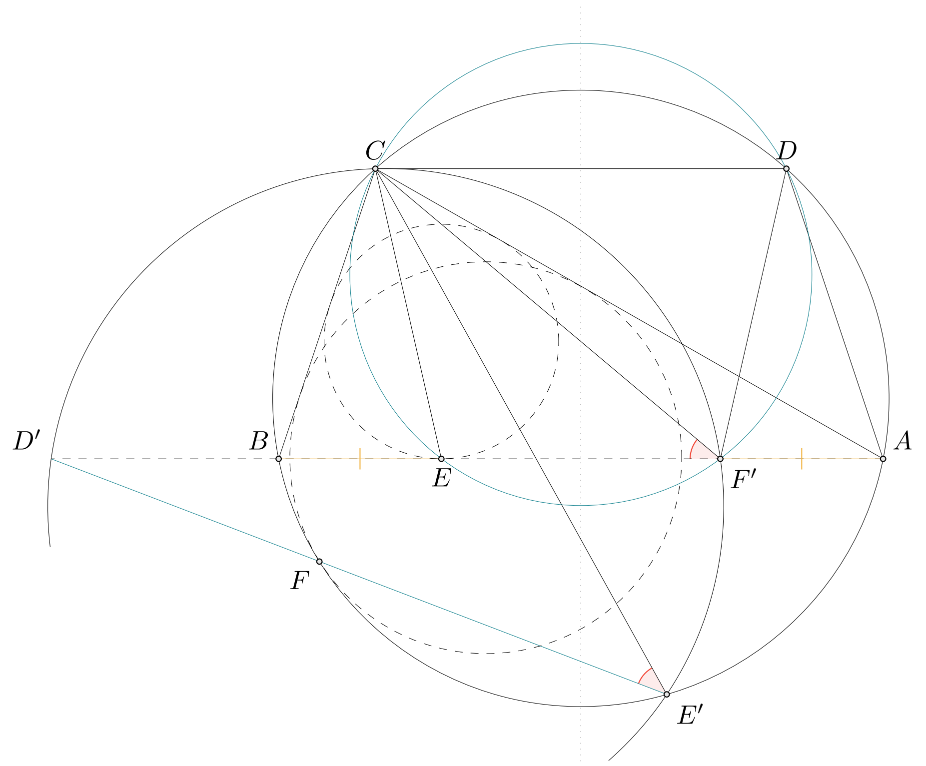


Zadanie 12.
Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o_1. Okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie F. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinka AB w punkcie E. Dowieść, że punkty E, F, D leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:
Zróbmy inwersję o promieniu $\sqrt{AC \cdot BC}$ złożoną z odbiciem przez dwusieczną kąta $\sphericalangle ACB$. Wtedy punkt F przejdzie na punkt styczności odcinka AB i okręgu C-dopisanego trójkąta ABC, zaś punkt E na punkt na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Znanym faktem jest, że wówczas $AE = BF'$, więc symetria względem symetralnej odcinka AB przekształca punkt E w punkt F' i punkt C w punkt D (każdy trapez wpisany w okrąg jest równoramienny). Stąd dostajemy, że czworokąt $CEF'D$ jest trapezem równoramiennym, czyli jest wpisany w okrąg. Oznacza to, że po inwersji punkty D', F, E' są współliniowe. Punkt D' leży na prostej AB, ponieważ punkt D leżał na okręgu $\odot(ABC)$. Z własności inwersji

$$\sphericalangle CE'D' = \sphericalangle CE'F = \sphericalangle CF'E = \sphericalangle CF'D',$$

więc punkty C, D', E', F' leżą na jednym okręgu. Oznacza to, że przed inwersją punkty D, E, F były współliniowe, co należało dowieść.

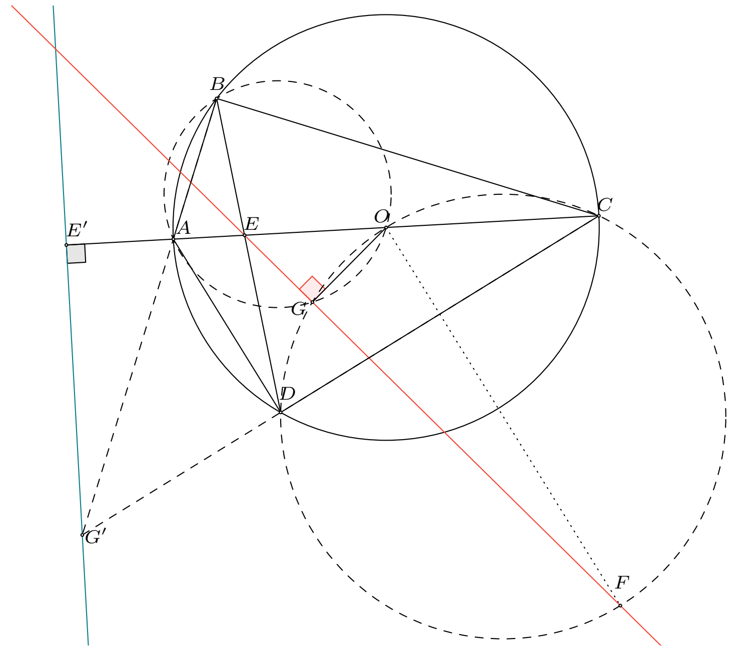


Zadanie 13.
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o średnicy AC. Punkt E to przecięcie odcinków AC i BD. Punkt F to taki punkt na okręgu $\odot(COD)$, że odcinek OF to średnica okręgu $\odot(COD)$. Punkt G to przecięcie okręgów $\odot(AOB)$ i $\odot(COD)$. Udowodnić, że punkty G, F i E są współliniowe.

Rozwiązanie:
Zróbmy inwersję względem okręgu $\odot(ABCD)$ i zauważmy, że punkt G przechodzi na punkt przecięcia prostych AB i CD. Z twierdzenia Brocarda wynika, że punkt ten leży na biegunowej punktu E względem okręgu $\odot(ABCD)$. Wobec tego

$$\sphericalangle OE'G' = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle OGE = 90^\circ = \sphericalangle OGF,$$

czyli punkty E, F, G są współliniowe, co trzeba było pokazać.



Zadanie 14. (Inwersja ujemna)
Dany jest trójkąt ABC, przy czym $AB > AC$. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Punkt F jest spodkiem wysokości z punktu A, punkt M to środek odcinka BC, zaś punkt Q to taki punkt na okręgu $\odot(ABC)$, że $\sphericalangle AQH = 90°$. Punkt K to taki punkt na okręgu $\odot(ABC)$, że $\sphericalangle QKH = 90°$. Załóżmy, że punkty A, B, C, K, Q leżą na okręgu $\odot(ABC)$ w tej kolejności. Udowodnić, że okręgi $\odot(KHQ)$ i $\odot(KFM)$ są styczne.

Rozwiązanie:
Niech punkt H' będzie odbiciem symetrycznym punktu H względem punktu M. Znanym faktem jest, że wówczas odcinek AH' jest średnicą okręgu $\odot(ABC)$. Wynika stąd, że punkty H', H, Q są współliniowe i także punkty H, M, Q są współliniowe. Rozważmy inwersję negatywną o środku w punkcie H i takim promieniu, że okrąg dziewięciu punktów przechodzi na okrąg opisany na trójkącie ABC. Wówczas w tej inwersji:

- punkty A oraz F przechodzą na siebie nawzajem,
- punkty Q oraz M przechodzą na siebie nawzajem,
- punkty K oraz L przechodzą na siebie nawzajem.

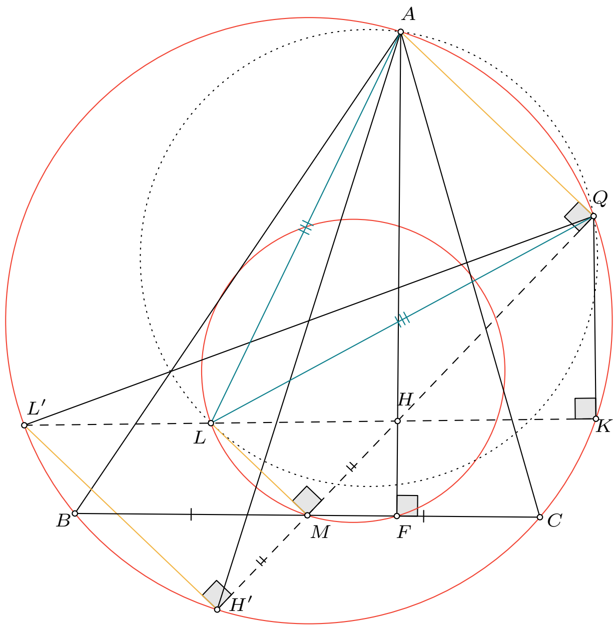
Teza jest równoważna temu, że prosta ML jest styczna do okręgu $\odot(AQL)$. Zauważmy, że proste LM i AQ są równoległe (ponieważ $\sphericalangle HML = \sphericalangle HKQ = 90° = \sphericalangle HQA$). Mamy też, że punkt L leży na okręgu dziewięciu punktów trójkąta ABC. Jednokładność o środku w punkcie H i skali 2 zamienia okrąg dziewięciu punktów trójkąta ABC w okrąg $\odot(ABC)$, więc zamienia punkt L w punkt L' leżący na okręgu $\odot(ABC)$ oraz zamienia punkt M w punkt H'. Z własności jednokładności wynika, że

$$\sphericalangle QH'L' = \sphericalangle HH'L' = \sphericalangle HML = 90°,$$

czyli odcinek QL' jest średnicą okręgu $\odot(ABC)$. Ale odcinek AH' także jest średnicą okręgu $\odot(ABC)$, więc

$$LM = \frac{L'H'}{2} = \frac{AQ}{2}.$$

Stąd i z równoległości prostych LM i AQ wynika, że $LA = LQ$. Wtedy styczna do okręgu $\odot(LAQ)$ w punkcie L jest prostą równoległą do prostej AQ przechodzącą przez punkt L, czyli prostą LM, co było do udowodnienia. Zauważamy, że odcinek LT jest prostopadły do prostej AQ i $AO = AQ$, co kończy dowód.



Teoria grafów

Maciej Anioł

Stopień wierzchołka

Zadanie 1.
Na zjazd MIKO zaproszono wiele osób. Niektórzy uczestnicy podali sobie ręce. Pokazać, że liczba osób, które uścisnęły dłoń nieparzyście wielu uczestnikom imprezy, jest parzysta.

Zadanie 2.
Każde miasto połączone jest dwukierunkową drogą z dokładnie 100 innymi miastami, tak że z każdego miasta można dojechać do każdego innego. Pokazać, że po usunięciu jednej z dróg wciąż z każdego miasta będzie można dojechać do każdego innego.

Zadanie 3. (USAMO 1989 P2)
W turnieju tenisa 20 zawodników rozegrało łącznie 14 meczów, przy czym każdy zawodnik rozegrał przynajmniej jeden mecz. Udowodnić, że w pewnych 6 meczach zagrało 12 różnych zawodników.

Grafy eulerowskie

Definicja (Ścieżka i cykl Eulera)

Ścieżka Eulera to taka ścieżka w grafie, która przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz. Graf, w którym istnieje ścieżka Eulera, nazywamy *półeulerowskim*.

Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz. Graf, w którym istnieje cykl Eulera, nazywamy *eulerowskim*.

Twierdzenie

Graf spójny jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego wierzchołki są parzystego stopnia.

Graf spójny jest półeulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy liczba jego wierzchołków o nieparzystym stopniu jest równa 0 lub 2.

Udowodnimy powyższe twierdzenie. Niech C będzie cyklem Eulera w grafie G i niech v będzie dowolnym wierzchołkiem. Każdą z krawędzi incydentnych do v kolorujemy na czerwono, jeśli cykl C wchodzi tą krawędzią do wierzchołka v, lub na niebiesko, jeśli cykl C opuszcza tą krawędzią wierzchołek v. Ponieważ możemy przejść cyklem C, zaczynając i kończąc w wierzchołku v, krawędzi niebieskich musi być tyle samo co czerwonych. Zatem v jest parzystego stopnia. Wobec dowolności wyboru v wszystkie wierzchołki grafu G są parzystego stopnia.

Załóżmy teraz, że wszystkie wierzchołki grafu G są parzystego stopnia. Zaczynamy w pewnym wierzchołku s i spacerujemy kolejnymi krawędziami, przechodząc każdą krawędzią co najwyżej raz, aż ponownie odwiedzimy wierzchołek s. Należy przy tym zauważyć, że z parzystości stopni każdy wierzchołek różny od s możemy opuścić. Niech C będzie otrzymanym cyklem. Usuńmy wówczas z grafu krawędzie należące do C. Zauważmy, że po wykonaniu tej operacji wciąż każdy wierzchołek jest parzystego stopnia (być może zero). Dopóki istnieje krawędź nienależąca do cyklu C, wybieramy nowy wierzchołek s leżący na cyklu C, z którego wychodzi taka krawędź (wierzchołek taki istnieje wobec spójności G) i powtarzamy opisaną wcześniej procedurę. Otrzymany w ten sposób cykl C' dołączamy do cyklu C, tak że przechodzimy najpierw cyklem C do pierwszego odwiedzenia s, następnie przechodzimy C' i kontynuujemy cyklem C. Na mocy przedstawionego rozumowania graf G jest eulerowski.

Jeśli ścieżka Eulera P w grafie G zaczyna się w wierzchołku s i kończy w t, to albo $s = t$ i graf G jest eulerowski (nie ma wierzchołków nieparzystego stopnia), albo $s \neq t$ i po dodaniu krawędzi (s, t) otrzymujemy graf eulerowski – wówczas s i t są jedynymi wierzchołkami nieparzystego stopnia. Analogicznie, jeśli graf G ma dokładnie dwa wierzchołki nieparzystego stopnia, to łączymy je krawędzią i stosujemy powyższą konstrukcję cyklu Eulera. Po usunięciu dodanej krawędzi otrzymujemy ścieżkę Eulera.

Zadanie 4.
Rozstrzygnąć, czy skoczek może przejść po szachownicy 8×8 w taki sposób, aby z każdej pary wzajemnie odwrotnych ruchów wystąpił dokładnie jeden z nich. Odpowiedzieć na pytanie również dla króla i wieży.

Zadanie 5.
W spotkaniu bierze udział $2n + 1$ osób, przy czym każda z nich przyjaźni się (z wzajemnością) z dokładnie n innymi osobami. Pokazać, że zgromadzeni mogą przekazywać sobie piłkę, tak że zostanie ona podana dokładnie raz między każdą parą osób, które się przyjaźnią i wróci do osoby, która miała ją na początku.

Zadanie 6. (IMO 2020 P3)
Dane jest $4n$ kamyków o wagach kolejno $1, 2, \ldots, 4n$. Każdy kamyk jest w jednym z n kolorów i są dokładnie 4 kamyki każdego koloru. Pokazać, że kamyki można podzielić na dwa stosy, spełniając przy tym następujące warunki.

- Suma wag kamyków na obu stosach jest równa.
- Każdy stos zawiera po dwa kamyki każdego koloru.

Twierdzenie Halla

Definicja (Skojarzenie)

Skojarzeniem nazywamy podzbiór M krawędzi grafu o tej własności, że każdy wierzchołek grafu jest końcem co najwyżej jednej krawędzi z M.

Twierdzenie (Halla)

Niech $G = (A \sqcup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Skojarzenie M o tej własności, że każdy wierzchołek ze zbioru A jest końcem pewnej krawędzi z M, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subseteq A$ zachodzi
$$|S| \leqslant |N(S)|,$$
przy czym $N(S)$ to zbiór wszystkich wierzchołków połączonych krawędzią z pewnym wierzchołkiem w S.

Po dowód powyższego twierdzenia Czytelnik zechce zajrzeć na stronę 142.

Zadanie 7.
Niech n będzie liczbą naturalną i niech $S_1, S_2, \ldots, S_n$ będą takimi podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ suma każdych k zbiorów spośród $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ma co najmniej k elementów. Udowodnić, że istnieje taka permutacja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że $a_i \in S_i$.

Zadanie 8. (Baltic Way 2013 P6)
Święty Mikołaj ma co najmniej n prezentów dla n dzieci. Wiadomo, że k-te dziecko uważa dokładnie $x_k > 0$ spośród tych prezentów za pożądane. Ponadto
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leqslant 1.$$
Udowodnić, że Mikołaj może obdarować każde dziecko takim prezentem, który to dziecko uważa za pożądany.

Zadanie 9.
Wszystkie wierzchołki grafu dwudzielnego $G = (A \sqcup B, E)$ są stopnia $d \geqslant 1$. Udowodnić, że w grafie G istnieje skojarzenie rozmiaru co najmniej $\min\{|A|, |B|\}$.

Zadanie 10. (Zwardoń 2008, zadanie 16)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Tablica $n \times n$ jest wypełniona liczbami 0 i 1, tak że każdy podzbiór n pól, z których żadne dwa nie leżą w tej samej kolumnie ani w tym samym wierszu, zawiera co najmniej jedno pole z liczbą 0. Udowodnić, że można tak wybrać k wierszy oraz l kolumn, że $k + l > n$ oraz w każde pole leżące jednocześnie w wybranym wierszu i w wybranej kolumnie jest wpisane 0.

Zadanie 11.
Dany jest graf dwudzielny $G = (A \sqcup B, E)$, w którym największy ze stopni wierzchołków jest równy Δ. Wykazać, że w grafie G istnieje skojarzenie rozmiaru co najmniej $|E|/\Delta$.

Zasada ekstremum

Zadanie 12.
Każdy wierzchołek grafu G jest stopnia co najmniej δ. Wykazać, że w grafie G jest ścieżka długości co najmniej δ.

Zadanie 13. (Balkan MO 2002)
Każdy wierzchołek grafu G jest stopnia co najmniej 3. Udowodnić, że G zawiera cykl parzystej długości.

Zadanie 14.
Graf $G = (V, E)$ jest spójny oraz $|V| = 2n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że istnieje taki podzbiór $E' \subseteq E$, że każdy wierzchołek grafu (V, E') jest nieparzystego stopnia.

Rozwiązania

Autor rozwiązań: Maciej Anioł.

Zadanie 1.
Na zjazd MIKO zaproszono wiele osób. Niektórzy uczestnicy podali sobie ręce. Pokazać, że liczba osób, które uścisnęły dłoń nieparzyście wielu uczestnikom imprezy, jest parzysta.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf, którego wierzchołki reprezentują uczestników zjazdu, a krawędzie – uściski dłoni. Zauważmy, że suma stopni wszystkich wierzchołków jest parzysta, ponieważ jest równa dwukrotności liczby krawędzi.

Gdyby liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu była nieparzysta, to suma stopni wszystkich wierzchołków również byłaby nieparzysta, wbrew powyższej obserwacji. To kończy dowód.

Zadanie 2.
Każde miasto połączone jest dwukierunkową drogą z dokładnie 100 innymi miastami, tak że z każdego miasta można dojechać do każdego innego. Pokazać, że po usunięciu jednej z dróg wciąż z każdego miasta będzie można dojechać do każdego innego.

Rozwiązanie:
Naturalnie interpretujemy miasta jako wierzchołki grafu, a drogi – jako nieskierowane krawędzie w tym grafie. Załóżmy, że usunięta droga prowadzi z miasta A do miasta B. Jeśli wciąż można dojechać z miasta A do B, to teza jest oczywiście prawdziwa. Przypuśćmy zatem, że po usunięciu tej drogi nie da się dojechać z A do B. Wówczas A jest jedynym wierzchołkiem o nieparzystym stopniu w spójnej składowej grafu, do której należy. To jednak niemożliwe na mocy poprzedniego zadania.

Zadanie 3. (USAMO 1989 P2)
W turnieju tenisa 20 zawodników rozegrało łącznie 14 meczów, przy czym każdy zawodnik rozegrał przynajmniej jeden mecz. Udowodnić, że w pewnych 6 meczach zagrało 12 różnych zawodników.

Rozwiązanie:
Skonstruujmy graf, w którym wierzchołkami są gracze, a krawędź między nimi występuje wtedy i tylko wtedy, gdy rozegrali oni między sobą mecz.

Niech d_k oznacza stopień k-tego wierzchołka. Dla każdego wierzchołka wybierzmy dowolnie $d_k - 1$ spośród wychodzących z niego krawędzi i oznaczmy je do usunięcia. Następnie usuńmy każdą z oznaczonych krawędzi. Zauważmy, że w ten sposób usuniemy co najwyżej

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{20} - 20 = 2 \cdot 14 - 20 = 8$$

krawędzi, zatem zostanie przynajmniej 6 nieusuniętych krawędzi. Ponadto po przeprowadzeniu opisanej procedury z każdego wierzchołka wychodzi co najwyżej jedna krawędź. Zatem dowolnie wybrane 6 krawędzi spośród pozostałych odpowiada meczom o żądanej własności.

Zadanie 4.
Rozstrzygnąć, czy skoczek może przejść po szachownicy 8×8 w taki sposób, aby z każdej pary wzajemnie odwrotnych ruchów wystąpił dokładnie jeden z nich. Odpowiedzieć na pytanie również dla króla i wieży.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że chodzi o zbadanie istnienia ścieżki Eulera w grafie, gdzie wierzchołkami są pola szachownicy, a krawędziami – dozwolone ruchy między nimi. Należy więc policzyć wierzchołki nieparzystego stopnia.

(i) Zauważmy, że z dowolnego z 8 pól bezpośrednio sąsiadujących z polem w rogu szachownicy możemy przejść do dokładnie 3 różnych pól.

(ii) W przypadku króla łatwo zauważyć, że z każdego z pól na brzegu szachownicy można przejść do nieparzyście wielu pól.

(iii) Dla wieży nie ma wierzchołków nieparzystego stopnia, ponieważ niezależnie od wyboru pola wieża może przejść do 14 różnych pól.

Wobec powyższego odpowiedź jest twierdząca tylko dla wieży.

Zadanie 5.
W spotkaniu bierze udział $2n+1$ osób, przy czym każda z nich przyjaźni się (z wzajemnością) z dokładnie n innymi osobami. Pokazać, że zgromadzeni mogą przekazywać sobie piłkę, tak że zostanie ona podana dokładnie raz między każdą parą osób, które się przyjaźnią i wróci do osoby, która miała ją na początku.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf G, w którym wierzchołkami są osoby biorące udział w spotkaniu oraz krawędź między osobami A i B występuje wtedy i tylko wtedy, gdy A przyjaźni się z B.

Wykażemy najpierw, że graf G jest spójny. Weźmy dowolne dwa wierzchołki A i B. Zauważmy, że pozostałych wierzchołków jest $2n-1$. Ponieważ każdy z wierzchołków A i B jest stopnia n, z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje wierzchołek połączony krawędzią zarówno z A, jak i z B.

Ponieważ suma stopni wierzchołków jest parzysta, liczba $n(2n+1)$ musi być parzysta, z czego wnioskujemy, że liczba n też jest parzysta. Ponieważ wszystkie wierzchołki grafu spójnego G są parzystego stopnia, graf G jest eulerowski, co kończy dowód.

Zadanie 6. (IMO 2020 P3)
Dane jest $4n$ kamyków o wagach kolejno $1, 2, \ldots, 4n$. Każdy kamyk jest w jednym z n kolorów i są dokładnie 4 kamyki każdego koloru. Pokazać, że kamyki można podzielić na dwa stosy, spełniając przy tym następujące warunki.

- Suma wag kamyków na obu stosach jest równa.
- Każdy stos zawiera po dwa kamyki każdego koloru.

Rozwiązanie:
Skonstruujmy $2n$ par kamyków, tak aby w każdej z par suma wag kamyków była równa $4n+1$. Rozważmy graf, którego wierzchołkami są kolory, a każdej z utworzonych par odpowiada krawędź (być może pętla) między kolorami kamyków tworzących tę parę. Zauważmy, że wówczas każdy wierzchołek ma stopień 4 (przyjmujemy tu standardową konwencję, że pętla zwiększa stopień wierzchołka o 2).

Czytelnik zechce przekonać się, że warunek konieczny i dostateczny istnienia cyklu Eulera jest prawdziwy także dla grafów z pętlami. Wobec tego każda spójna składowa jest grafem eulerowskim i zbiór krawędzi rozważanego grafu dzielimy na rozłączne cykle Eulera dla spójnych składowych. Każdy z otrzymanych cykli jest parzystej długości, ponieważ w spójnej składowej o m wierzchołkach jest dokładnie $2m$ krawędzi.

Teraz z każdego cyklu wybierzmy co drugą krawędź, po czym wszystkie kamyki z par odpowiadających wybranym krawędziom umieśćmy na pierwszym stosie, a pozostałe – na drugim stosie. Wówczas otrzymamy podział spełniający warunki zadania.

Zadanie 7.
Niech n będzie liczbą naturalną i niech $S_1, S_2, \ldots, S_n$ będą takimi podzbiorami zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ suma każdych k zbiorów spośród $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ma co najmniej k elementów. Udowodnić, że istnieje taka permutacja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że $a_i \in S_i$.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf dwudzielny o wierzchołkach $\{1, \ldots, n\} \sqcup \{1, \ldots, n\}$, w którym krawędź (i, j) występuje wtedy i tylko wtedy, gdy $j \in S_i$. Wówczas teza wynika z twierdzenia Halla.

Zadanie 8. (Baltic Way 2013 P6)
Święty Mikołaj ma co najmniej n prezentów dla n dzieci. Wiadomo, że k-te dziecko uważa dokładnie $x_k > 0$ spośród tych prezentów za pożądane. Ponadto

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leqslant 1.$$

Udowodnić, że Mikołaj może obdarować każde dziecko takim prezentem, który to dziecko uważa za pożądany.

Rozwiązanie:
Dowolnie wybierzmy $k \leqslant n$ dzieci o numerach $d_1, \ldots, d_k$. Niech $y_i = x_{d_i}$. Zauważmy, że z założenia wynika $1/y_1 + \cdots + 1/y_k \leqslant 1$. Wówczas z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną mamy

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_k}{k} \geqslant \frac{k}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_k}} \geqslant k.$$

Zatem $y_1 + \cdots + y_k \geqslant k^2$. Niech a_j będzie liczbą prezentów pożądanych przez dziecko d_j, które nie są pożądane przez żadne z dzieci d_i dla $i < j$. Zauważmy, że $y_i \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Stąd

$$k(a_1 + \cdots + a_k) \geqslant ka_1 + (k-1)a_2 + \cdots + a_k \geqslant y_1 + \cdots + y_k \geqslant k^2,$$
$$\text{więc} \quad a_1 + \cdots + a_k \geqslant k.$$

Czytelnik zechce skorzystać teraz z twierdzenia Halla dla odpowiednio skonstruowanego grafu.

Zadanie 9.
Wszystkie wierzchołki grafu dwudzielnego $G = (A \sqcup B, E)$ są stopnia $d \geqslant 1$. Udowodnić, że w grafie G istnieje skojarzenie rozmiaru co najmniej $\min\{|A|, |B|\}$.

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności niech $|A| \leqslant |B|$. Jeśli $S \subseteq A$, to dokładnie $d|S|$ różnych krawędzi jest incydentnych do pewnego wierzchołka ze zbioru S. Analogicznie dokładnie $d|N(S)|$ krawędzi ma koniec ze zbioru $N(S)$. Ponieważ z definicji $N(S)$ każda krawędź wychodząca z wierzchołka ze zbioru S ma drugi koniec w zbiorze $N(S)$, zachodzi nierówność

$$d|S| \leqslant d|N(S)|.$$

Wobec tego spełniony jest warunek Halla, skąd wynika teza twierdzenia.

Zadanie 10. (Zwardoń 2008, zadanie 16)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Tablica $n \times n$ jest wypełniona liczbami 0 i 1, tak że każdy podzbiór n pól, z których żadne dwa nie leżą w tej samej kolumnie ani w tym samym wierszu, zawiera co najmniej jedno pole z liczbą 0. Udowodnić, że można tak wybrać k wierszy oraz l kolumn, że $k + l > n$ oraz w każde pole leżące jednocześnie w wybranym wierszu i w wybranej kolumnie jest wpisane 0.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf dwudzielny G o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\} \sqcup \{1, \ldots, n\}$, w którym krawędź (r, c) występuje wtedy i tylko wtedy, gdy na przecięciu r-tego wiersza oraz c-tej kolumny znajduje się liczba 1.

Wówczas z założenia wynika, że w grafie G nie istnieje skojarzenie rozmiaru n. Korzystamy teraz z twierdzenia Halla w przeciwną stronę niż dotychczas i wnioskujemy, że istnieje taki podzbiór wierszy $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, że

$$|S| > |N(S)|.$$

Rozważmy teraz kolumny $C = \{1, \ldots, n\} \setminus N(S)$. Wtedy

$$|S| + |C| = |S| + (n - |N(S)|) > n$$

oraz z definicji grafu G na przecięciu wiersza z S oraz kolumny z C znajduje się liczba 0. To kończy dowód.

Zadanie 11.
Dany jest graf dwudzielny $G = (A \sqcup B, E)$, w którym największy ze stopni wierzchołków jest równy Δ. Wykazać, że w grafie G istnieje skojarzenie rozmiaru co najmniej $|E|/\Delta$.

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności niech $|A| \geqslant |B|$. Skonstruujmy graf $G' = (A \sqcup B', E')$ następująco. Zbiór B' powstaje przez dodanie $|A| - |B|$ wierzchołków do B, początkowo izolowanych. Zauważmy, że suma stopni wierzchołków z A jest równa sumie stopni wierzchołków z B' – każda z nich równa jest liczbie krawędzi grafu. Możemy zatem dodawać krawędzie parami wierzchołków $a \in A$, $b \in B'$ stopnia mniejszego niż Δ, aż każdy wierzchołek będzie stopnia dokładnie Δ. W ten sposób otrzymujemy multizbiór krawędzi $E' \supseteq E$.

Następnie korzystamy Δ-krotnie z Zadania 9, aby otrzymać podział zbioru E' na Δ skojarzeń, każde rozmiaru $|A|$. Na mocy zasady szufladkowej Dirichleta jest wśród nich takie skojarzenie M, które zawiera co najmniej $|E|/\Delta$ oryginalnych krawędzi grafu. Wówczas $M \cap E$ jest skojarzeniem odpowiedniego rozmiaru w G.

Zadanie 12.
Każdy wierzchołek grafu G jest stopnia co najmniej δ. Wykazać, że w grafie G jest ścieżka długości co najmniej δ.

Rozwiązanie:
Niech P będzie dowolną ścieżką maksymalnej długości i niech $x_0, x_1, \ldots, x_k$ będą kolejnymi wierzchołkami na tej ścieżce. Przypuśćmy, że $k < \delta$. Wówczas wierzchołek x_0 jest połączony krawędzią z pewnym wierzchołkiem v różnym od $x_1, \ldots, x_k$. Stąd jednak istnieje ścieżka dłuższa od P, powstała przez przedłużenie P o krawędź (v, x_0). Wobec otrzymanej sprzeczności musi zachodzić $k \geqslant \delta$, co było do wykazania.

Zadanie 13. (Balkan MO 2002)
Każdy wierzchołek grafu G jest stopnia co najmniej 3. Udowodnić, że G zawiera cykl parzystej długości.

Rozwiązanie:
Niech P będzie dowolną ścieżką maksymalnej długości i niech $x_0, x_1, \ldots, x_k$ będą kolejnymi wierzchołkami na tej ścieżce. Analogicznie jak w poprzednim zadaniu wnioskujemy, że x_0 nie może sąsiadować z żadnym wierzchołkiem poza ścieżką P. Niech x_1, x_a, x_b, $1 < a < b$ będą sąsiadami x_0. Wówczas pewne dwie spośród liczb $1, a, b$ są tej samej parzystości. Dla ustalenia uwagi niech będą to a i b. Wówczas wskazujemy cykl

$$(x_0,\, x_a,\, x_{a+1},\, \ldots,\, x_{b-1},\, x_b,\, x_0)$$

długości $b - a + 2$, co kończy dowód.

Zadanie 14.
Graf $G = (V, E)$ jest spójny oraz $|V| = 2n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że istnieje taki podzbiór $E' \subseteq E$, że każdy wierzchołek grafu (V, E') jest nieparzystego stopnia.

Rozwiązanie:
Powiemy, że zbiór $W \subseteq V$ jest *dobry*, jeśli istnieje taki podzbiór $F \subseteq E$, że każdy wierzchołek grafu (W, F) jest nieparzystego stopnia. Niech S będzie dobrym zbiorem o maksymalnej mocy. Przypuśćmy, że $S \neq V$. Zauważmy, że liczba $|S|$ jest parzysta na mocy Zadania 1. Zatem istnieją różne wierzchołki $u, v \in V \setminus S$. Ponieważ graf G jest spójny, niezależnie od wyboru u i v istnieje ścieżka łącząca te wierzchołki. Weźmy teraz taką parę wierzchołków $u, v \in V \setminus S$, że łącząca je ścieżka jest możliwie najkrótsza.

Zauważmy, że wszystkie wierzchołki wewnętrzne na najkrótszej ścieżce między u i v należą do zbioru S. W przeciwnym wypadku mielibyśmy sprzeczność z minimalnością. Niech P będzie zbiorem krawędzi należących do tej ścieżki. Rozważmy zbiór

$$F' = (F \cup P) \setminus (F \cap P),$$

przy czym F jest takim podzbiorem krawędzi, że każdy wierzchołek (S, F) jest nieparzystego stopnia. Czytelnik zechce przekonać się, że każdy wierzchołek w grafie $(S \cup \{u, v\}, F')$ jest nieparzystego stopnia. Stąd jednak $S \cup \{u, v\}$ jest dobry wbrew maksymalności S. Wobec otrzymanej sprzeczności musi zachodzić $S = V$. To kończy dowód.

Potęga punktu

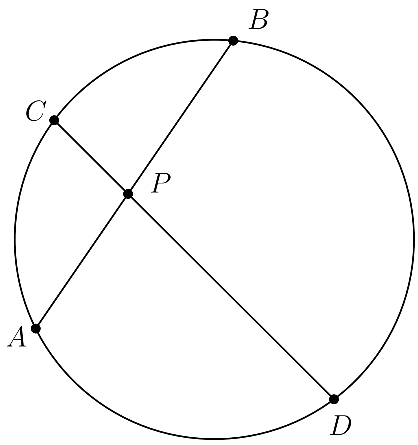
Miłosz Płatek

Definicja (Potęga punktu)

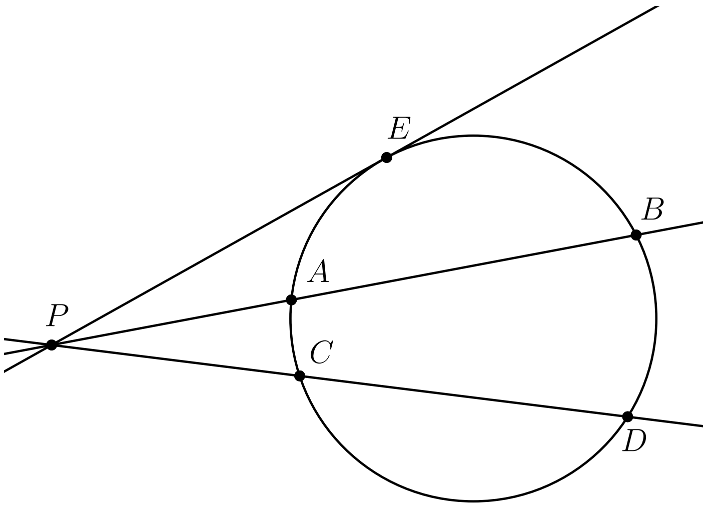
Na płaszczyźnie dany jest punkt P oraz okrąg ω o środku w punkcie O. Prosta k przechodzi przez punkt P i przecina okrąg ω w punktach A i B. Wówczas potęgą punktu P nazywamy

$$\mathrm{pot}(P,\omega) = \pm(PO^2 - r^2) = \pm PA \cdot PB,$$

gdzie r to promień okręgu ω. Jeśli punkt P leży wewnątrz okręgu ω, to znak jest ujemny, a jeśli punkt P leży na zewnątrz okręgu ω, to znak jest dodatni.



Rysunek 1: $AP \cdot PB = CP \cdot PD$



Rysunek 2: $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$

Twierdzenie (Twierdzenie o osi potęgowej)

Niech dane będą dwa okręgi, które nie są współśrodkowe. Miejscem geometrycznym punktów o równej potędze względem tych dwóch okręgów jest prosta prostopadła do prostej łączącej środki tych okręgów.

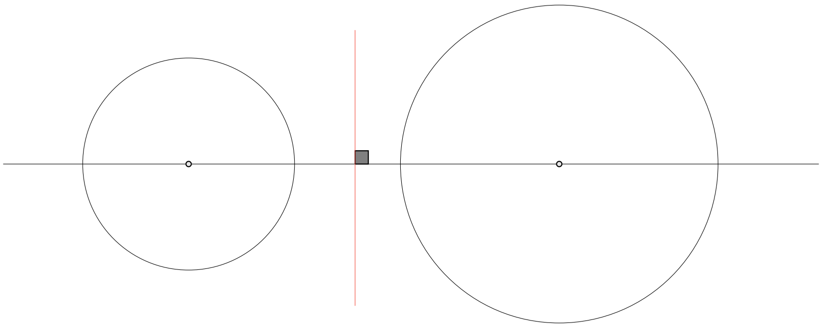
Dowód. Oznaczmy te okręgi jako ω_1 i ω_2, środki tych okręgów jako O_1 i O_2, a ich promienie jako r_1 i r_2. Weźmy punkt K na odcinku O_1O_2 taki, że potęga punktu K względem tych okręgów jest taka sama. Poprowadźmy prostą prostopadłą do prostej O_1O_2 przez punkt K. Weźmy dowolny punkt P na tej prostej. Wtedy

$$\text{pot}(P, \omega_1) = PO_1^2 - r_1^2 = KO_1^2 + KP^2 - r_1^2 = \text{pot}(K, \omega_1) + KP^2.$$

Analogicznie

$$\text{pot}(P, \omega_2) = \text{pot}(K, \omega_2) + KP^2.$$

Stąd $\text{pot}(P, \omega_1) = \text{pot}(P, \omega_2)$. Czytelnik zechce sprawdzić, że punkt o równej potędze względem dwóch nie współśrodkowych okręgów zawsze istnieje. □



Rysunek 3: Oś potęgowa

Uwaga: Często w zadaniach przydatnym okazuje się rozpatrzenie zdegenerowanego okręgu, to znaczy okręgu będącego punktem (okręgu o promieniu zero).

Twierdzenie (Potęgowe kryterium współokręgowości punktów)

Dany jest czworokąt $ABCD$ na płaszczyźnie. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P, gdzie punkt P leży albo na obu odcinkach AB i CD, albo nie leży na żadnym z nich. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Dowód. Przeprowadzamy rozumowanie w dwie strony

Niech czworokąt $ABCD$ jest cykliczny. Wtedy

$$PA \cdot PB = \text{pot}(P, \odot(ABCD)) = PC \cdot PD.$$

Załóżmy, że zachodzi $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Niech punkty A, B, C są współliniowe. Wtedy, ponieważ proste AB i CD przecinają się wyłącznie w punkcie P, to $P = C$. Skoro

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = 0,$$

to punkt P jest jednym z punktów A, B. Wtedy mamy do czynienia z trzema punktami, a przez trzy punkty da się przeprowadzić okrąg.

Niech punkty A, B, C nie są współliniowe. Poprowadźmy przez nie okrąg ω. Niech punkt D' będzie drugim punktem przecięcia prostej CD z okręgiem ω (jeżeli prosta jest styczna, to rozważamy $D = C'$). Teza jest równoważna udowodnieniu $D = D'$. Wówczas z pierwszej części dowodu zachodzi

$$\text{pot}(P, \omega) = \pm PA \cdot PB = \pm PC \cdot PD' = \pm PC \cdot PD,$$

czyli $PD = PD'$. Przypuśćmy, że P jest środkiem odcinka DD'. Niech punkt P leży na odcinku CD. Wówczas punkt P leży też na odcinku AB. Jednak to by oznaczało, że

$$\text{pot}(P, \omega) = -PA \cdot PB = -PC \cdot PD' = -PC \cdot PD,$$

czyli punkt P leży na odcinku CD. Jak jednak ustaliliśmy, punkty D, P, D', C leżą w tej kolejności na prostej – sprzeczność. Analogicznie jeśli punkt P nie leży na odcinku CD, to oznacza, że punkty D i D' muszą być sobie równe, co chcieliśmy pokazać. □

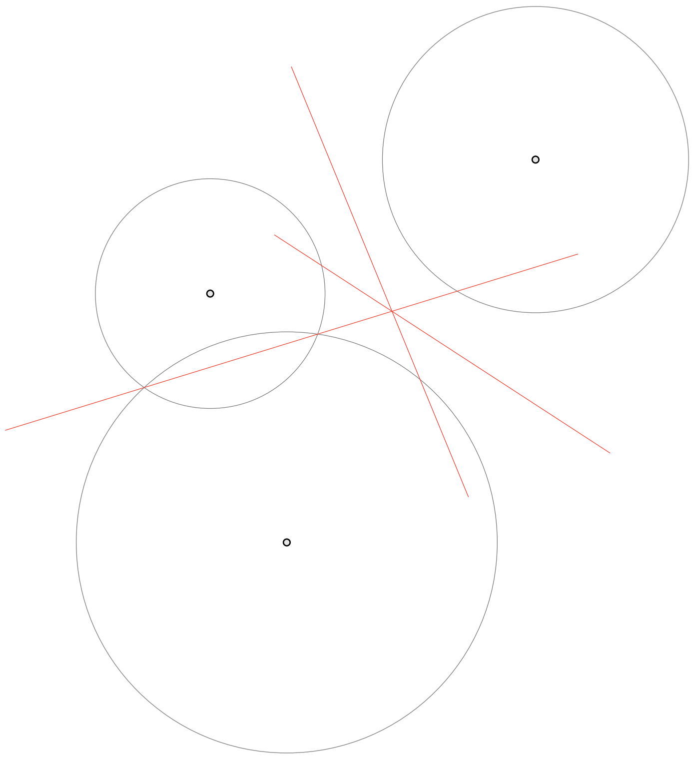
Twierdzenie (Twierdzenie o współpękowości osi potęgowych)

Dane są trzy okręgi ω_1, ω_2, ω_3 o parami różnych środkach. Wówczas osie potęgowe okręgów ω_1 i ω_2, ω_2 i ω_3, ω_1 i ω_3 są współpękowe lub parami równoległe.

Dowód. Niech $p_{\omega_i \omega_j}$ oznacza oś potęgową okręgów ω_i oraz ω_j oraz niech punkty O_1, O_2, O_3 będą środkami okręgów ω_1, ω_2, ω_3.

Rozpatrzmy przypadek, w którym punkty O_1, O_2, O_3 leżą na jednej prostej. Wtedy z twierdzenia o osi potęgowej, każda z osi $p_{\omega_1\omega_2}$, $p_{\omega_2\omega_3}$, $p_{\omega_3\omega_1}$ jest prostopadła do prostej O_1O_2, czyli są one względem siebie równoległe.

Teraz załóżmy, że punkty O_1, O_2, O_3 nie są współliniowe. Niech punkt X będzie punktem przecięcia osi $p_{\omega_1\omega_2}$, $p_{\omega_2\omega_3}$. Punkt X istnieje, ponieważ proste O_1O_2 i O_2O_3 nie są równoległe, a zatem proste $p_{\omega_1\omega_2}, p_{\omega_2\omega_3}$ też nie są równoległe. Teza sprowadza się do spostrzeżenia, że punkt X musi leżeć też na osi potęgowej okręgów ω_3 i ω_1. Skoro $X \in p_{\omega_1\omega_2}$, to $\mathrm{pot}(X, \omega_1) = \mathrm{pot}(X, \omega_2)$, a skoro $X \in p_{\omega_2\omega_3}$, to $\mathrm{pot}(X, \omega_2) = \mathrm{pot}(X, \omega_3)$. Wobec tego $\mathrm{pot}(X, \omega_1) = \mathrm{pot}(X, \omega_3)$, więc $X \in p_{\omega_3\omega_1}$, co chcieliśmy pokazać. □



Rysunek 4: Osie potęgowe trzech okręgów

Twierdzenie (Wniosek z twierdzenia o osiach potęgowych)

Dane są dwa czworokąty cykliczne $ABCD$ i $CDEF$. Czworokąt $ABEF$ jest cykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB, CD i EF są współpękowe.

Dowód. Przeprowadźmy dowód w dwie strony.

Niech czworokąt $ABEF$ jest cykliczny. Wówczas

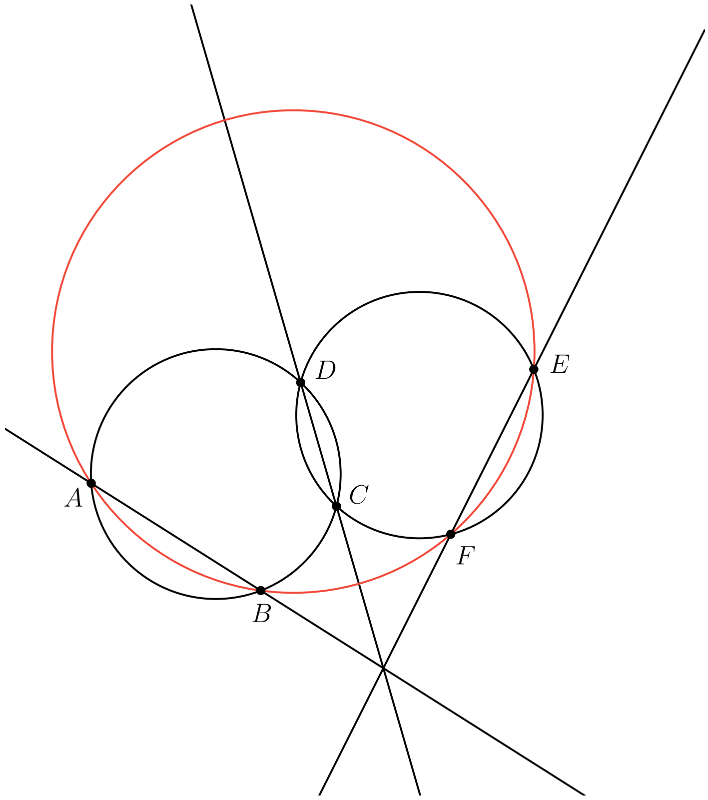
$$\begin{aligned} &\mathrm{pot}(A, \odot(ABCD)) = 0 = \mathrm{pot}(A, \odot(ABEF)) \\ \text{oraz} \quad &\mathrm{pot}(B, \odot(ABCD)) = 0 = \mathrm{pot}(B, \odot ABEF), \end{aligned}$$

czyli prosta AB jest osią potęgową okręgów $\odot(ABCD)$ i $\odot(ABEF)$. Analogicznie prosta EF jest osią potęgową okręgów $\odot(CDEF)$ i $\odot(ABEF)$ oraz prosta CD jest osią potęgową okręgów $\odot(ABCD)$ i $\odot(CDEF)$. Z twierdzenia o osiach potęgowych proste AB, CD, EF są współpękowe.

Niech proste AB, CD, EF przecinają się w punkcie X. Wtedy

$$XA \cdot XB = \text{pot}(X, \odot(ABCD)) = XC \cdot XD = \text{pot}(X, \odot(CDEF)) = XE \cdot XF.$$

Z potęgowego kryterium współokręgowości, punkty A, B, E, F leżą na jednym okręgu. □



Rysunek 5: Proste AB, CD, EF i czworokąty cykliczne $ABCD$, $CDEF$

Twierdzenie (Twierdzenie o okręgu potęgowym)

Miejscem geometrycznym punktów o stałym ilorazie potęg względem dwóch okręgów jest okrąg przechodzący przez punkty przecięć tych okręgów. Jeśli stały iloraz jest równy 1, to miejscem geometrycznym tych punktów będzie oś potęgowa, będąca szczególnym przypadkiem okręgu o promieniu nieskończonym.

Dowód. Niech ω_1, ω_2 będą rozważanymi w twierdzeniu okręgami, a wspomnianą proporcją będzie μ. Jeżeli $\mu = 1$, to

$$\frac{\text{pot}(X, \omega_1)}{\text{pot}(X, \omega_2)} = 1, \quad \text{więc} \quad \text{pot}(X, \omega_1) = \text{pot}(X, \omega_2) \quad \text{dla wszystkich punktów } X.$$

Rzeczywiście zbiór tych punktów jest osią potęgową okręgów ω_1, ω_2.

Przypadek $\mu \neq 1$ rozważymy analitycznie. Sprawdzimy, że punkty przecięć okręgów mają względem nich potęgę 0, więc oczywiście należą do zbioru punktów. Dobierzmy układ współrzędnych kartezjańskich w taki sposób, aby środek mniejszego z okręgów (bez straty ogólności ω_1) znajdował się w początku układu współrzędnych, środek drugiego okręgu (ω_2) na osi odciętych oraz niech promień okręgu ω_1 jest równy $r_1 = 1$. Wtedy okręgi możemy opisać równaniami

$$\omega_1 : x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \omega_2 : (x - x_2)^2 + y^2 = r^2.$$

Szukamy równania zbioru wszystkich punktów $X = (x, y)$, które spełniają warunek

$$\text{pow}(X, \omega_1) = \mu \cdot \text{pow}(X, \omega_2)$$

Z definicji potęgi punktu względem okręgu możemy zapisać

$$
\begin{aligned}
|XO_1|^2 - 1^2 &= \mu \cdot \left(|XO_2|^2 - r^2\right), \\
\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2 - 1 &= \mu\left(\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}\right)^2 - \mu r^2, \\
x^2+y^2-1 &= \mu(x-x_2)^2 + \mu y^2 - \mu r^2, \\
(\mu+1)x^2 + 2\mu x x_2 + (\mu+1)y^2 &= 1 + \mu x_2^2 - \mu r^2, \\
(\mu+1)\left(x - \frac{\mu x_2}{\mu+1}\right)^2 + (\mu+1)y^2 &= 1 + \mu x_2^2 - \mu r^2 + \frac{\mu^2 x_2^2}{\mu+1}, \\
\left(x - \frac{\mu x_2}{\mu+1}\right)^2 + y^2 &= \frac{1+\mu x_2^2 - \mu r^2}{\mu+1} + \frac{\mu^2 x_2^2}{(\mu+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Jak widać, zapisaliśmy ten zbiór w postaci podobnej do równania okręgu. Rzeczywiście, ponieważ wykazaliśmy, że istnieją rozwiązania rzeczywiste tego równania (punkty przecięcia), a jednocześnie lewa strona jako suma kwadratów jest liczbą dodatnią, to kwadrat promienia też jest liczbą dodatnią, czyli zbiór jest okręgiem. □

Zadania na poziomie OMJ

Zadanie 1.
Dane są dwa okręgi ω_1 i ω_2 przecinające się w punktach A i B oraz ich wspólna styczna k, styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach C i D. Udowodnić, że AB połowi odcinek CD.

Zadanie 2.
Rozważamy dwa okręgi ω_1 i ω_2 rozłączne zewnętrznie oraz cztery wspólne styczne do tych okręgów, styczne do nich odpowiednio w punktach A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2, D_1 i D_2. Punkty P, Q, R, S są odpowiednio środkami odcinków A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2. Wykazać, że punkty te leżą na jednej prostej.

Zadanie 3.
Dane są dwa okręgi ω_1 i ω_2 oraz dwie styczne zewnętrzne k i l, styczne do tych okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz C i D. Odcinek AD tnie okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach E i F. Udowodnić, że $AE = DF$.

Zadanie 4.
Sześciokąt $ABCDEF$ jest wypukły oraz

$$AB = BC, \quad CD = DE, \quad EF = FA.$$

Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A, przecinają się w jednym punkcie.

Rozgrzewka

Zadanie 5.
Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Niech prosta przechodząca przez punkt B prostopadła do prostej AC przecina okrąg o średnicy AC w punktach P i Q, oraz niech prosta przechodząca przez punkt C prostopadła do prostej AB przecina okrąg o średnicy AB w punktach R i S. Udowodnić, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

Zadanie 6. (IMO 1995 P1)
Niech A, B, C, D będą czterema różnymi punktami na jednej prostej, w tej kolejności. Okręgi o średnicach AC i BD przecinają się w punktach X i Y. Prosta XY tnie BC w punkcie Z. Niech P będzie punktem na prostej XY różnym od punktu Z. Prosta CP przecina okrąg o średnicy AC w punktach C i M, a prosta BP przecina okrąg o średnicy BD w punktach B i N. Udowodnić, że proste AM, DN i XY są współpękowe.

Zadania na poziomie II etapu OM

Zadanie 7. (72 OM, II etap, zadanie 2)
Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D. Wykazać, że $AO = OC$.

Zadanie 8.
Niech C będzie punktem na okręgu ω o średnicy AB i niech D będzie środkiem łuku AC nie zawierającego punktu B. Niech E będzie rzutem punktu D na prostą BC i niech F będzie punktem przecięcia się prostej AE z tym okręgiem. Udowodnić, że prosta BF połowi odcinek DE.

Zadanie 9.
Dany jest trójkąt ABC o okręgu opisanym ω, dla którego $AB = BC$. Styczne w punktach A i B przecinają się w punkcie D. Prosta DC przecina ponownie okrąg ω w punkcie E. Udowodnić, że prosta AE połowi odcinek BD.

Zadanie 10. (Kazakh MO 2008)
Punkt B_1 jest środkiem tego łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt B. Punkt J jest środkiem okręgu B-dopisanego do tego trójkąta. Prosta BB_1 przecina prostą AC w punkcie B_2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że proste B_2I i B_1J są prostopadłe.

Zadanie 11.
Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prowadzimy trzy proste przez środki odcinków AE i AF, przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 12. (USAMO 1998 P2)
Niech ω_1, ω_2 będą współśrodkowymi okręgami, z ω_2 wewnątrz ω_1. Z punktu A na okręgu ω_1 narysowano styczną AB do okręgu ω_2, przy czym punkt B leży na okręgu ω_2. Niech C będzie drugim punktem przecięcia prostej AB z okręgiem ω_1 i niech D będzie środkiem odcinka AB. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okrąg ω_2 w punktach E i F w taki sposób, że symetralne DE i CF przecinają się w punkcie M na prostej AB. Znaleźć stosunek AM/MC.

Zadanie 13.
Punkt G jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC. Punkty R i S leżą odpowiednio na odcinkach GB i GC oraz spełniają równości

$$\sphericalangle ABS = \sphericalangle ACR = \sphericalangle 180^\circ - \sphericalangle BGC.$$

Wykazać, że

$$\sphericalangle RAS + \sphericalangle BAC = \sphericalangle BGC.$$

Zadanie 14. (IMO 2000 P1)
Dwa okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w punktach M i N. Niech l będzie wspólną styczną okręgów ω_1, ω_2, tak, że punkt M leży bliżej prostej l niż punkt N. Punkty styczności prostej l z okręgami ω_1 i ω_2 to odpowiednio punkty A i B. Niech prosta równoległa do prostej l przechodząca przez punkt M przecina ponownie okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach C i D. Proste CA i DB przecinają się w punkcie E, proste AN i CD w punkcie P, proste BN i CD w punkcie Q. Udowodnić, że $EP = EQ$.

Zadanie 15. (IMO 2008 P1)
Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg ω_A o środku w środku odcinka BC przechodzący przez punkt H przecina bok BC w punktach A_1 i A_2. Podobnie definiujemy punkty B_1, B_2, C_1 i C_2. Udowodnić, że punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 i C_2 leżą na jednym okręgu.

Zadanie 16. (IMO 2013 P4)
Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym o ortocentrum w punkcie H, niech W będzie punktem na BC. Oznaczmy przez M i N spodki wysokości z wierzchołków B i C. Oznaczmy przez ω_1 okrąg opisany na BWN, niech X będzie punktem na ω_1 antypodycznym do punktu W. Analogicznie definiujemy ω_2 jako okrąg opisany na CWM i punkt Y jako punkt na okręgu ω_2 antypodyczny do W. Udowodnić, że punkty X, Y i H są współliniowe.

Zadania na poziomie finału OM

Zadanie 17. (IMO Shortlist 2021 G1)
Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AC = BC$. Punkt P leży na półprostej AB i nie leży na odcinku AB. Okrąg opisany na trójkącie ACD przecina odcinek PD w punkcie Q. Okrąg opisany na trójkącie APQ przecina ponownie odcinek PC w punkcie R. Dowieść, że proste CD, AQ, BR przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 18. (IMO 2010 P4)
Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta różnobocznego ABC. Proste AP, BP, CP przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach K, L i M. Styczna w punkcie C do okręgu opisanego przecina prostą AB w punkcie S. Udowodnić, że jeśli $SC = SP$, to $MK = ML$.

Zadanie 19. (IMO 2012 P5)
Niech ABC będzie trójkątem, w którym $\sphericalangle BCA = 90°$ i niech D będzie spodkiem wysokości z punktu C. Niech punkt X będzie punktem wewnątrz odcinka CD. Niech K będzie punktem na odcinku AX, takim że $BK = BC$. Podobnie niech L będzie takim punktem na odcinku BX, że $AL = AC$. Niech M będzie punktem przecięcia prostych AL i BK. Udowodnić, że $MK = ML$.

Zadanie 20. (IMO Shortlist 2013 G4)
Niech ABC będzie trójkątem takim, że $AB < AC$. Niech P oraz Q będą dwoma różnymi punktami na prostej AC takimi, że $\sphericalangle PBA = \sphericalangle QBA = \sphericalangle ACB$ (punkt A leży między P i C). Przypuśćmy, że istnieje punkt D wewnątrz odcinka BQ, dla którego $PD = PB$. Niech prosta AD przecina ponownie okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie R. Udowodnić, że $QB = QR$.

Zadanie 21. (IMO 2009 P2)
Niech ABC będzie trójkątem o środku okręgu opisanego O. Punkty P i Q leżą na odcinkach CA i AB. Niech K, L i M będą środkami odcinków BP, CQ i PQ. Przypuśćmy, że odcinek PQ jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie KLM. Udowodnić, że $OP = OQ$.

Zadanie 22. (IMO Shortlist 2011 G5)
Niech ABC będzie trójkątem o środku okręgu wpisanego I oraz okręgu opisanym ω. Niech D i E będą drugimi punktami przecięcia okręgu ω z prostymi AI i BI. Cięciwa DE przecina prostą AC w punkcie F oraz prostą BC w punkcie G. Niech P będzie punktem przecięcia prostej przechodzącej przez punkt F równoległej do prostej AD z prostą przez punkt G równoległą do prostej BE. Niech K będzie punktem przecięcia prostych stycznych do okręgu ω w punktach A i B. Udowodnić, że proste AE, BD i KP są współpękowe lub parami równoległe.

Rozwiązania

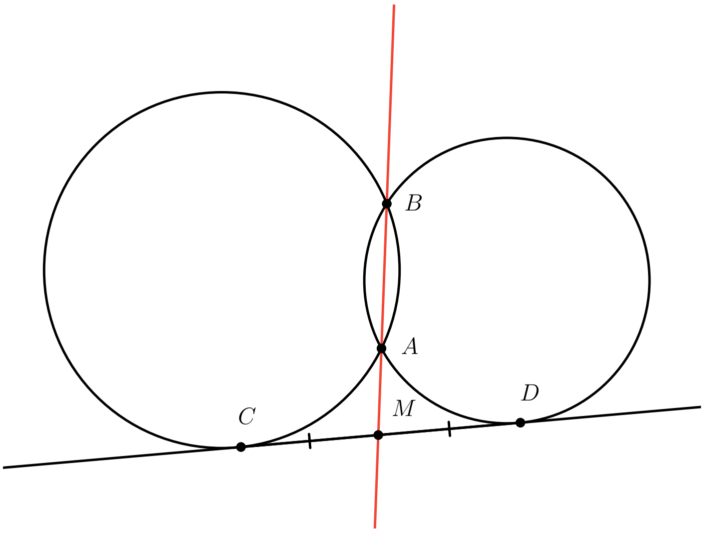
Autorzy rozwiązań: Miłosz Płatek*, Adam Tutkowski.

Zadanie 1.
Dane są dwa okręgi ω_1 i ω_2 przecinające się w punktach A i B oraz ich wspólna styczna k, styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach C i D. Udowodnić, że AB połowi odcinek CD.

Rozwiązanie:
Niech X będzie dowolnym punktem na prostej AB. Stąd mamy

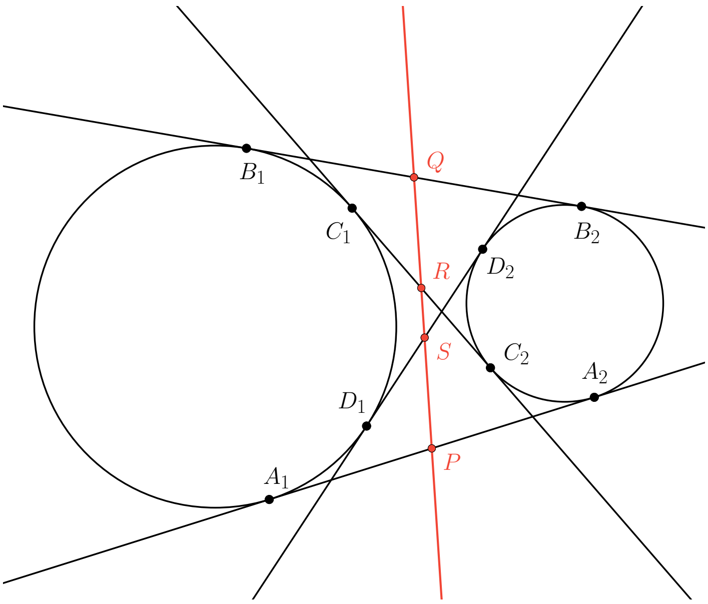
$$pot(X, \omega_1) = XA \cdot XB = pot(X, \omega_2),$$

zatem prosta AB jest osią potęgową okręgów ω_1 oraz ω_2. Niech punkt M będzie punktem wspólnym prostych AB oraz CD. Wówczas M leży na osi potęgowej okręgów ω_1 i ω_2. Zatem z potęgi punktu mamy $MC^2 = MD^2$, czyli $MC = MD$.



Zadanie 2.
Rozważamy dwa okręgi ω_1 i ω_2 rozłączne zewnętrznie oraz cztery wspólne styczne do tych okręgów, styczne do nich odpowiednio w punktach A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2, D_1 i D_2. Punkty P, Q, R, S są odpowiednio środkami odcinków A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2. Wykazać, że punkty te leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:
Wystarczy zauważyć, że wszystkie punkty P, Q, R, S mają równą potęgę względem ω_1 i ω_2, więc leżą na ich osi potęgowej. Zatem leżą one na jednej prostej.



Zadanie 3.
Dane są dwa okręgi ω_1 i ω_2 oraz dwie styczne zewnętrzne k i l, styczne do tych okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz C i D. Odcinek AD tnie okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach E i F. Udowodnić, że $AE = DF$.

Rozwiązanie:
Z potęgi punktu otrzymujemy, że

$$AB^2 = AF \cdot AD \quad \text{oraz} \quad DC^2 = DE \cdot DA,$$

Niech P będzie punktem przecięcia prostych k i l. Zauważmy, że $AB = CD$, istotnie na mocy twierdzenia o odcinkach stycznych mamy

$$AB = PA - PB = PC - PD = CD.$$

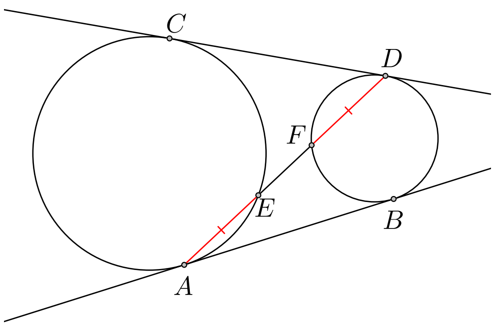
Łączymy powyższe wnioski i otrzymujemy

$$AF \cdot AD = DE \cdot DA.$$

Dzielimy równanie stronami przez AD i dostajemy, że

$$AE = AF - EF = DE - EF = DF,$$

co należało dowieść.

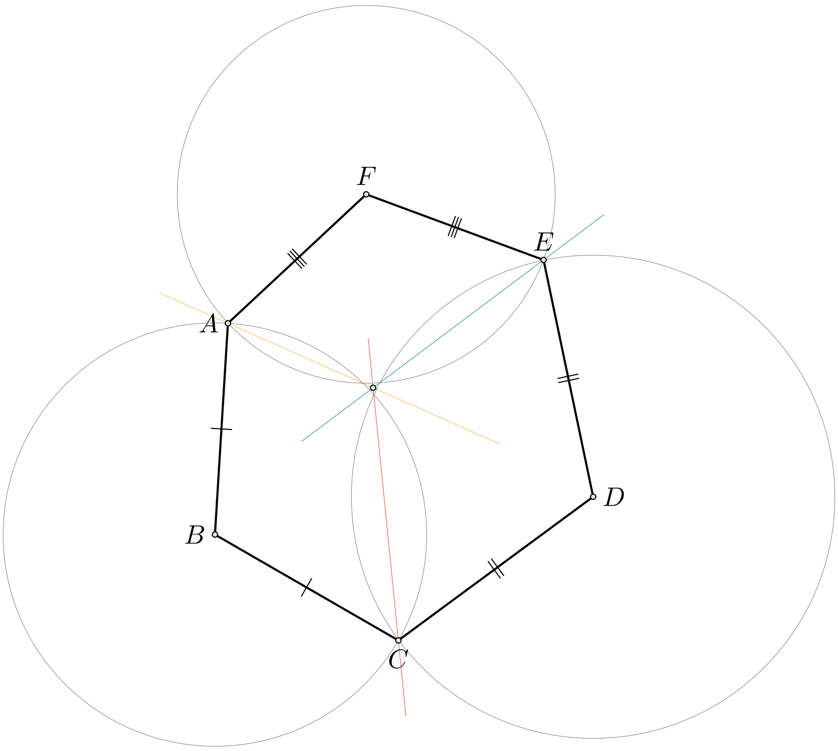


Zadanie 4.
Sześciokąt $ABCDEF$ jest wypukły oraz

$$AB = BC, \quad CD = DE, \quad EF = FA.$$

Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A, przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy trzy okręgi ω_1, ω_2, ω_3, odpowiednio o środkach w punktach B, D i F i promieniach AB, CD, EF. Wówczas prosta prostopadła z punktu A do prostej BF to oś potęgowa okręgów ω_1 i ω_3. Istotnie przechodzi ona przez punkt A, czyli przez jedno z przecięć tych okręgów oraz jest prostopadła do prostej łączącej środki tych okręgów. Analogicznie pokazujemy, że pozostałe proste to osie potęgowe odpowiednich okręgów. Na mocy twierdzenia o współpękowości osi potęgowych otrzymujemy tezę.

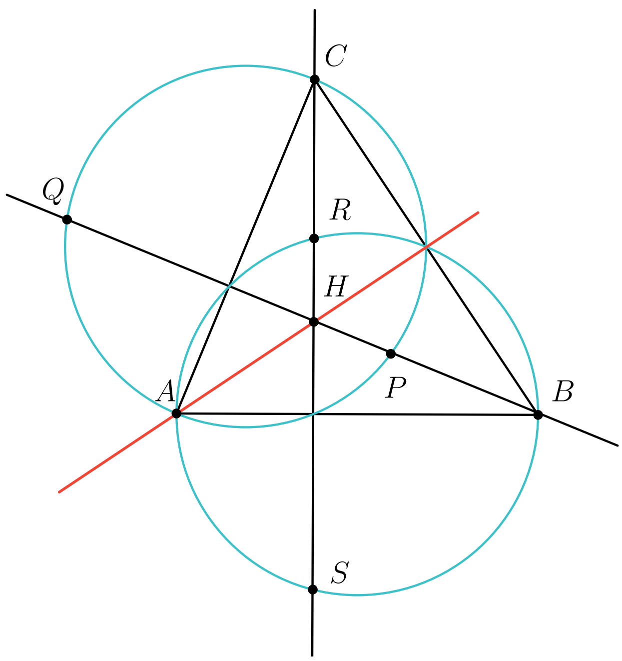


Zadanie 5.
Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Niech prosta przechodząca przez punkt B prostopadła do prostej AC przecina okrąg o średnicy AC w punktach P i Q, oraz niech prosta przechodząca przez punkt C prostopadła do prostej AB przecina okrąg o średnicy AB w punktach R i S. Udowodnić, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że zadane okręgi przechodzą przez spodek wysokości z wierzchołka A w trójkącie ABC, ponieważ kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty. Wobec tego wysokość trójkąta z wierzchołka A jest osią potęgową tych okręgów. Oznacza to, że ortocentrum H trójkąta ABC leży na osi potęgowej tych okręgów, czyli przecięcie prostych PQ oraz RS leży na osi potęgowej tych okręgów. Z potęgi punktu otrzymujemy, że

$$HS \cdot HR = HP \cdot HQ,$$

zatem na mocy potęgowego kryterium współokręgowości punktów, czworokąt $PSQR$ jest cykliczny.



Zadanie 6. (IMO 1995 P1)
Niech A, B, C, D będą czterema różnymi punktami na jednej prostej, w tej kolejności. Okręgi o średnicach AC i BD przecinają się w punktach X i Y. Prosta XY tnie BC w punkcie Z. Niech P będzie punktem na prostej XY różnym od punktu Z. Prosta CP przecina okrąg o średnicy AC w punktach C i M, a prosta BP przecina okrąg o średnicy BD w punktach B i N. Udowodnić, że proste AM, DN i XY są współpękowe.

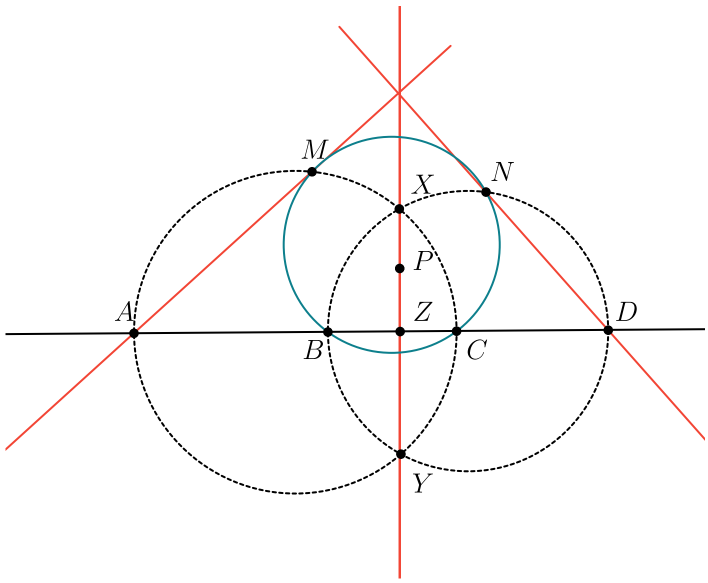
Rozwiązanie:
Zauważmy, że teza jest równoważna pokazaniu cykliczności czworokąta $AMND$ w myśl wniosku z twierdzenia o osiach potęgowych. Skoro punkt P leży na osi potęgowej tych okręgów, to z potęgi punktu dostajemy równość

$$PM \cdot PC = PN \cdot PB.$$

Wobec tego czworokąt $BMNC$ jest cykliczny na mocy potęgowego kryterium współokręgowości punktów. Stąd mamy

$$\sphericalangle AMN + \sphericalangle NDA = 90^\circ + \sphericalangle CMN + \sphericalangle NDA = 90^\circ + \sphericalangle NBD + \sphericalangle NDB = 180^\circ,$$

więc czworokąt $AMND$ jest cykliczny, co jest równoważne tezie.



Zadanie 7. (72 OM, II etap, zadanie 2)
Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D. Wykazać, że $AO = OC$.

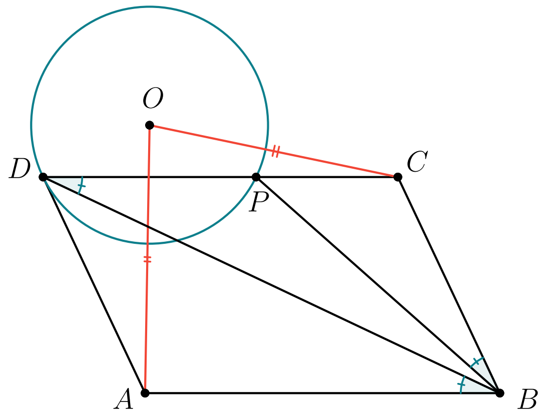
Rozwiązanie:
Teza jest równoważna pokazaniu, że punkty A i C mają równą potęgę względem zadanego okręgu. Potęga punktu A jest równa $AD^2 = BC^2$, a punktu C jest równa $CP \cdot CD$. Wobec tego chcemy pokazać, że

$$BC^2 = CP \cdot CD,$$

czyli, że okrąg opisany na trójkącie DBP jest styczny do prostej BC. Zachodzą równości

$$\sphericalangle CBP = \sphericalangle DBA = \sphericalangle BDC,$$

więc w myśl twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą otrzymujemy szukaną styczność, co kończy dowód.



Zadanie 8.
Niech C będzie punktem na okręgu ω o średnicy AB i niech D będzie środkiem łuku AC nie zawierającego punktu B. Niech E będzie rzutem punktu D na prostą BC i niech F będzie punktem przecięcia się prostej AE z tym okręgiem. Udowodnić, że prosta BF połowi odcinek DE.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że proste DE oraz AC są równoległe, ponieważ kąty DEC i ACB są proste. Po przeliczeniu kątów otrzymujemy następujące równości

$$\sphericalangle EDC = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DBC,$$

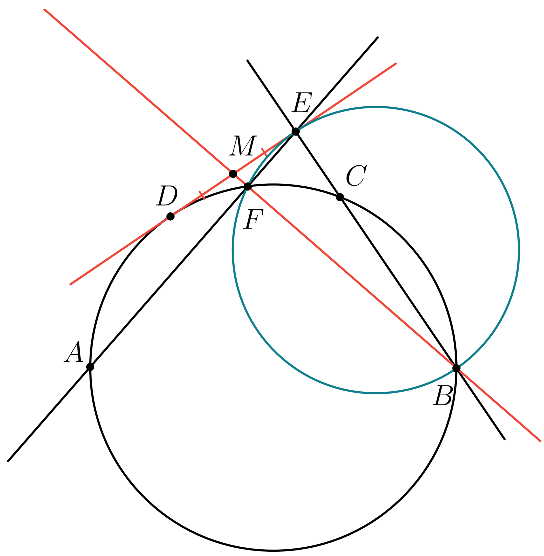
gdzie ostatnia równość wynika z równych długości łuków AD oraz DC. Zatem w myśl twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą, prosta DE jest styczna do okręgu ω. Ponownie z równoległości prostych DE oraz AC mamy, że

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DEA = \sphericalangle EAC = \sphericalangle FBC = \sphericalangle FBE,$$

więc okrąg opisany na trójkącie EFB jest styczny do prostej DE. Wówczas prosta FB jest osią potęgową okręgów ω oraz $\odot(EFB)$. Niech M będzie punktem przecięcia prostych FB oraz DE. Z potęgi punktu otrzymujemy równość

$$MD^2 = ME^2,$$

czyli $MD = ME$.



Zadanie 9.
Dany jest trójkąt ABC o okręgu opisanym ω, dla którego $AB = BC$. Styczne w punktach A i B przecinają się w punkcie D. Prosta DC przecina ponownie okrąg ω w punkcie E. Udowodnić, że prosta AE połowi odcinek BD.

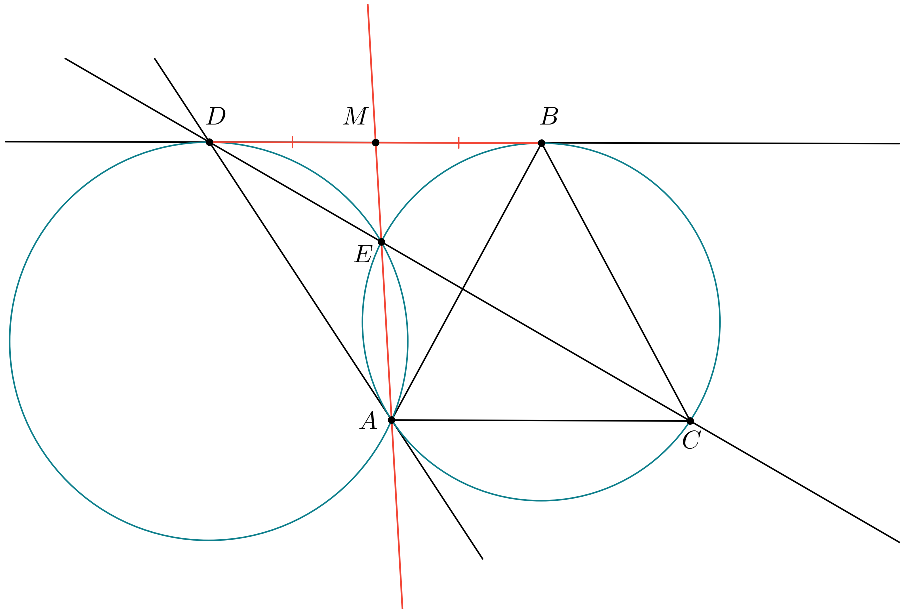
Rozwiązanie:
Zauważmy, że promień OB, gdzie O jest środkiem okręgu ω jest zawarty w symetralnej odcinka AC. Stąd prosta DB jest równoległa do AC. Z tej równoległości oraz twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą otrzymujemy równości

$$\sphericalangle BDE = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DAE,$$

więc okrąg opisany na trójkącie DEA jest styczny do prostej DB. Wówczas prosta AE jest osią potęgową okręgów ω oraz $\odot(DEA)$. Oznaczmy punkt przecięcia prostych BD oraz AE jako M. Zatem z potęgi punktu otrzymujemy, że

$$MB^2 = MD^2,$$

czyli $MB = MD$.



Zadanie 10. (Kazakh MO 2008)
Punkt B_1 jest środkiem tego łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który zawiera punkt B. Punkt J jest środkiem okręgu B-dopisanego do tego trójkąta. Prosta BB_1 przecina prostą AC w punkcie B_2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnić, że proste B_2I i B_1J są prostopadłe.

Rozwiązanie:
Niech M będzie środkiem łuku AC, który nie zawiera punktu B. Stąd MB_1 jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC. W szczególności kąt MBB_1 jest prosty. Dwusieczna zewnętrzna jest prostopadła do dwusiecznej wewnętrznej, więc punkty B_1, B, B_2 są współliniowe. Ponadto, z twierdzenia o trójliściu wiemy, że czworokąt $ICJA$ jest cykliczny. Niech X to drugi punkt przecięcia prostej B_2J z okręgiem $\odot(ICJA)$. Skoro

$$\sphericalangle JBB_1 = 90^\circ,$$

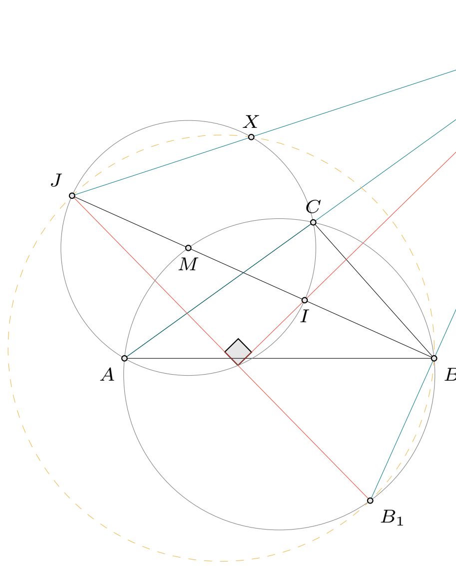
to teza jest równoważna temu, że punkt I to ortocentrum trójkąta B_2B_1J. Wobec tego wystarczy pokazać, że prosta B_1I jest prostopadła do prostej B_2J. Z potęgi punktu B_2 względem okręgów $\odot(AICXJ)$ oraz $\odot(AB_1BC)$ wiemy, że

$$B_2X \cdot B_2J = B_2C \cdot B_2A = B_2B \cdot B_2B,$$

więc czworokąt XJB_1B jest cykliczny. Wobec tego

$$\sphericalangle B_1XJ = \sphericalangle B_1BJ = 90^\circ = \sphericalangle IAJ = \sphericalangle IXJ,$$

czyli punkty X, I, B_1 są współliniowe. Oznacza to, że proste B_1I oraz B_2J są prostopadłe, co chcieliśmy pokazać.

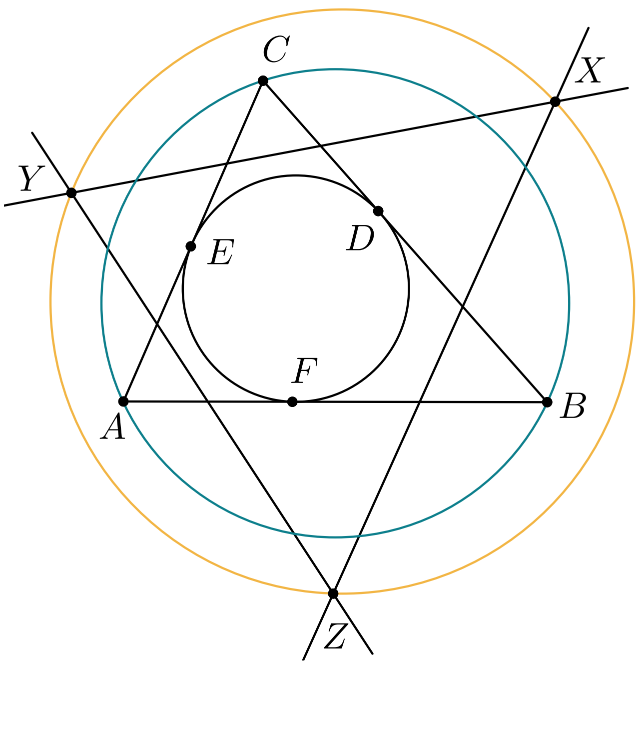


Zadanie 11.
Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prowadzimy trzy proste przez środki odcinków AE i AF, przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Rozwiązanie:
Niech proste k, l, m to odpowiednio proste przechodzące przez środki odcinków AE i AF, przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE. Niech punkty X, Y, Z to punkty przecięcia się odpowiednio prostych l i m, m i k oraz k i l. Zastosujmy twierdzenie o współpękowości osi potęgowych dla dwóch zdegenerowanych okręgów (okręgu o promieniu zero) o środku w punkcie B i C oraz okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Zauważmy, że osie potęgowe okręgu wpisanego w trójkąt ABC i okręgu zdegenerowanego mającego środek w punkcie B oraz okręgu wpisanego w trójkąt ABC i zdegenerowanego w punkcie C to odpowiednio proste l oraz m. Wobec tego proste l, m oraz symetralna BC przecinają się w jednym punkcie, będącym punktem X. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Po przeliczeniu kątów otrzymujemy, że

$$\sphericalangle OXY = 90^\circ - \sphericalangle(m, BC) = 90^\circ - \sphericalangle(m, CA) = \sphericalangle OYX,$$

więc punkt O leży na symetralnej odcinka XY. Analogicznie pokazujemy, że punkt O leży na pozostałych symetralnych, z czego dostajemy tezę.



Zadanie 12. (USAMO 1998 P2)
Niech ω_1, ω_2 będą współśrodkowymi okręgami, z ω_2 wewnątrz ω_1. Z punktu A na okręgu ω_1 narysowano styczną AB do okręgu ω_2, przy czym punkt B leży na okręgu ω_2. Niech C będzie drugim punktem przecięcia prostej AB z okręgiem ω_1 i niech D będzie środkiem odcinka AB. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okrąg ω_2 w punktach E i F w taki sposób, że symetralne DE i CF przecinają się w punkcie M na prostej AB. Znaleźć stosunek AM/MC.

Rozwiązanie:
Z symetrii osiowej względem prostej prostopadłej do AB w punkcie B otrzymujemy, że $AB = BC$. Ponadto z potęgi punktu mamy, że

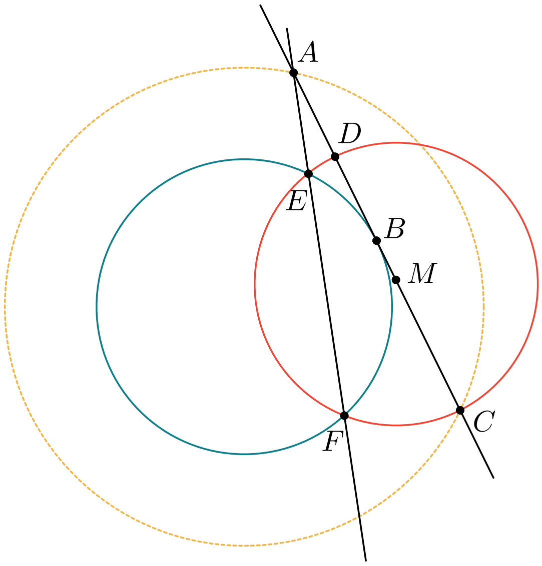
$$AE \cdot AF = AB^2 = \frac{1}{2}AB \cdot 2AB = AD \cdot AC,$$

więc na mocy potęgowego kryterium współokręgowości punktów, czworokąt $CDEF$ jest cykliczny. Punkt M to środek tego okręgu, ponieważ jest przecięciem symetralnych DE oraz CF. W szczególności punkt M jest środkiem odcinka DC. Niech $x = AD$, wówczas mamy

$$DC = DB + BC = AD + AB = 3x \quad \text{oraz} \quad DM = \frac{1}{2}DC = \frac{3}{2}x.$$

Otrzymujemy w taki sposób, że

$$\frac{AM}{MC} = \frac{2{,}5}{1{,}5} = \frac{5}{3}.$$



Zadanie 13.
Punkt G jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC. Punkty R i S leżą odpowiednio na odcinkach GB i GC oraz spełniają równości

$$\sphericalangle ABS = \sphericalangle ACR = \sphericalangle 180^\circ - \sphericalangle BGC.$$

Wykazać, że

$$\sphericalangle RAS + \sphericalangle BAC = \sphericalangle BGC.$$

Rozwiązanie:
Niech punkty D, E, F to środki odcinków BC, CA i AB. Z warunku $\sphericalangle ABS = 180^\circ - \sphericalangle BGC$ oraz na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą otrzymujemy, że okrąg opisany na trójkącie GBS jest styczny do prostej AB. Z potęgi punktu oraz z faktu, że $BF = AF$, zatem

$$AF^2 = BF^2 = FG \cdot FS.$$

Zatem okrąg opisany na trójkącie AGS jest styczny do prostej AB. Stąd mamy

$$\sphericalangle GAS = 180^\circ - \sphericalangle ASG - \sphericalangle AGS = \sphericalangle FGA - \sphericalangle FAG.$$

Analogicznie okrąg opisany na trójkącie AGR jest styczny do prostej AC. Otrzymujemy, że

$$\sphericalangle RAG = 180^\circ - \sphericalangle AGR - \sphericalangle ARG = \sphericalangle AGE - \sphericalangle GAE.$$

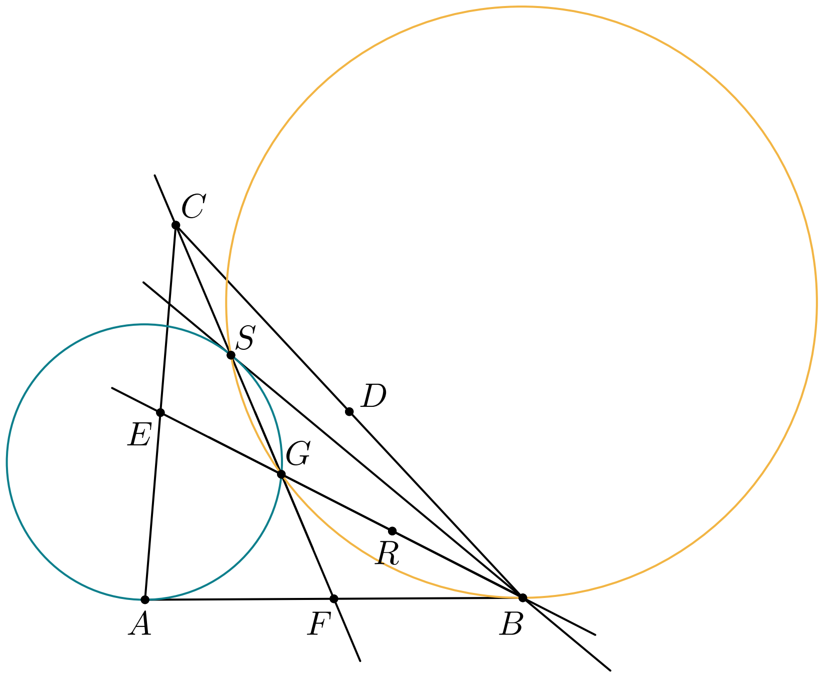
Łączymy powyższe równości i dostajemy

$$\sphericalangle RAS = \sphericalangle RAG + \sphericalangle GAS = (\sphericalangle FGA - \sphericalangle FAG) + (\sphericalangle AGE - \sphericalangle GAE) = \sphericalangle FGE - \sphericalangle FAE.$$

z tego wynika, że

$$\sphericalangle RAS + \sphericalangle BAC = \sphericalangle FGE - \sphericalangle FAE + \sphericalangle FAE = \sphericalangle FGE = \sphericalangle BGC,$$

co należało wykazać.



Zadanie 14. (IMO 2000 P1)
Dwa okręgi ω_1, ω_2 przecinają się w punktach M i N. Niech l będzie wspólną styczną okręgów ω_1, ω_2, tak, że punkt M leży bliżej prostej l niż punkt N. Punkty styczności prostej l z okręgami ω_1 i ω_2 to odpowiednio punkty A i B. Niech prosta równoległa do prostej l przechodząca przez punkt M przecina ponownie okręgi ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach C i D. Proste CA i DB przecinają się w punkcie E, proste AN i CD w punkcie P, proste BN i CD w punkcie Q. Udowodnić, że $EP = EQ$.

Rozwiązanie:
Pokażemy, że M to środek PQ oraz że

$$\sphericalangle EMD = 90^\circ,$$

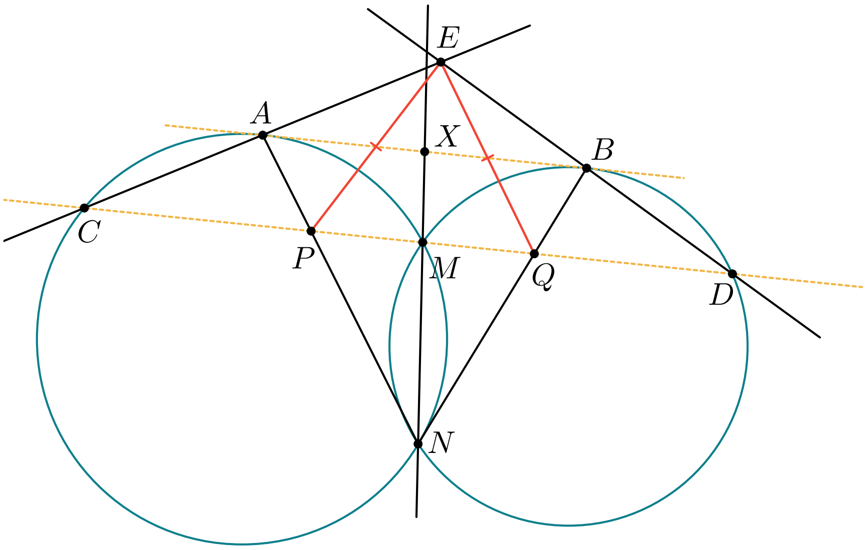
z czego będzie wynikać nasza teza. Niech X to punkt przecięcia prostych NM oraz AB. Z osi potęgowej okręgów ω_1 i ω_2 otrzymujemy, że punkt X to środek odcinka AB. Z równoległości prostych PQ i AB oraz na mocy twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą mamy, że A to środek łuku CM i punkt B to środek łuku MD. Ponadto zauważmy, że trójkąty NAX oraz NPM i trójkąty NBX oraz NQM są podobne w myśl cechy podobieństwa kąt-kąt-kąt. Stąd punkt M jest środkiem odcinka PQ. Zatem

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle BMD = \sphericalangle BDM = \sphericalangle ABE.$$

Analogicznie otrzymujemy równości

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle CMA = \sphericalangle MCA = \sphericalangle BAE,$$

czyli punkt M to odbicie punktu E względem AB. Stąd otrzymujemy już szukaną prostopadłość prostych ME i CD.

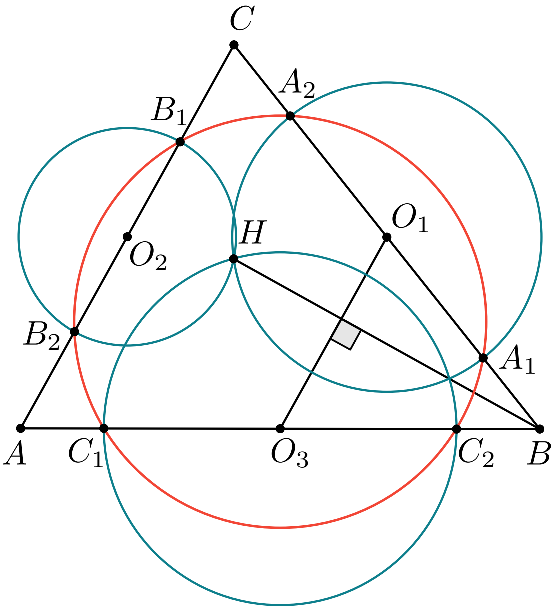


Zadanie 15. (IMO 2008 P1)
Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg ω_A o środku w środku odcinka BC przechodzący przez punkt H przecina bok BC w punktach A_1 i A_2. Podobnie definiujemy punkty B_1, B_2, C_1 i C_2. Udowodnić, że punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 i C_2 leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Niech O_1, O_2, O_3 to środki kolejnych okręgów zadanych w treści zadania, które oznaczmy jako ω_1, ω_2 i ω_3. Skoro O_1 to środek odcinka BC i O_3 to środek odcinka AB, to na mocy twierdzenia o linii środkowej prosta O_1O_3 jest równoległa do prostej AC, czyli prostopadła do prostej BH. Skoro H leży na osi potęgowej okręgów ω_1 i ω_3 oraz proste BH i O_1O_3 są prostopadłe, to BH jest osią potęgową okręgów ω_1 i ω_3. Zatem

$$BA_1 \cdot BA_2 = BC_1 \cdot BC_2,$$

więc z potęgowego kryterium współokręgowości punktów czworokąt $A_1A_2C_1C_2$ jest cykliczny. Analogicznie pokazujemy cykliczność pozostałych dwóch czworokątów $A_1A_2B_1B_2$ oraz $B_1B_2C_1C_2$. Jeżeli pewne z tych trzech okręgów są współśrodkowe, to otrzymujemy tezę, ponieważ gdy dwa okręgi mają wspólny środek i jednocześnie punkt wspólny, to są tym samym okręgiem. Jeśli żadne dwa nie są współśrodkowe, to korzystając z twierdzenia o współpękowości osi potęgowych otrzymujemy, że proste AB, BC, CA są współpękowe, co jest oczywiście sprzeczne. Zatem pewne dwa z tych okręgów muszą być współśrodkowe, z czego dostajemy cykliczność sześciokąta $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$.



Zadanie 16. (IMO 2013 P4)
Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym o ortocentrum w punkcie H, niech W będzie punktem na BC. Oznaczmy przez M i N spodki wysokości z wierzchołków B i C. Oznaczmy przez ω_1 okrąg opisany na BWN, niech X będzie punktem na ω_1 antypodycznym do punktu W. Analogicznie definiujemy ω_2 jako okrąg opisany na CWM i punkt Y jako punkt na okręgu ω_2 antypodyczny do W. Udowodnić, że punkty X, Y i H są współliniowe.

Rozwiązanie:
Niech Z to drugi punkt przecięcia zadanych okręgów. Wykażemy, że punkty X, H, Z, Y są współliniowe. Po przeliczeniu kątów otrzymujemy, że

$$\sphericalangle NZM = 360^\circ - \sphericalangle NZW - \sphericalangle MZW = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA.$$

Zatem mamy

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle NZM = 180^\circ - \sphericalangle NZM + \sphericalangle NZM = 180^\circ.$$

Stąd czworokąt $ANZM$ jest cykliczny. Wiemy jednak, że czworokąt $ANHM$ jest także cykliczny, więc pięciokąt $ANHZM$ jest cykliczny. Ponadto zauważmy, że czworokąt $NBCM$ jest cykliczny, ponieważ $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BNC$. Zatem z potęgi punktu mamy, że

$$AN \cdot AB = AM \cdot AC,$$

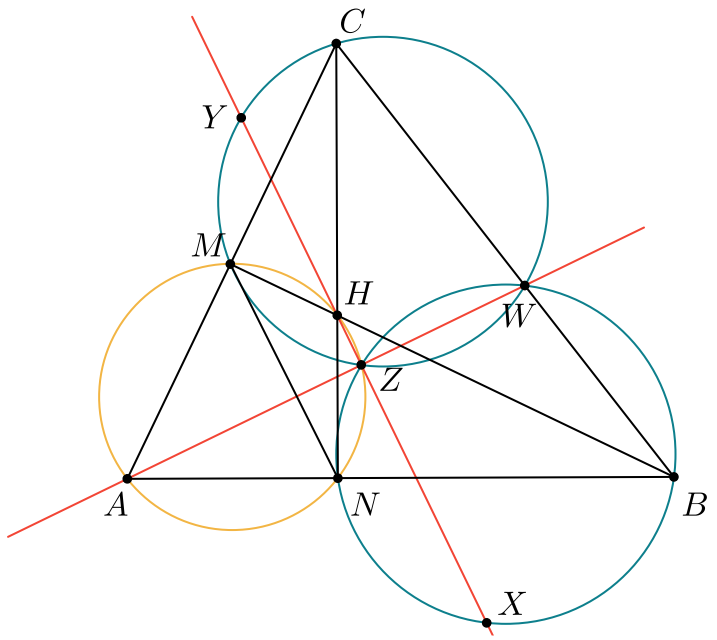
więc punkt A leży na osi potęgowej okręgów ω_1 i ω_2. Wobec tego punkty A, Z, W są współliniowe. Ponownie liczymy kąty i otrzymujemy, że

$$90^\circ = \sphericalangle HZA = 180^\circ - \sphericalangle HZW,$$

więc $\sphericalangle HZW = 90^\circ$. Ponadto wiemy, że

$$\sphericalangle XZW = \sphericalangle WZY = 90^\circ.$$

Łączymy powyższe wnioski otrzymujemy współliniowość punktów X, H, Z, Y.



Zadanie 17. (IMO Shortlist 2021 G1)
Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AC = BC$. Punkt P leży na półprostej AB i nie leży na odcinku AB. Okrąg opisany na trójkącie ACD przecina odcinek PD w punkcie Q. Okrąg opisany na trójkącie APQ przecina ponownie odcinek PC w punkcie R. Dowieść, że proste CD, AQ, BR przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:
Przeliczamy kąty i otrzymujemy, że

$$\measuredangle CBA = \measuredangle CAB = \measuredangle ACD = \measuredangle AQD = 180^\circ - \measuredangle AQP = 180^\circ - \measuredangle ARP = \measuredangle ARC,$$

więc czworokąt $CABR$ jest cykliczny. Niech X będzie drugim punktem przecięcia prostej BR z okręgiem opisanym na trójkącie ARP. Ponownie przeliczamy kąty i dostajemy równości

$$\measuredangle XAP = \measuredangle XRP = 180^\circ - \measuredangle BRC = \measuredangle CAB,$$

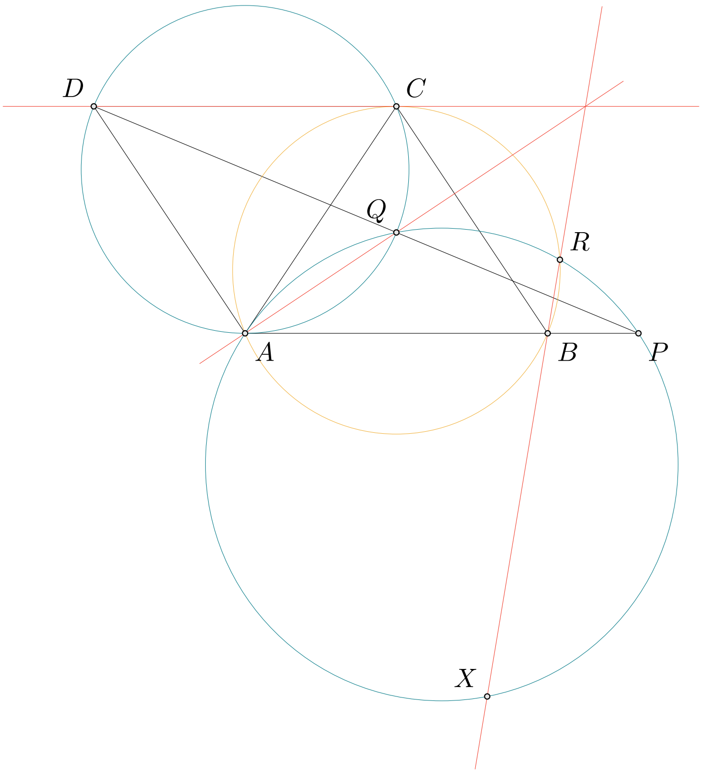
czyli mamy

$$\measuredangle DAB + \measuredangle BAX = \measuredangle DAB + \measuredangle CAB = \measuredangle DAB + \measuredangle ABC = 180^\circ.$$

Zatem punkty D, A, X są współliniowe. Zauważmy teraz, że czworokąt $CDXR$ jest cykliczny, ponieważ

$$\measuredangle AXR + \measuredangle DCR = \measuredangle APC + \measuredangle DCR = 180^\circ.$$

Z twierdzenia o współpękowości osi potęgowych dla okręgów opisanych na czworokątach $CDAQ$, $QAXR$ i $CDXR$ otrzymujemy współpękowość prostych CD, AQ i BR, co należało dowieść.



Zadanie 18. (IMO 2010 P4)
Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta różnobocznego ABC. Proste AP, BP, CP przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach K, L i M. Styczna w punkcie C do okręgu opisanego przecina prostą AB w punkcie S. Udowodnić, że jeśli $SC = SP$, to $MK = ML$.

Rozwiązanie:
Z potęgi punktu otrzymujemy, że

$$SB \cdot SA = SC^2 = SP^2,$$

więc prosta SP jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABP. Z tej styczności mamy, że $\sphericalangle SPB = \sphericalangle BAP$, więc

$$\sphericalangle SPK = \sphericalangle BPK - \sphericalangle BPS = (180^\circ - \sphericalangle APB) - \sphericalangle PAB = \sphericalangle ABP = \sphericalangle ABL.$$

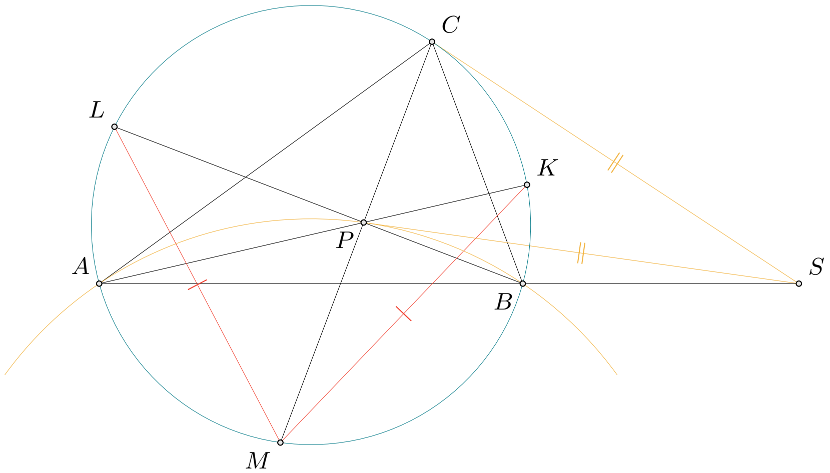
Po przeliczeniu kątów otrzymujemy, że

$$\sphericalangle MCA = 180^\circ - \sphericalangle CPA - \sphericalangle PAC = \sphericalangle KPC - \sphericalangle KAC = (\sphericalangle PCS - \sphericalangle SPK) - \sphericalangle KLC.$$

W taki sposób otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
\sphericalangle MKL &= \sphericalangle MCL \\
&= \sphericalangle MCA + \sphericalangle ACL \\
&= (\sphericalangle PCS - \sphericalangle SPK - \sphericalangle KLC) + \sphericalangle ABL \\
&= \sphericalangle PCS - \sphericalangle KLC + (\sphericalangle ABL - \sphericalangle SPK) \\
&= \sphericalangle PCS - \sphericalangle KLC \\
&= \sphericalangle PCS - \sphericalangle KCS \\
&= \sphericalangle MCK \\
&= \sphericalangle MLK,
\end{aligned}$$

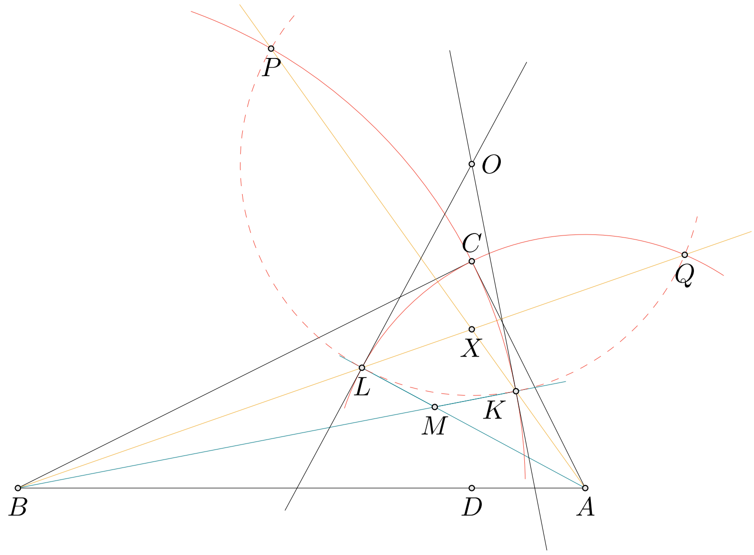
przy czym skorzystaliśmy z faktu, że prosta CS jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Skoro $\sphericalangle MKL = \sphericalangle MLK$, to $MK = ML$.



Zadanie 19. (IMO 2012 P5)
Niech ABC będzie trójkątem, w którym $\sphericalangle BCA = 90°$ i niech D będzie spodkiem wysokości z punktu C. Niech punkt X będzie punktem wewnątrz odcinka CD. Niech K będzie punktem na odcinku AX, takim że $BK = BC$. Podobnie niech L będzie takim punktem na odcinku BX, że $AL = AC$. Niech M będzie punktem przecięcia prostych AL i BK. Udowodnić, że $MK = ML$.

Rozwiązanie:
Niech ω_1 i ω_2 to okręgi o środkach w punktach A i B oraz promieniach AC i BC. Niech punkty P i Q to odpowiednio drugie przecięcie prostej AK z okręgiem ω_2 i drugie przecięcie prostej BL z okręgiem ω_1. Zauważmy, że prosta CD jest osią potęgową okręgów ω_1 i ω_2, więc na czworokącie $PLKQ$ można opisać okrąg – oznaczmy go ω.

Rozważmy inwersję względem okręgu ω_1. Skoro okręgi ω_1 i ω_2 są ortogonalne, to okrąg ω_2 przejdzie na samego siebie. Wobec tego punkty K i P przejdą na siebie na wzajem. Dodatkowo punkt L przejdzie na samego siebie. Wobec tego okrąg ω przejdzie na samego siebie. Oznacza to, że ten okrąg jest ortogonalny do okręgu ω_1. Zatem styczna w punkcie L do okręgu ω_1 przejdzie przez środek okręgu ω. Analogicznie styczna w punkcie K do okręgu ω_2 przejdzie przez środek tego okręgu. W taki sposób proste AL i BK są styczne do okręgu ω, czyli $MK = ML$.



Zadanie 20. (IMO Shortlist 2013 G4)
Niech ABC będzie trójkątem takim, że $AB < AC$. Niech P oraz Q będą dwoma różnymi punktami na prostej AC takimi, że $\sphericalangle PBA = \sphericalangle QBA = \sphericalangle ACB$ (punkt A leży między P i C). Przypuśćmy, że istnieje punkt D wewnątrz odcinka BQ, dla którego $PD = PB$. Niech prosta AD przecina ponownie okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie R. Udowodnić, że $QB = QR$.

Rozwiązanie:
Niech E będzie drugim punktem przecięcia prostej BQ z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Wówczas

punkt A jest środkiem łuku EB niezawierającego punktu C. Rozważmy inwersję o środku w punkcie A oraz promieniu AB. W tej inwersji punkt Q przechodzi na punkt C, a punkt D przechodzi na punkt R. Zatem czworokąt $DRCQ$ jest cykliczny. Ponieważ $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ACB$, prosta PB jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Z potęgi punktu otrzymujemy

$$PA \cdot PC = PB^2 = PD^2.$$

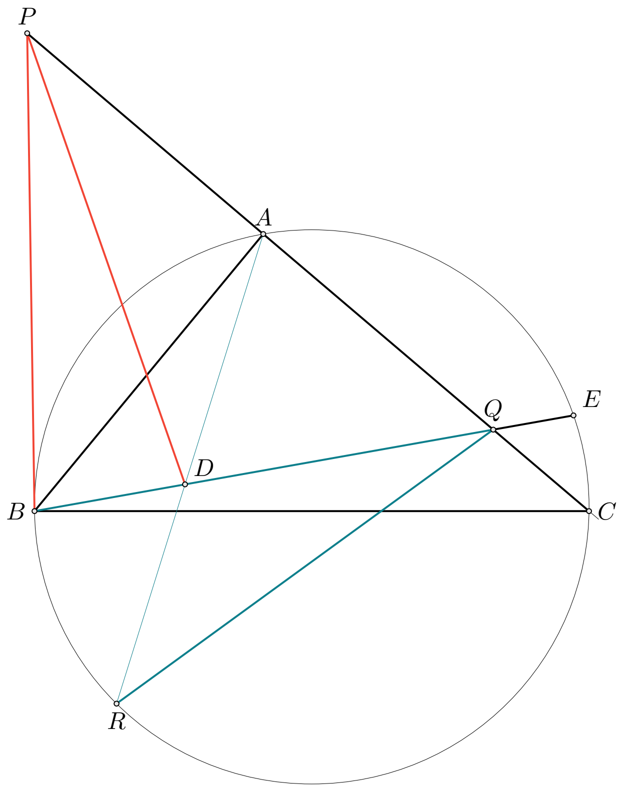
Zatem prosta PD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ADC. Przeliczając kąty, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sphericalangle QBR &= \sphericalangle EAR \\
&= 180^\circ - \sphericalangle ADE - \sphericalangle AEB \\
&= \sphericalangle ADB - \sphericalangle AEB \\
&= (\sphericalangle PDB + \sphericalangle PDA) - \sphericalangle ACB \\
&= (\sphericalangle PBD + \sphericalangle ARQ) - \sphericalangle ACB \\
&= 2\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD - \sphericalangle ACB \\
&= \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD.
\end{aligned}$$

Ponadto

$$\sphericalangle BRQ = \sphericalangle BRD + \sphericalangle QRD = \sphericalangle ARB + \sphericalangle QRD = \sphericalangle ACD + \sphericalangle ACB.$$

Oznacza to, że trójkąt QBR jest równoramienny, więc $QB = QR$.



Zadanie 21. (IMO 2009 P2)
Niech ABC będzie trójkątem o środku okręgu opisanego O. Punkty P i Q leżą na odcinkach CA i AB. Niech K, L i M będą środkami odcinków BP, CQ i PQ. Przypuśćmy, że odcinek PQ jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie KLM. Udowodnić, że $OP = OQ$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że teza jest równoważna temu, że punkty P i Q mają równą potęgę względem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wystarczy pokazać, że

$$QA \cdot QB = PA \cdot PC.$$

Skoro K, M są środkami boków BP i PQ, to odcinek KM jest linią środkową trójkąta BPQ. Stąd prosta KM jest równoległa do prostej BQ, oraz $2 \cdot KM = BQ$. Analogicznie prosta LM jest równoległa do prostej CP oraz $2 \cdot LM = CP$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle MKL = \sphericalangle LMP = 180^\circ - \sphericalangle LMQ = 180^\circ - \sphericalangle CPQ = \sphericalangle QPA.$$

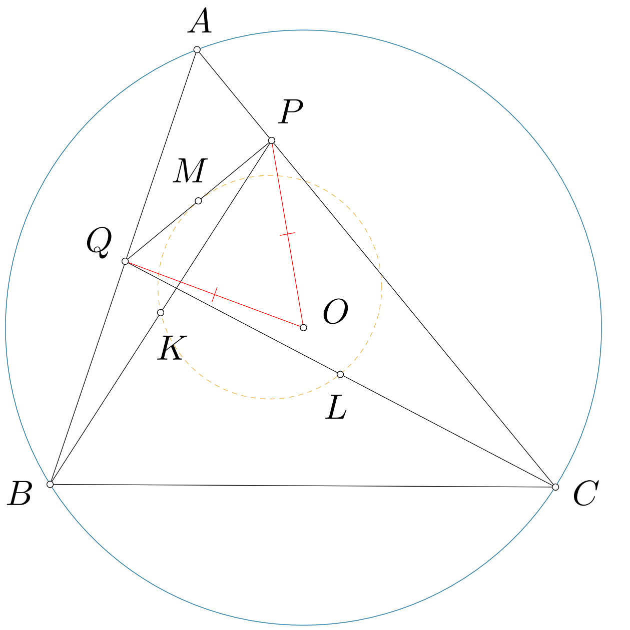
Analogicznie

$$\sphericalangle MLK = \sphericalangle AQP.$$

Zatem trójkąty AQP i MLK są podobne. Otrzymujemy, że

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{LM}{KM} = \frac{2 \cdot LM}{2 \cdot KM} = \frac{CP}{BQ}, \quad \text{więc} \quad AQ \cdot BQ = AP \cdot CP,$$

co chcieliśmy pokazać.



Zadanie 22. (IMO Shortlist 2011 G5)
Niech ABC będzie trójkątem o środku okręgu wpisanego I oraz okręgu opisanym ω. Niech D i E będą drugimi punktami przecięcia okręgu ω z prostymi AI i BI. Cięciwa DE przecina prostą AC w punkcie F oraz prostą BC w punkcie G. Niech P będzie punktem przecięcia prostej przechodzącej przez punkt F równoległej do prostej AD z prostą przez punkt G równoległą do prostej BE. Niech K będzie punktem przecięcia prostych stycznych do okręgu ω w punktach A i B. Udowodnić, że proste AE, BD i KP są współpękowe lub parami równoległe.

Rozwiązanie:
Skoro

$$\sphericalangle IAF = \sphericalangle DAC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BED = \sphericalangle IEF,$$

to czworokąt $AIFE$ jest cykliczny. Okrąg opisany na tym czworokącie oznaczmy przez ω_1. Analogicznie czworokąt $BDGI$ jest cykliczny; oznaczmy jego okrąg opisany przez ω_2.

Prosta AE jest osią potęgową okręgów ω i ω_1, natomiast prosta BD jest osią potęgową okręgów ω i ω_2. Niech t będzie osią potęgową okręgów ω_1 i ω_2. Z twierdzenia o trzech osiach potęgowych wiemy, że te trzy proste przecinają się w jednym punkcie albo są parami równoległe. Pokażemy, że prosta t jest w istocie prostą PK.

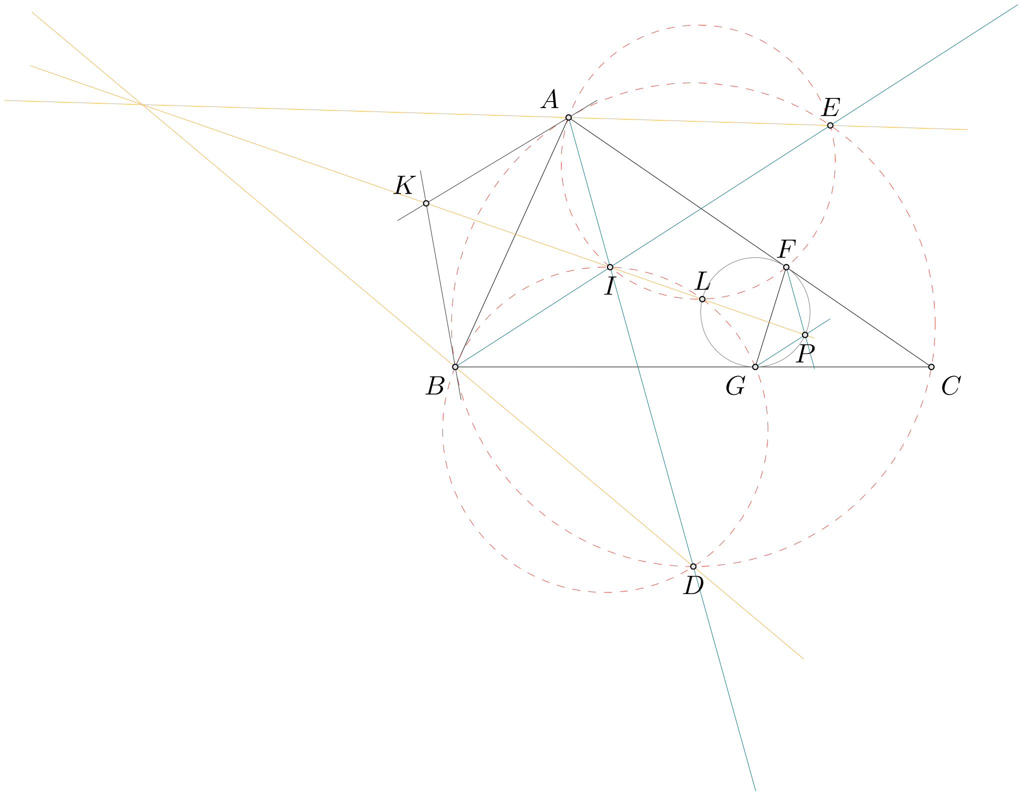
Niech L będzie drugim punktem przecięcia okręgów ω_1 i ω_2, zatem $t = IL$. Jeśli okręgi są styczne, to $L = I$ i t jest ich wspólną styczną. Niech prosta t przecina okręgi opisane na trójkątach ABL oraz FGL odpowiednio w punktach $K' \neq L$ oraz $P' \neq L$. Korzystając z kątów skierowanych otrzymujemy

$$\measuredangle(AB, BK') = \measuredangle(AL, LK') = \measuredangle(AL, LI) = \measuredangle(AE, EI) = \measuredangle(AE, EB) = \measuredangle(AB, BK).$$

Zatem $BK' \parallel BK$. Analogicznie otrzymujemy $AK' \parallel AK$, a więc $K' = K$. Dalej mamy

$$\measuredangle(P'F, FG) = \measuredangle(P'L, LG) = \measuredangle(IL, LG) = \measuredangle(ID, DG) = \measuredangle(AD, DE) = \measuredangle(PF, FG),$$

skąd $P'F \parallel PF$ oraz analogicznie $P'G \parallel PG$. Wobec tego $P' = P$. Oznacza to, że prosta t przechodzi przez punkty K oraz P, co kończy dowód.



Dlaczego informatycy mają łatwiej na OM?

Sylwia Sapkowska

W zadaniach mogą pojawiać się różne techniki, również te, które pozornie wydają się nie być związane z algorytmiką, ale jednak z informatycznego punktu widzenia są prostsze.

Sumy prefiksowe

Definicja (Sumy prefiksowe)

Cały trik polega na tym, by zamiast jakiegoś ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ rozważać ciąg $b_0, b_1, \ldots, b_n$ *sum prefiksowych*, gdzie $b_0 = 0$ (suma pustego prefiksu) oraz

$$b_i = \sum_{k=1}^{i} a_k, \quad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Warto zauważyć, że ciąg sum prefiksowych ma $n + 1$ elementów. Warto o nich pamiętać, gdy mamy zadania, w których operujemy sumą na przedziale, ponieważ

$$\sum_{k=l}^{r} a_k = b_r - b_{l-1}.$$

Zadanie 1.
Udowodnić, że w każdym ciągu n liczb całkowitych istnieje spójny podciąg o sumie podzielnej przez n.

Zadanie 2. (71 OM, II etap, zadanie 2)
Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Miłosz, w ramach odpoczynku od geometrii, siłowni i Sylwii, ma za zadanie napisać na tablicy wszystkie liczby od 1 do $2n - 1$ po kolei, przy czym każdą z nich może napisać czerwoną albo niebieską kredą. Powiemy, że para liczb $i, j \in \{1, \ldots, 2n - 1\}$, przy czym $i \leqslant j$, jest *urocza*, jeśli nieparzyście wiele spośród liczb $i, i + 1, \ldots, j$ zostało napisanych na tablicy na niebiesko. Wyznaczyć, w zależności od n, największą liczbę *uroczych* par, jaką Miłosz może uzyskać.

Zadanie 3.
Dane są dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_m$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniające $a_i \leqslant n$ oraz $b_j \leqslant m$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Udowodnić, że istnieją zbiory indeksów $I \subsetneq \{1, \ldots, m\}$, $J \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, dla których równość

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j.$$

jest spełniona oraz $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$.

Algorytmy zachłanne

Definicja (Algorytm zachłanny)

Algorytm zachłanny to taki algorytm, który w każdym kroku dokonuje wyboru, który wydaje się w danej chwili najkorzystniejszy. Tak więc dokonywany jest lokalnie optymalny wybór w nadziei, że doprowadzi to do globalnie optymalnego rozwiązania[a].

[a] Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stein C., *Wprowadzenie do algorytmów*, wyd. VII, rozdział 16

Przykładowo, w każdym kroku do konstruowanego rozwiązania dołączamy element największy spośród pozostałych albo kontynuujemy wykonywanie odpowiednich operacji do momentu spełnienia tezy.

Kilka dobrych rad do zadań:

(1) jeśli opracujemy strategię wskazującą, jakie działania są najkorzystniejsze, jej poprawność możemy łatwo uzasadnić poprzez odwołanie się do metody ekstremum i argumentu, że ewentualna zamiana prowadziłaby do polepszenia rozwiązania,

(2) warto rozpatrywać procesy występujące w zadaniu *od tyłu*; możemy na przykład zastanowić się, jaka operacja została wykonana jako ostatnia oraz z jakiego powodu,

(3) konstruowany przez nas algorytm (w przypadku obiektów skończonych) powinien być skończony, co zazwyczaj wymaga odrębnego uzasadnienia.

Zadanie 4. (72 OM, II etap, zadanie 1)
Maciek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami 1, 2, $\ldots$, n, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Maciek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją: wpierw zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Maciek zacznie zdejmować karty, Marysia pokoloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko albo żółto. Udowodnić, że Marysia może pokolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Maćka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.

Zadanie 5. (31 OI, II etap)
Mamy dane n pojemników, każdy o pojemności $k \in \mathbb{Z}_+$ oraz n substancji o całkowitych dodatnich objętościach a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Wiadomo, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant nk.$$

Każda substancja może zostać podzielona na dowolnie wiele pojemników w dowolnych całkowitych ilościach. Udowodnić, że możliwe jest umieszczenie substancji w pojemnikach tak, by w każdym pojemniku znajdowały się maksymalnie dwie różne substancje (sumaryczna objętość substancji w danym pojemniku nie może przekroczyć k).

Zadanie 6. (73 OM, I etap, zadanie 7)
W każdym wierzchołku 2021–kąta foremnego siedzi tresowana papuga. Każdej przekątnej tego wielokąta przypisano numer będący dodatnią liczbą całkowitą, przy czym różnym przekątnym przypisano różne numery. Na sygnał tresera papugi zaczynają latać wzdłuż przekątnych, od wierzchołka do wierzchołka. Przestrzegają one następującej reguły: przed każdym lotem każda papuga sprawdza, które przekątne mające koniec w jej obecnym położeniu mają większy numer od wszystkich przekątnych, wzdłuż których ta papuga dotychczas leciała; spośród nich wybiera tę o najniższym numerze i leci wzdłuż niej. Jeśli takich przekątnych nie ma, papuga przestaje latać. Wykazać, że każda papuga zatrzyma się w innym wierzchołku.

Uwaga. W jednym wierzchołku może znajdować się wiele papug równocześnie. Każda papuga może odwiedzać wielokrotnie ten sam wierzchołek.

Zadanie 7. (IMO Shortlist 2001 C4)
Zbiór liczb całkowitych $\{x, y, z\}$ dla $x < y < z$ nazywamy *przydatnym dla pomocy kuchennej*, gdy

$$\{z - y,\ y - x\} = \{420, 2137\}.$$

Udowodnić, że wszystkie nieujemne liczby całkowite można podzielić na parami rozłączne zbiory *przydatne dla pomocy kuchennej.*

Algorytmy grafowe

Definicja (Drzewo)

Następujące definicje są równoważne. Opisywany przez nie graf nazywamy *drzewem.*

(a) Nieskierowany graf spójny i acykliczny.

(b) Graf nieskierowany, w którym pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami istnieje dokładnie jedna ścieżka.

(c) Graf spójny o n wierzchołkach i $n - 1$ krawędziach.

Definicja (Drzewo ukorzenione)

Drzewem ukorzenionym nazywamy parę (T, v), gdzie T jest drzewem, a v jest wybranym jego wierzchołkiem. Wierzchołek ten nazywamy *korzeniem.* Przyjmujemy konwencję, że korzeń znajduje się „na górze” drzewa, a położenie każdego wierzchołka względem korzenia określamy poprzez jego odległość od korzenia mierzoną długością jedynej ścieżki łączącej te wierzchołki.

Definicja (Przodek wierzchołka)

Dane jest ukorzenione drzewo z korzeniem r. Mówimy, że wierzchołek u jest *przodkiem* wierzchołka v, jeżeli u leży na ścieżce łączącej v z korzeniem r. Ponadto jeżeli u jest przodkiem wierzchołka v oraz u i v są połączone krawędzią, to u nazywamy *ojcem* lub *rodzicem* wierzchołka v, natomiast v nazywamy *synem* lub *dzieckiem* wierzchołka u.

Definicja (Poddrzewo i naddrzewo)

Poddrzewo o korzeniu v to zbiór wszystkich wierzchołków, które są potomkami wierzchołka v, łącznie z samym v.

Naddrzewo wierzchołka v to zbiór wszystkich wierzchołków drzewa ukorzenionego, które nie należą do poddrzewa o korzeniu w v.

Definicja (Liść)

W ogólnym grafie G *liściem* nazywamy wierzchołek stopnia 1. W drzewie ukorzenionym przyjmuje się dodatkowo konwencję, że korzeń nie jest liściem, chyba że drzewo składa się wyłącznie z jednego wierzchołka.

Poniższe definicje mogą być przydatne w zwięzłym formułowaniu rozwiązań.

Definicja (Most)

Mostem nazywamy krawędź, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu.

Definicja (Punkt artykulacji)

Punktem artykulacji nazywamy wierzchołek, którego usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu.

Przy okazji warto zauważyć, że w drzewach każda krawędź jest mostem oraz wszystkie wierzchołki nie będące liściami są punktami artykulacji.

Definicja (Drzewo rozpinające)

Drzewem rozpinającym nazywamy drzewo powstałe po usunięciu niektórych krawędzi z grafu, które zawiera wszystkie wierzchołki wyjściowego grafu.

Definicja (Centroid)

Centroidem nazywamy taki wierzchołek drzewa, którego usunięcie powoduje rozpad drzewa na spójne składowe o rozmiarach co najwyżej $\lfloor n/2 \rfloor$.

Algorytm DFS i drzewo DFS

```
dfs(wierzcholek v):
    oznacz v jako odwiedzony
    dla kazdego wierzcholka x sasiadujacego z v:
        jesli x nieodwiedzony:
            dfs(x)
```

Możemy o tym myśleć w ten sposób, że robimy sobie spacer po drzewie. Wyobraźmy sobie, że jesteśmy w wierzchołku v. Są dwie możliwości:

(i) jeśli istnieje sąsiadujący wierzchołek, w którym jeszcze nie byliśmy, to tam idziemy,

(ii) w przeciwnym wypadku wszyscy sąsiedzi już są odwiedzeni, więc wracamy drogą, którą przyszliśmy.

Na podstawie algorytmu DFS krawędzie możemy podzielić na

(a) *krawędzie drzewowe*, czyli takie, którymi przeszliśmy naszym spacerem – tworzą one pewne ukorzenione drzewo rozpinające, które nazywamy *drzewem DFS*,

(b) *krawędzie wsteczne*, czyli wszystkie pozostałe krawędzie grafu.

Warto myśleć o krawędziach drzewowych jako skierowanych w dół, a o krawędziach wstecznych, jako skierowanych w górę. Dobrym ćwiczeniem na zrozumienie algorytmu jest pokazanie, że krawędzie wsteczne łączą wierzchołek v wyłącznie z jego przodkami.

Zadanie 8.
Dany jest spójny graf G o parzystej liczbie wierzchołków. Udowodnić, że możemy usunąć część krawędzi, tak aby każdy wierzchołek miał nieparzysty stopień.

Zadanie 9.
Niech G będzie spójnym grafem nieskierowanym. Udowodnić, że krawędzie w grafie G mogą zostać zorientowane w taki sposób, że otrzymany graf jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy, gdy graf G nie posiada mostów.

Uwaga. Graf skierowany jest silnie spójny jeśli dla wszystkich wierzchołków u oraz v ($u \neq v$) istnieje ścieżka z wierzchołka u do wierzchołka v.

Zadanie 10.
Wyznaczyć maksymalną liczbę punktów artykulacji w spójnym grafie, który ma n wierzchołków.

Zadanie 11. (67 OM, II etap, zadanie 6)
Mamy nieskierowany spójny graf o parzystej liczbie krawędzi. Udowodnić, że krawędzie da się podzielić na takie pary, że odcinki z jednej pary mają wspólny koniec.

Centroidy

Zadanie 12.
Udowodnić, że w każdym drzewie istnieje centroid. Kiedy centroid nie jest unikalny? Pokazać przykład grafu, który ma dwa centroidy.

Zadanie 13. (30 OI, II etap)
Antek i Marysia grają w grę na planszy, która jest drzewem, czyli ma n pól i $n-1$ par pól sąsiadujących ze sobą, gdzie każde dwa pola łączy dokładnie jedna ścieżka. Początkowo wszystkie pola planszy są białe, oprócz pewnego jednego pola x pokolorowanego na czerwono, które należy do Antka, i jednego innego pola y pokolorowanego na niebiesko, które należy do Marysi. Gracze naprzemiennie wybierają jedno dowolne pole u pokolorowane na swój kolor, a następnie kolorują na ten kolor jedno dowolne białe pole v, które sąsiaduje z polem u. Grę przegrywa ten gracz, który nie będzie mógł wykonać ruchu. Rozstrzygnąć, kto ma strategię wygrywającą w zależności od początkowych pól x oraz y.

Zadanie 14.
Pewien kraj składa się z n miast połączonych $n-1$ drogami tak, że istnieje (niekoniecznie bezpośrednie) połączenie drogowe pomiędzy każdą parą miast. Niedługo odbędzie się jagielloński turniej gry we flanki i jesteś organizatorem tego prestiżowego przedsięwzięcia. Zgłosiło się dokładnie $2k$ drużyn pochodzących z $2k$ różnych miast $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$. Podczas zawodów drużyny będą grały w k parach, ale jeszcze nie ustalono, jaki będzie podział. Ponadto każda drużyna będzie potrzebować noclegu. W każdym mieście jest dokładnie jeden hotel. Drużyny będące w parze nocują w tym samym hotelu (inne pary mogą nocować w tym samym hotelu). Spełniony musi być przy tym warunek: jeśli drużyny z miast u i w grają w parze, to ich hotel musi znajdować się w mieście leżącym na najkrótszej ścieżce łączącej wierzchołki u oraz w. Wyznaczyć podział na drużyny, który minimalizuje liczbę różnych hoteli i spełnia powyższy warunek.

Bonus

Zadanie 15. (Mszana 2023)
Kostek wpisał w planszę $n \times n$, przy czym $n \geqslant 3$, wszystkie liczby całkowite od 1 do n^2, tak że liczby j oraz $j+1$ są w sąsiadujących polach dla $j = 1, 2, \ldots, n^2 - 1$. Przyszedł Marek S. i chciałby dowiedzieć się, w jakim polu znajduje się 1. Niestety Kostek nie chce pokazać mu planszy, ale zgodził się zagrać w grę. W jednym ruchu Marek S. może wybrać dowolne pole i zapytać o jego zawartość. Liczba n jest *urocza*, gdy Marek S. jest w stanie (swoim genialnym umysłem) znaleźć jedynkę w mniej niż $3n$ ruchach. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele *uroczych* liczb.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Sylwia Sapkowska*, Jan Kosiorowski, Michał Oprocha.

Zadanie 1.
Udowodnić, że w każdym ciągu n liczb całkowitych istnieje spójny podciąg o sumie podzielnej przez n.

Rozwiązanie:
Niech ciąg $(a_i)_{i=1}^n$ będzie ciągiem danym w treści zadania. Dodatkowo niech ciąg $(b_i)_{i=0}^n$ będzie ciągiem sum prefiksowych ciągu (a_i). Ciąg (b_i) ma $n+1$ wyrazów, zatem z zasady szufladkowej Dirichleta pewne dwie reszty z dzielenia przez n powtórzą się wśród wyrazów tego ciągu. Niech tymi wyrazami będą b_i, b_j, gdzie $i < j$. Wtedy przedział $[i+1, j]$ spełnia warunki zadania, ponieważ

$$n \mid b_j - b_i = \sum_{k=i+1}^{j} a_k.$$

Zadanie 2. (71 OM, II etap, zadanie 2)
Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Miłosz, w ramach odpoczynku od geometrii, siłowni i Sylwii, ma za zadanie napisać na tablicy wszystkie liczby od 1 do $2n-1$ po kolei, przy czym każdą z nich może napisać czerwoną albo niebieską kredą. Powiemy, że para liczb i, $j \in \{1, \ldots, 2n-1\}$, przy czym $i \leqslant j$, jest *urocza*, jeśli nieparzyście wiele spośród liczb i, $i+1$, $\ldots$, j zostało napisanych na tablicy na niebiesko. Wyznaczyć, w zależności od n, największą liczbę *uroczych* par, jaką Miłosz może uzyskać.

Rozwiązanie:
Niech $(a_i)_{i=1}^{2n-1}$ będzie takim ciągiem, że jeśli Miłosz napisał liczbę i niebieskim kolorem, to $a_i = 1$, a jeśli Miłosz napisał liczbę i czerwonym kolorem, to $a_i = 0$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$. Dodatkowo niech ciąg $(b_i)_{i=0}^n$ będzie ciągiem sum prefiksowych ciągu (a_i). Wtedy warunek, że w przedziale $[i, j]$ jest nieparzyście wiele niebieskich liczb, oznacza, że

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = b_j - b_{i-1} \equiv 1 \pmod 2.$$

Zatem wynik jest równy liczbie par (b_i, b_j) różnej parzystości dla $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Jeśli w ciągu (b_i) jest p liczb parzystych, to jest $2n-p$ liczb nieparzystych, a wynik wynosi

$$p \cdot (2n-p).$$

Jest on maksymalny dla $p = n$, ponieważ to wyrażenie jest funkcją kwadratową zmiennej p. Zatem maksymalny wynik to n^2, który jest osiągalny, gdy Miłoszowi połamie się czerwona kreda i pokoloruje wszystkie liczby na niebiesko.

Zadanie 3.
Dane są dodatnie liczby całkowite a_1, a_2, $\ldots$, a_m oraz b_1, b_2, $\ldots$, b_n spełniające $a_i \leqslant n$ oraz $b_j \leqslant m$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Udowodnić, że istnieją zbiory indeksów $I \subsetneq \{1, \ldots, m\}$, $J \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, dla których równość

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j.$$

jest spełniona oraz $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$.

Rozwiązanie:
Chcemy znaleźć dowolne podzbiory o równej sumie. Ponieważ bezpośrednie operowanie takimi przedziałami jest niewygodne, wykażemy twierdzenie silniejsze – że istnieją dwa spójne przedziały o równej sumie. Niech

$$A_i = \sum_{k=1}^{i} a_k, \qquad B_i = \sum_{k=1}^{i} b_k,$$

przy czym $A_0 = B_0 = 0$ oraz $1 \leqslant i \leqslant n$. Jeśli $A_m = B_n$, to teza jest spełniona, więc załóżmy bez straty ogólności, że $A_m < B_n$. Dla dowolnego $1 \leqslant k \leqslant m$ mamy $A_k - B_0 > 0$ oraz $A_k - B_n < 0$. Wynika to z faktu, że wraz ze wzrostem j wartość wyrażenia $A_k - B_j$ jest ściśle malejąca, a zatem dla dostatecznie dużych j przyjmuje wartości ujemne. Niech

$$f(k) = \min \{A_k - B_i \geqslant 0 \,:\, 0 \leqslant i \ \leqslant n\},$$

czyli innymi słowy szukamy największego indeksu, gdy wyrażenie $A_k - B_i$ jest nieujemne. Z ograniczenia $b_i \leqslant m$ wynika oszacowanie

$$f(k) \leqslant m - 1 \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Jeśli istnieje k takie, że $f(k) = 0$, to teza jest spełniona. W przeciwnym wypadku mamy m liczb $A_1, \ldots, A_m$ oraz jedynie $m - 1$ możliwych wartości, jakie mogą przyjmować. Zatem z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje $k < l$, takie że $f(k) = f(l)$. Niech $s < t$ będą takie, że $f(k) = A_k - B_s$ oraz $f(l) = A_l - B_t$. Wtedy

$$A_k - B_s = A_l - B_t, \quad \text{więc} \quad a_{k+1} + \cdots + a_l = A_l - A_k = B_t - B_s = b_{s+1} + \cdots + b_t,$$

co kończy dowód.

Zadanie 4. (72 OM, II etap, zadanie 1)
Maciek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami 1, 2, ..., n, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Maciek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją: wpierw zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Maciek zacznie zdejmować karty, Marysia pokoloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko albo żółto. Udowodnić, że Marysia może pokolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Maćka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.

Rozwiązanie:
Zastanówmy się nad procesem odwrotnym: Maciek kładzie na stół po kolei karty n, $n - 1$, ..., 1. W każdym momencie karta, którą dokłada, musi być innego koloru niż ta po lewej i prawej stronie, która została już położona (jeśli istnieje).

Skoro sąsiednich kart może być maksymalnie dwie, a Marysia ma (aż!) trzy kolory, to zawsze znajdzie się kolor, którego nie ma wśród sąsiadów i którego Marysia może użyć, by spełnić warunek z zadania i nie popsuć zabawy Maćkowi.

Zadanie 5. (31 OI, II etap)
Mamy dane n pojemników, każdy o pojemności $k \in \mathbb{Z}_+$ oraz n substancji o całkowitych dodatnich objętościach $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wiadomo, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant nk.$$

Każda substancja może zostać podzielona na dowolnie wiele pojemników w dowolnych całkowitych ilościach. Udowodnić, że możliwe jest umieszczenie substancji w pojemnikach tak, by w każdym pojemniku znajdowały się maksymalnie dwie różne substancje (sumaryczna objętość substancji w danym pojemniku nie może przekroczyć k).

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Baza indukcji jest oczywista – istnieje tylko jeden pojemnik. Załóżmy indukcyjnie, że teza jest spełniona dla $n-1$ pojemników. Rozważmy dowolne n pojemników. Strategia zachłanna:

1. Bierzemy nowy pusty pojemnik.
2. Bierzemy substancję o najmniejszej objętości – oznaczmy ją, jako x. Oczywiście $x \leqslant k$, ponieważ gdyby $x > k$, to
$$\sum_{i=1}^{n} a_i > nk,$$
sprzeczność. Do tego pojemnika wlewamy całą substancję x.
3. Weźmy też inną substancję o największej objętości – oznaczmy ją, jako y. Jeśli $y \leqslant k$, to każdą z substancji możemy wlać do innego pojemnika, co oczywiście będzie spełniać warunki zadania. W przeciwnym wypadku dopełniamy substancją y do pełna (czyli do k) ten pojemnik, w którym jest x. Zauważmy, że liczba dostępnych pojemników oraz substancji zmniejszyła się o jeden, a suma a_i zmniejszyła się o k – otrzymaliśmy założenie indukcyjne.

Zadanie 6. (73 OM, I etap, zadanie 7)
W każdym wierzchołku 2021–kąta foremnego siedzi tresowana papuga. Każdej przekątnej tego wielokąta przypisano numer będący dodatnią liczbą całkowitą, przy czym różnym przekątnym przypisano różne numery. Na sygnał tresera papugi zaczynają latać wzdłuż przekątnych, od wierzchołka do wierzchołka. Przestrzegają one następującej reguły: przed każdym lotem każda papuga sprawdza, które przekątne mające koniec w jej obecnym położeniu mają większy numer od wszystkich przekątnych, wzdłuż których ta papuga dotychczas leciała; spośród nich wybiera tę o najniższym numerze i leci wzdłuż niej. Jeśli takich przekątnych nie ma, papuga przestaje latać. Wykazać, że każda papuga zatrzyma się w innym wierzchołku.

Uwaga. W jednym wierzchołku może znajdować się wiele papug równocześnie. Każda papuga może odwiedzać wielokrotnie ten sam wierzchołek.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy nie wprost, że mamy dwie papugi (nazwijmy je Antek i Marysia), które skończyły w tym samym wierzchołku z swoje latanie po grafie. Będziemy patrzeć na ostatnie ruchy papug. Obydwie ścieżki, którymi latały Antek i Marysia, mają najdłuższy wspólny sufiks odwiedzanych wierzchołków. Niech L będzie jego długością i zauważmy, że oczywiście $L \geqslant 1$. Rozważmy trzy przypadki.

1. $L = 1$. Oznacza to, że papugi spotkały się dopiero w wierzchołku z. Powiedzmy, że wagi ostatnich krawędzi, którymi papugi Antek i Marysia trafiły do z, to odpowiednio bez straty ogólności $a_1 < a_2$. Wtedy Antek ma możliwość lotu krawędzią o wadze a_2, ponieważ $a_2 > a_1$ oraz Antek jeszcze nie użył tej krawędzi, więc na pewno poleci dalej i nie zakończy podróży w wierzchołku z.
2. $L > 1$, przy czym żadna z rozważanych ścieżek nie zawiera się w drugiej; w szczególności istnieje chwila, w której ścieżki te się łączą. Powiedzmy, że wagi ostatnich krawędzi, którymi Antek i Marysia trafili do tego samego wierzchołka p, to odpowiednio bez straty ogólności $a_1 < a_2$, a kolejna użyta przez nie obie krawędź ma wagę a, gdzie $a_1 < a_2 < a$. Wtedy Antek nie wybierze krawędzi o wadze a, ponieważ ma do wyboru krawędź o wadze a_2, która ma mniejszą wagę i spełnia warunki.
3. $L > 1$ i ścieżka Marysi bez straty ogólności zawiera się całkowicie w ścieżce Antka. Powiedzmy, że Antek leciał krawędzią o wadze a_1, trafił do wierzchołka Marysi, a następnie krawędzią o wadze a_2, gdzie $a_1 < a_2$. Oznacza to jednak, że Marysia wybierze na pierwszy ruch krawędź o mniejszej wadze a_1, a nie a_2, więc taka sytuacja nie zajdzie.

Wszystkie przypadki prowadzą do sprzeczności, zatem nasze założenie było błędne.

Zadanie 7. (IMO Shortlist 2001 C4)
Zbiór liczb całkowitych $\{x, y, z\}$ dla $x < y < z$ nazywamy *przydatnym dla pomocy kuchennej*, gdy

$$\{z - y,\ y - x\} = \{420, 2137\}.$$

Udowodnić, że wszystkie nieujemne liczby całkowite można podzielić na parami rozłączne zbiory *przydatne dla pomocy kuchennej.*

Rozwiązanie:
Przedstawmy zachłanny algorytm, który spełnia warunki zadania. Jeśli liczba została już przyporządkowana do pewnego zbioru przydatnego dla pomocy kuchennej, to będziemy nazywać ją *odwiedzoną*. Dodatkowo niech $a = 420$ oraz $b = 2137$. Kroki algorytmu zachłannego:

1. Bierzemy najmniejsze nieodwiedzone k.
2. Jeśli $k + a$ jest nieodwiedzone, to nowy zbiór to
$$\{k,\ k + a,\ k + a + b\}.$$
3. Jeśli $k + a$ było już odwiedzone, to nowym zbiorem będzie
$$\{k,\ k + b,\ k + a + b\}.$$
4. Zaznaczamy wszystkie elementy tego zbioru jako odwiedzone.

Pokażemy, że ten algorytm jest optymalny. Na początek pokażemy, że w drugim i trzecim kroku liczba $k + a + b$ jest jeszcze nieodwiedzona. Przypuśćmy nie wprost, że ta liczba została odwiedzona wcześniej, czyli należy do pewnego zbioru X przydatnego dla pomocy kuchennej. Rozważmy następujące przypadki.

(i) Liczba $k + a + b$ jest największą liczbą w zbiorze X. Wówczas liczba k jest już odwiedzona – sprzeczność.

(ii) Liczba $k+a+b$ jest środkowym elementem X. Wtedy liczba $k+a$ lub $k+b$ jest najmniejszym elementem – sprzeczność z pierwszym krokiem algorytmu, ponieważ wybieramy najmniejszą nieodwiedzoną liczbę k.

(iii) Liczba $k+a+b$ jest najmniejszym elementem. Analogicznie do poprzedniego przypadku ta liczba nie może być najmniejszym elementem w zbiorze X.

Zatem liczba $k+a+b$ w momencie wykonywania drugiego i trzeciego kroku była jeszcze nieodwiedzona.

Teraz pokażemy, że jeśli liczba $k+a$ została odwiedzona, to liczba $k+b$ nie była jeszcze odwiedzona, czyli faktycznie możemy wziąć zbiór opisany w trzecim kroku. Załóżmy nie wprost, że liczby $k+a$ oraz $k+b$ zostały odwiedzone i liczba $k+b$ należy do pewnego zbioru Y przydatnego dla pomocy kuchennej. Rozważmy następujące przypadki.

(i) Liczba $k+b$ jest najmniejszym elementem zbioru Y. Wtedy otrzymujemy sprzeczność analogiczną do powyższej.

(ii) Liczba $k+b$ była środkowym elementem zbioru Y. Zatem liczba $k+b-a$ musi być najmniejszym elementem, ponieważ w przeciwnym wypadku liczba k byłaby już odwiedzona. Jednak

$$k+b-a=k+2137-420>k,$$

sprzeczność.

(iii) Liczba $k+b$ była największym elementem w zbiorze Y. Wówczas liczba $k-a$ jest najmniejszym elementem w tym zbiorze. Wtedy dla liczby $k-a$ wykonamy drugi krok, czyli środkowym elementem będzie liczba $k-a+a=k$. Oznacza to, że liczba k byłaby już odwiedzona – sprzeczność.

Zatem skoro tworzymy zbiory z liczb nieodwiedzonych, to zbiory przydatne dla pomocy kuchennej są parami rozłączne. Ponadto skoro zaczęliśmy od najmniejszej z liczb, to wszystkie liczby zostały uwzględnione.

Zadanie 8.
Dany jest spójny graf G o parzystej liczbie wierzchołków. Udowodnić, że możemy usunąć część krawędzi, tak aby każdy wierzchołek miał nieparzysty stopień.

Rozwiązanie:
Weźmy dowolny graf G oraz drzewo rozpinające T tego grafu. Usuńmy krawędzie tego grafu w taki sposób, aby z grafu G otrzymać drzewo T. Dodatkowo ukorzeńmy drzewo G w pewnym wierzchołku r. Będziemy wykonywać następujący algorytm.

(1) Wybieramy najgłębszy (najdalszy od korzenia) nieodwiedzony wierzchołek $v \neq r$.

(2) Patrzymy na obecny stopień wierzchołka v. Jeśli ten stopień jest parzysty, to usuwamy krawędź pomiędzy v a rodzicem v – stopień wierzchołka v staje się nieparzysty.

Jeśli rozpatrujemy wierzchołek v, to wszystkie jego dzieci były już sprawdzone i mają nieparzysty stopień, ponieważ są dalej od korzenia. Pozostaje uzasadnić, że wierzchołek r również spełnia warunki – nie posiada on rodzica, czyli niekoniecznie jego stopień musi być nieparzysty. Skoro liczba n jest parzysta, a do tej pory rozpatrzyliśmy $n-1$ wierzchołków, z których każdy ma nieparzysty stopień, to suma stopni wszystkich wierzchołków poza wierzchołkiem r jest nieparzysta. Z lematu o uściskach dłoni wynika, że suma stopni wszystkich wierzchołków jest parzysta, więc stopień r musi być nieparzysty.

Zadanie 9.
Niech G będzie spójnym grafem nieskierowanym. Udowodnić, że krawędzie w grafie G mogą zostać zorientowane w taki sposób, że otrzymany graf jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy, gdy graf G nie posiada mostów.

Uwaga. Graf skierowany jest silnie spójny jeśli dla wszystkich wierzchołków u oraz v ($u \neq v$) istnieje ścieżka z wierzchołka u do wierzchołka v.

Rozwiązanie:
Jeśli graf jest silnie spójny, to nie może posiadać mostów. W istocie gdyby w tym grafie istniał most o końcach w wierzchołkach u oraz v, to wówczas wierzchołki u oraz v łączy dokładnie jedna ścieżka. Stąd nie możemy jej skierować w taki sposób, aby graf był silnie spójny. W takim razie zajmijmy się implikacją w drugą stronę. Rozważmy ukorzenione drzewo DFS tego grafu. Zauważmy, że krawędź drzewowa $u-v$ (bez straty ogólności u jest głębiej) jest mostem wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje krawędź wsteczna łącząca wierzchołek z poddrzewa u z przodkiem v lub v. Usunięcie krawędzi $u \sim v$ dzieli drzewo DFS na dwie części, ale jeśli istnieje

krawędź wsteczna, która łączy poddrzewo v z naddrzewem u, to te części wciąż będą spójne. Ponadto krawędź wsteczna nie może być mostem, ponieważ dopełnia cykl, a nic na cyklu nie jest mostem. Skierujmy krawędzie drzewowe w dół, a krawędzie wsteczne w górę. Wtedy istnieje ścieżka od korzenia do każdego wierzchołka tylko krawędziami drzewowymi. Pokażemy, że istnieje także ścieżka od każdego wierzchołka do korzenia. Rozważmy dowolny wierzchołek v. Skoro nie ma mostów, to dla krawędzi drzewowej pomiędzy wierzchołkiem v i rodzicem v istnieje krawędź, która ją *przeskakuje*. Idziemy zatem w dół drzewa krawędziami drzewowymi do takiej krawędzi wstecznej, którą możemy przejść do pewnego przodka v. Kontynuujemy ten proces i wspinamy się coraz wyżej, aż trafiamy do korzenia. Skoro istnieją ścieżki w obie strony między korzeniem, a dowolnym wierzchołkiem v, to graf jest silnie spójny.

Zadanie 10.
Wyznaczyć maksymalną liczbę punktów artykulacji w spójnym grafie, który ma n wierzchołków.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli w pewnym drzewie rozpinającym grafu G wierzchołek nie jest punktem artykulacji, to dodanie jakichś innych krawędzi grafu G nie spowoduje, że wierzchołek stanie się punktem artykulacji. Drzewo rozpinające ma przynajmniej dwa liście, które nie są punktami artykulacji, zatem w dowolnym grafie również istnieją co najmniej dwa punkty nie będące punktami artykulacji. Grafem, który osiąga maksimum $n-2$ punktów artykulacji jest ścieżka.

Zadanie 11. (67 OM, II etap, zadanie 6)
Mamy nieskierowany spójny graf o parzystej liczbie krawędzi. Udowodnić, że krawędzie da się podzielić na takie pary, że odcinki z jednej pary mają wspólny koniec.

Rozwiązanie:
Będziemy rozważać drzewo DFS tego grafu i podobnie jak wcześniej będziemy rozpatrywać wierzchołki po kolei od najgłębszych (czyli od liści). Są trzy rodzaje krawędzi, które mają swój koniec w wierzchołku v:

- wsteczne idące do przodka wierzchołka v niebędącego rodzicem wierzchołka v,
- krawędzie do dzieci wierzchołka v,
- krawędzie do rodzica wierzchołka v.

Dla wierzchołka v jego krawędzie będziemy parować w powyższej kolejności. Dodatkowo przyjmujemy, że usuwamy z grafu krawędzie sparowane. W ten sposób, jeśli stopień był nieparzysty, to jedyną krawędzią jaka zostanie, będzie krawędź między wierzchołkiem v i rodzicem wierzchołka v.

Przy rozważaniu wierzchołka v wiemy, że wszystkie krawędzie wsteczne, które łączyły wierzchołek v z wierzchołkiem w jego poddrzewie, są już sparowane. Pozostają tylko krawędzie wsteczne do przodka v. Ponadto rozumowanie nie psuje się w korzeniu, ponieważ w każdym momencie mamy parzyście wiele krawędzi. Zatem korzeń w momencie sprawdzania będzie miał parzystą liczbę dzieci, które oczywiście da się sparować.

Zadanie 12.
Udowodnić, że w każdym drzewie istnieje centroid. Kiedy centroid nie jest unikalny? Pokazać przykład grafu, który ma dwa centroidy.

Rozwiązanie:
Weźmy dowolny wierzchołek v i ukorzeńmy drzewo w tym wierzchołku. Jeśli jest on centroidem, to dowód zadania zostaje zakończony. Załóżmy teraz, że ten wierzchołek nie jest centroidem. W takim razie istnieje poddrzewo o rozmiarze równym $m > \lfloor n/2 \rfloor$. Rozważmy to poddrzewo. Niech wierzchołek u zawiera się w tym poddrzewie oraz istnieje krawędź łącząca wierzchołki u oraz v. Powtórzmy opisaną wyżej procedurę dla wierzchołka u. Wówczas wielkość maksymalnego poddrzewa zmaleje. Jest tak, ponieważ powstałe poddrzewo ukorzenione w wierzchołku v będzie miało rozmiar maksymalnie równy

$$n - m < n - \lfloor n/2 \rfloor \leqslant \lfloor n/2 \rfloor.$$

Oczywiście pozostałe poddrzewa będą miały rozmiar nie większy niż $m - 1$. Taka procedura jest skończona, ponieważ wielkość maksymalnego poddrzewa maleje zawsze co najmniej o 1 oraz oczywiście jest dodatnia. Oznacza to, że w pewnym momencie rozważany wierzchołek będzie centroidem.

Drzewo ma dwa centroidy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krawędź, po obu stronach której jest dokładnie po $n/2$ wierzchołków. Dowód tego faktu jest podobny do powyższego. Przykładem jest graf spójny dla $n = 2$.

Bonusowe rozwiązanie: Skierujmy krawędzie tak, by prowadziły od wierzchołka tworzącego większe poddrzewo do wierzchołka tworzącego mniejsze poddrzewo (w przypadku remisów — dowolnie). Teza sprowadza się do pokazania, że istnieje taki wierzchołek v, że stopień wejściowy wierzchołka v to 0. Ponieważ drzewo jest acykliczne, to ten graf skierowany również. W każdym grafie skierowanym acyklicznym taki wierzchołek istnieje – w przeciwnym wypadku w grafie istnieje cykl.

Zadanie 13. (30 OI, II etap)
Antek i Marysia grają w grę na planszy, która jest drzewem, czyli ma n pól i $n - 1$ par pól sąsiadujących ze sobą, gdzie każde dwa pola łączy dokładnie jedna ścieżka. Początkowo wszystkie pola planszy są białe, oprócz pewnego jednego pola x pokolorowanego na czerwono, które należy do Antka, i jednego innego pola y pokolorowanego na niebiesko, które należy do Marysi. Gracze naprzemiennie wybierają jedno dowolne pole u pokolorowane na swój kolor, a następnie kolorują na ten kolor jedno dowolne białe pole v, które sąsiaduje z polem u. Grę przegrywa ten gracz, który nie będzie mógł wykonać ruchu. Rozstrzygnąć, kto ma strategię wygrywającą w zależności od początkowych pól x oraz y.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli gracz pokoloruje pewien wierzchołek na swój kolor, to w pewnym sensie oddziela on część drzewa od reszty. Motywuje nas to do tego, że optymalnym algorytmem będzie zajmowanie jak największego możliwego obszaru drzewa, którego przeciwnik nie będzie mógł przejąć.

Rozważmy drzewo otrzymane przez usunięcie tego wierzchołka. Wtedy powstaje kilka poddrzew. Wszystkie pola przeciwnika muszą znajdować się w dokładnie jednym z nich. Istotnie, w drzewie dowolne dwa różne wierzchołki łączy dokładnie jedna ścieżka, więc gdyby pola przeciwnika znajdowały się w dwóch różnych poddrzewach, to jedyna ścieżka między nimi przechodziłaby przez usunięty wierzchołek, co jest niemożliwe. Oznacza to, że pozostałe poddrzewa są dostępne wyłącznie dla rozważanego gracza.

Motywuje nas to do tego, że aby zdobyć pewien teren dla siebie, gracz musi kontrolować wierzchołki na ścieżce łączącej pola x i y. Każde zajęcie kolejnego wierzchołka tej ścieżki zmniejsza dostępny teren dla przeciwnika. Po zajęciu całej ścieżki zbiory pól dostępnych dla Antka i Marysi są jednoznacznie określone. Wówczas wystarczy porównać, kto ma więcej wolnych pól i może wykonać więcej ruchów.

Inną perspektywą jest spojrzenie na zadanie z pojęciem centroidu drzewa. Przypomnijmy, że *centroidem* drzewa nazywamy wierzchołek, którego usunięcie rozdziela drzewo na poddrzewa o liczbie wierzchołków nie większej niż $\lfloor n/2 \rfloor$. Gracz, który zajmie centroid, zmusza przeciwnika do wykonywania ruchów w obrębie jednego z poddrzew, które ma co najwyżej $\lfloor n/2 \rfloor$ wierzchołków. Sam natomiast może zajmować pozostałą część drzewa.

W przypadku, gdy istnieje jeden centroid, pierwszy gracz może go osiągnąć i uzyskać przewagę w liczbie dostępnych pól, co zapewnia mu zwycięstwo. Jeśli drzewo ma dwa centroidy, sytuacja zależy od położenia początkowych pól x i y. Rozstrzygnięcie nadal sprowadza się do porównania liczby pól w odpowiednich poddrzewach i odległości od centroidów, czyli sprawdzenia który z przypadków zachodzi:

(i) Jeden z graczy może zająć oba centroidy – ten gracz zwycięża;
(ii) Każdy z graczy zajmuje jeden z centroidów. Wówczas każdy z nich przejmie dokładne $\lfloor n/2 \rfloor$ pól. Oznacza to, że zwycięży gracz, który zaczyna.

Zadanie 14.
Pewien kraj składa się z n miast połączonych $n - 1$ drogami tak, że istnieje (niekoniecznie bezpośrednie) połączenie drogowe pomiędzy każdą parą miast. Niedługo odbędzie się jagielloński turniej gry we flanki i jesteś organizatorem tego prestiżowego przedsięwzięcia. Zgłosiło się dokładnie $2k$ drużyn pochodzących z $2k$ różnych miast $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$. Podczas zawodów drużyny będą grały w k parach, ale jeszcze nie ustalono, jaki będzie podział. Ponadto każda drużyna będzie potrzebować noclegu. W każdym mieście jest dokładnie jeden hotel. Drużyny będące w parze nocują w tym samym hotelu (inne pary mogą nocować w tym samym hotelu). Spełniony musi być przy tym warunek: jeśli drużyny z miast u i w grają w parze, to ich hotel musi znajdować się w mieście leżącym na najkrótszej ścieżce łączącej wierzchołki u oraz w. Wyznaczyć podział na drużyny, który minimalizuje liczbę różnych hoteli i spełnia powyższy warunek.

Rozwiązanie:
Odpowiedź. Wystarczy jeden hotel.

Zauważmy, że jeśli znajdziemy wierzchołek c taki, że w każdym jego poddrzewie znajduje się co najwyżej k drużyn, to można utworzyć pary, tak aby każdy wierzchołek w parze pochodził z różnych poddrzew wierzchołka c. Wówczas ścieżka między wierzchołkami każdej pary przechodzi przez wierzchołek c, więc wszystkie pary mogą nocować w tym samym hotelu w mieście c.

Tworzymy pary zachłannie: zawsze wybieramy dwa poddrzewa z największą liczbą drużyn i łączymy po jednej drużynie z każdego z nich. Po sparowaniu tych drużyn liczba drużyn w pozostałych poddrzewach zmniejsza się o co najwyżej jeden, więc możemy zastosować krok indukcyjny. W rezultacie wszystkie pary zostaną utworzone, a każda ścieżka przechodzi przez c.

Pozostaje pokazać, że taki wierzchołek c istnieje. Opis c przypomina definicję *centroidu* drzewa: traktujemy drzewo jako graf zawierający $2k$ specjalnych wierzchołków (drużyny) o wadze 1 oraz $n-2k$ wierzchołków „fikcyjnych" o wadze 0, które nic nie zmieniają. Definiujemy rozmiar poddrzewa jako sumę wag wierzchołków w poddrzewie. Wtedy centroid w sensie wagowym spełnia wymaganie: w każdym jego poddrzewie znajduje się co najwyżej k drużyn. Istnienie takiego centroidu jest analogiczne do dowodu znanego z Zadania 13.

Zatem wszystkie drużyny można sparować, tak aby każda para miała ścieżkę przechodzącą przez wierzchołek c, a wszystkie pary mogą nocować w tym samym hotelu w mieście c, co minimalizuje liczbę hoteli.

Zadanie 15. (Mszana 2023)
Kostek wpisał w planszę $n \times n$, przy czym $n \geqslant 3$, wszystkie liczby całkowite od 1 do n^2, tak że liczby j oraz $j+1$ są w sąsiadujących polach dla $j = 1, 2, \ldots, n^2-1$. Przyszedł Marek S. i chciałby dowiedzieć się, w jakim polu znajduje się 1. Niestety Kostek nie chce pokazać mu planszy, ale zgodził się zagrać w grę. W jednym ruchu Marek S. może wybrać dowolne pole i zapytać o jego zawartość. Liczba n jest *urocza*, gdy Marek S. jest w stanie (swoim genialnym umysłem) znaleźć jedynkę w mniej niż $3n$ ruchach. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele *uroczych* liczb.

Rozwiązanie:
Pokażemy, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb. Będziemy chcieli pokazać, że Marek S. jest w stanie znaleźć jedynkę dla $n = 2^t - 1$. Udowodnimy poprzez indukcję, że jeżeli wiemy, że jedynka jest w pewnym mniejszym kwadracie $2^k - 1$, gdzie wszystkie pola sąsiadujące z nim są sprawdzone, to możemy poznać jej dokładne położenie w maksymalnie $3 \cdot (2^k - 1)$ ruchach.

Baza indukcji dla $k = 1$ jest oczywiście spełniona. Rozważmy krok indukcyjny, czyli załóżmy, że teza jest spełniona $k-1$. Pytamy się o całą środkową kolumnę w tym kwadracie. Jeśli znaleźliśmy jedynkę, to zadanie jest zakończone. Załóżmy, że tak nie jest. Zauważmy że ta środkowa kolumna dzieli obszar, w którym może być jedynka na dwa prostokąty: lewy i prawy. Popatrzmy teraz na najmniejszą liczbę, którą kiedykolwiek znaleźliśmy – oznaczmy ją przez m. Wszystkie pola sąsiadujące z kwadratem zostały sprawdzone, więc wszystkie pola sąsiadujące z prostokątem również. Skoro m jest najmniejszą uzyskaną wartością po sprawdzeniu pola, to m musi być wewnątrz lub graniczyć z tym prostokątem, a wszystkie liczby mniejsze od m muszą być wewnątrz. Jeśli m jest wewnątrz prostokąta, to jedynka też w nim jest. Jeżeli sąsiaduje tylko z jednym prostokątem, to jedynka musi być w tym prostokącie. Zostaje więc tylko przypadek, gdy m sąsiaduje z oboma prostokątami. Wtedy możemy spytać się o liczbę na lewo od m. Jeśli jest ona równa $m-1$, to jedynka jest w lewym prostokącie. W przeciwnym przypadku jest ona w prawym prostokącie. Wiemy więc, że jedynka jest w pewnym prostokącie $2^k - 1 \times 2^{k-1} - 1$. Zauważmy, że nie korzystaliśmy z faktu, że nasz obszar jest kwadratem. Możemy w takim razie postąpić analogicznie. Tym razem jednak pytamy o cały środkowy rząd, a nie o kolumnę. W taki sposób dzielimy prostokąt na dwa kwadraty. Oznacza to, że przy pomocy maksymalnie

$$(2^k - 1) + (2^{k-1} - 1) + 2 = 2^{k-1} \cdot 3$$

ruchów możemy dowiedzieć się, że jedynka jest w pewnym kwadracie o boku $2^{k-1} - 1$. Dodatkowo wiemy, że o wszystkie pola sąsiadujące z tym kwadratem już spytaliśmy, więc z założenia indukcyjnego zajmie nam to jeszcze maksymalnie $3 \cdot (2^{k-1} - 1)$ ruchów. Oznacza to, że łącznie wykonamy maksymalnie $3 \cdot (2^k - 1)$ ruchów.

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza

Antoni Bryłowski

Teoria

Twierdzenie (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza)

Dla każdej pary ciągów liczb $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i = kb_i$ dla pewnej stałej $k \neq 0$.

Twierdzenie (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela)

Dla każdej pary ciągów liczb $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i = kb_i$ dla pewnej stałej $k \neq 0$.

Zadania ćwiczeniowe

Zadanie 1.
Wykazać, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, to

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant 1/n.$$

Zadanie 2.
Udowodnić nierówność Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela.

Zadanie 3.
Udowodnić, że dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność:

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geqslant \frac{9}{x+y+z}.$$

Zadania łatwe

Zadanie 4.
Wykazać, że dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geqslant a+b+c.$$

Zadanie 5. (APMO 1991)
Wykazać, że dla wszystkich liczb $x_i, y_i \in \mathbb{R}_+$ spełniających warunek $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1^2}{x_1+y_1} + \frac{x_2^2}{x_2+y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n+y_n} \geqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2}.$$

Zadanie 6. (Nierówność Minkowskiego)
Udowodnić, że dla wszystkich $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} \geqslant \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2}.$$

Zadanie 7.
Wykazać, że jeżeli $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 3$, to

$$\frac{a^2}{(b+c)^3} + \frac{b^2}{(c+a)^3} + \frac{c^2}{(a+b)^3} \geqslant \frac{3}{8}.$$

Zadania średniej trudności

Zadanie 8.
Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)} \leqslant 2(x+y+z).$$

Zadanie 9. (Poręba wrzesień 2023)
Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geqslant \frac{3}{a+b}.$$

Zadanie 10. (Zwardoń 2007, zadanie 22)
Wykazać, że jeśli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Zadanie 11.
Udowodnić, że dla wszystkich $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność

$$abc(a+b+c) \leqslant a^3b + b^3c + c^3a.$$

Zadanie 12.
Wykazać, że jeśli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

Zadanie 13. (Nierówność Nesbitt'a)
Udowodnić, że dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Zadanie 14.
Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą całkowitą. Wykazać, że dla wszystkich $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{1+x_2^2}{x_3+x_4} + \cdots + \frac{1+x_{n-1}^2}{x_n+x_1} + \frac{1+x_n^2}{x_1+x_2} \geqslant n.$$

Zadanie 15.
Wykazać, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 3$, to

$$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} + \frac{b^2+c^2}{\sqrt{bc}} + \frac{c^2+a^2}{\sqrt{ca}} \geqslant 6.$$

Zadanie 16. (IMO 1995 P2)
Niech a, b, c będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Zadanie 17. (IMO 1981 P1)
Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC i niech D, E, F będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Znaleźć wszystkie takie punkty P, dla których wyrażenie

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

przyjmuje minimalną wartość.

Zadania trudne

Zadanie 18.
Wykazać, że dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leqslant 1.$$

Zadanie 19.
Wykazać, że jeżeli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geqslant 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Zadanie 20.
Wykazać, że jeśli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a}{a^2+b^2+2} + \frac{b}{b^2+c^2+2} + \frac{c}{c^2+a^2+2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Zadanie 21.
Liczby $a, b, c > 1$ spełniają

$$\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{c^2-1} = 1.$$

Wykazać, że

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leqslant 1.$$

Zadanie 22. (IZhO 2008)
Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi oraz $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Zadanie 23.
Wykazać, że jeśli $a, b, c, d > 0$ i $a + b + c + d = 4$, to

$$\frac{a}{a^3+5} + \frac{b}{b^3+5} + \frac{c}{c^3+5} + \frac{d}{d^3+5} \leqslant \frac{2}{3}.$$

Zadanie 24.
Załóżmy, że $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 4}$. Wykazać, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ i $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, to

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2+1} \geqslant \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1} + a_2\sqrt{a_2} + \cdots + a_n\sqrt{a_n}\right).$$

Zadanie 25.
Wykazać, że jeśli $x, y, z > 0$ i $x + y + z = 2$, to

$$\frac{xy}{3x + 7y} + \frac{yz}{3y + 7z} + \frac{zx}{3z + 7x} \leqslant \frac{1}{5}.$$

Zadanie 26.
Wykazać, że jeśli $a, b, c, m, n, p > 0$ i $m + n + p = 1$, to

$$m \cdot \frac{a}{b + c} + n \cdot \frac{b}{c + a} + p \cdot \frac{c}{a + b} \geqslant \frac{ma + nb + pc}{(n + p)a + (p + m)b + (m + n)c}.$$

Zadanie 27.
Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x + y + z = 3$. Wykazać, że

$$\frac{x}{x^3 + y^2 + z} + \frac{y}{y^3 + z^2 + x} + \frac{z}{z^3 + x^2 + y} \leqslant 1.$$

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Antoni Bryłowski*, Adam Tutkowski.

Zadanie 1.
Wykazać, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, to

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant 1/n.$$

Rozwiązanie:
Połóżmy $b_i = 1$ w nierówności Cauchy'ego-Schwarza, wtedy

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot n \geqslant (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1)^2 = 1^2.$$

Po podzieleniu obu stron przez n, otrzymujemy tezę.

Zadanie 2.
Udowodnić nierówność Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela.

Rozwiązanie:
Podstawmy $a_i = x_i/\sqrt{y_i}$, $b_i = \sqrt{y_i}$. Zauważmy, że musi zachodzić $y_i > 0$. Wtedy z nierówności Cauchy'ego-Schwarza dla ciągów a_i i b_i otrzymujemy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{y_i}} \cdot \sqrt{y_i}\right)^2$$

Po podzieleniu obu stron przez $\sum_{i=1}^{n} y_i$, otrzymujemy tezę dla ciągów x_i, y_i zamiast a_i oraz b_i.

Zadanie 3.
Udowodnić, że dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność:

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geqslant \frac{9}{x+y+z}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{x+y} + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{y+z} + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{z+x} \geqslant \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{2(x+y+z)} = \frac{9}{x+y+z},$$

co było do udowodnienia.

Zadanie 4.
Wykazać, że dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geqslant a+b+c.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} &= \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{c+a} \\ &\geqslant \frac{(2(a+b+c))^2}{4(a+b+c)} = a+b+c,\end{aligned}$$

co było do wykazania.

Zadanie 5. (APMO 1991)
Wykazać, że dla wszystkich liczb $x_i, y_i \in \mathbb{R}_+$ spełniających warunek $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1^2}{x_1+y_1} + \frac{x_2^2}{x_2+y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n+y_n} \geqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2}{x_1+y_1} + \frac{x_2^2}{x_2+y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n+y_n} &\geqslant \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_n} = \\ &= \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2},\end{aligned}$$

przy czym pierwsza równość wynika z założenia o równych sumach x_i i y_i.

Zadanie 6. (Nierówność Minkowskiego)
Udowodnić, że dla wszystkich $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} + \sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2} \geqslant \sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2}.$$

Rozwiązanie:
Po podniesieniu nierówności danej w zadaniu do kwadratu otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)} + \sum_{i=1}^n y_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i=1}^n x_iy_i + \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Po redukcji wspólnych wyrazów, podzieleniu przez 2 i ponownym podniesieniu do kwadratu, otrzymujemy

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2.$$

Zatem wyjściowa nierówność jest równoważna nierówności Cauchy'ego-Schwarza, która jest prawdziwa.

Zadanie 7.
Wykazać, że jeżeli $a, b, c > 0$ i $a+b+c = 3$, to

$$\frac{a^2}{(b+c)^3} + \frac{b^2}{(c+a)^3} + \frac{c^2}{(a+b)^3} \geqslant \frac{3}{8}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\frac{a^2}{(b+c)^3} + \frac{b^2}{(c+a)^3} + \frac{c^2}{(a+b)^3} = \frac{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}{b+c} + \frac{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}{c+a} + \frac{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}{a+b} \geqslant \frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{2(a+b+c)}.$$

Korzystając z tej samej nierówności, szacujemy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ca} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{ca+bc} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Zauważmy również, że $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Istotnie, po pomnożeniu przez 2 i zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia, otrzymujemy oczywiście prawdziwą nierówność $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$.

Wobec powyższego

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2}{2(a+b+c)} \geqslant \frac{\left(\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\right)^2}{2(a+b+c)} &= \frac{1}{6}\left(\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{2(ab+bc+ca)}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}\right)^2 \geqslant \frac{(3/2)^2}{6} = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Stąd i z pierwszej nierówności, otrzymujemy tezę.

Zadanie 8.
Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)} \leqslant 2(x+y+z).$$

Rozwiązanie:
Po położeniu $a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$, $a_3 = \sqrt{z}$, $b_1 = \sqrt{3x+y}$, $b_2 = \sqrt{3y+z}$, $b_3 = \sqrt{3z+x}$ w nierówności Cauchy'ego-Schwarza, mamy

$$\begin{aligned}(x+y+z)(3x+y+3y+z+3z+x) &\geqslant \left(\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)}\right)^2 \\ \iff (2(x+y+z))^2 &\geqslant \left(\sqrt{x(3x+y)} + \sqrt{y(3y+z)} + \sqrt{z(3z+x)}\right)^2.\end{aligned}$$

Po obustronnym spierwiastkowaniu otrzymujemy tezę.

Zadanie 9. (Poręba wrzesień 2023)
Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geqslant \frac{3}{a+b}.$$

Rozwiązanie:
Po rozszerzeniu ułamków i zastosowaniu nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela otrzymujemy nierówność

$$\frac{x^2}{axy+bxz} + \frac{y^2}{azy+bxy} + \frac{z^2}{axz+bxy} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}.$$

Ponadto analogicznie jak w Zadaniu 7 zauważamy, że $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$. Stąd

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx) \quad \text{i} \quad \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geqslant 3.$$

Wobec tego

$$\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)} \geqslant \frac{3}{a+b},$$

co kończy dowód nierówności.

Zadanie 10. (Zwardoń 2007, zadanie 22)
Wykazać, że jeśli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Rozwiązanie:
Przez L oznaczmy lewą stronę powyższej nierówności. Wówczas z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\begin{aligned}L &= \frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2} + \frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2} + \frac{c^4}{c^3+c^2a+ca^2} \\ &\geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2} = \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.\end{aligned}$$

Ponadto z nierówności między średnią kwadratową i arytmetyczną

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3} \implies \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Z powyższych otrzymujemy tezę.

Zadanie 11.
Udowodnić, że dla wszystkich $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność
$$abc(a+b+c) \leqslant a^3b + b^3c + c^3a.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela
$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c.$$
Po pomnożeniu przez abc otrzymujemy tezę.

Zadanie 12.
Wykazać, że jeśli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to
$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela
$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} &= \frac{a^2}{ab+ca-a^2} + \frac{b^2}{bc+ab-b^2} + \frac{c^2}{ca+bc-c^2} \\ &\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}.\end{aligned}$$
Zatem teza jest równoważna nierówności
$$\begin{aligned}&\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)} \geqslant 3 \\ \iff \quad & a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geqslant 6(ab+bc+ca) - 3(a^2+b^2+c^2) \\ \iff \quad & a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.\end{aligned}$$
Dowód ostatniej nierówności znajduje się w rozwiązaniu Zadania 7.

Zadanie 13. (Nierówność Nesbitt'a)
Udowodnić, że dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela
$$\frac{\left(\sqrt{a+b+c}\right)^2}{b+c} + \frac{\left(\sqrt{a+b+c}\right)^2}{c+a} + \frac{\left(\sqrt{a+b+c}\right)^2}{a+b} \geqslant \frac{\left(3\sqrt{a+b+c}\right)^2}{2(a+b+c)} = \frac{9(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{9}{2}.$$
Po odjęciu stronami 3 otrzymujemy tezę.

Zadanie 14.
Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą całkowitą. Wykazać, że dla wszystkich $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ prawdziwa jest nierówność
$$\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{1+x_2^2}{x_3+x_4} + \cdots + \frac{1+x_{n-1}^2}{x_n+x_1} + \frac{1+x_n^2}{x_1+x_2} \geqslant n.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela
$$\begin{aligned}&\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{1+x_2^2}{x_3+x_4} + \cdots + \frac{1+x_{n-1}^2}{x_n+x_1} + \frac{1+x_n^2}{x_1+x_2} = \\ &= \frac{1}{x_2+x_3} + \frac{x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{1}{x_3+x_4} + \frac{x_2^2}{x_3+x_4} + \cdots + \frac{1}{x_1+x_2} + \frac{x_n^2}{x_1+x_2} \geqslant \frac{(n+S)^2}{4S},\end{aligned}$$
przy czym $S := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Pozostało zauważyć, że zachodzi nierówność $(n+S)^2 \geqslant 4Sn$ równoważna nierówności $(n-S)^2 \geqslant 0$.

Zadanie 15.
Wykazać, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 3$, to

$$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} + \frac{b^2+c^2}{\sqrt{bc}} + \frac{c^2+a^2}{\sqrt{ca}} \geqslant 6.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności między średnią geometryczną i harmoniczną dla par liczb spośród $1/a$, $1/b$, $1/c$

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \geqslant \frac{2}{a+b}, \quad \frac{1}{\sqrt{bc}} \geqslant \frac{2}{b+c}, \quad \frac{1}{\sqrt{ca}} \geqslant \frac{2}{c+a}.$$

Wobec tego

$$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} + \frac{b^2+c^2}{\sqrt{bc}} + \frac{c^2+a^2}{\sqrt{ca}} \geqslant 2\left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}\right).$$

Wówczas na mocy Zadania 4

$$2\left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}\right) \geqslant 2(a+b+c) = 6,$$

co kończy dowód.

Zadanie 16. (IMO 1995 P2)
Niech a, b, c będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{(1/a)^2}{a(b+c)} + \frac{(1/b)^2}{b(c+a)} + \frac{(1/c)^2}{c(a+b)} \\ &\geqslant \frac{(1/a+1/b+1/c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}.\end{aligned}$$

Wtedy na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geqslant \sqrt[3]{(abc)^2} = 1,$$

ponieważ z założenia $abc = 1$. Zatem $\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{3}{2}$, co kończy dowód.

Zadanie 17. (IMO 1981 P1)
Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC i niech D, E, F będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Znaleźć wszystkie takie punkty P, dla których wyrażenie

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

przyjmuje minimalną wartość.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$[ABC] = \frac{1}{2}\left(BC \cdot PD + AB \cdot PF + CA \cdot PE\right).$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza dla ciągów $\sqrt{BC \cdot PD}, \sqrt{CA \cdot PE}, \sqrt{AB \cdot PF}$ oraz $\sqrt{\frac{BC}{PD}}, \sqrt{\frac{CA}{PE}}, \sqrt{\frac{AB}{PF}}$

$$(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF)\left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}\right) \geqslant (BC + CA + AB)^2,$$

$$\text{więc} \quad \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \geqslant \frac{(BC + CA + AB)^2}{2[ABC]}.$$

Zauważmy, że prawa strona powyższej nierówności nie zależy od wyboru punktu P. Badana wartość przyjmuje zatem najmniejszą wartość, gdy w nierówności Cauchy'ego-Schwarza zachodzi równość. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $k \neq 0$ zachodzi równość

$$PD = \frac{\sqrt{BC \cdot PD}}{\sqrt{\frac{BC}{PD}}} = k.$$

i analogicznie $k = PE$, $k = PF$. Zatem $PD = PE = PF$, więc skoro punkt P znajduje się wewnątrz trójkąta ABC, jedynym punktem minimalizującym wartość wyrażenia jest środek okręgu wpisanego w ABC.

Zadanie 18.
Wykazać, że dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi nierówność

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Po odjęciu od obu stron tezy wyrażenia $3/2$ otrzymujemy

$$\frac{2a}{4a+2b} - \frac{2a+b}{4a+2b} + \frac{2b}{4b+2c} - \frac{2b+c}{4b+2c} + \frac{2c}{4c+2a} - \frac{2c+a}{4c+2a} \leqslant -\frac{1}{2},$$

co po pomnożeniu stronami przez -2 jest równoważne

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} \geqslant 1.$$

Powyższa nierówność, równoważna wyjściowej, jest prawdziwa, ponieważ z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\begin{aligned}\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} &= \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ca+a^2}\\ &\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1.\end{aligned}$$

Zadanie 19.
Wykazać, że jeżeli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geqslant 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w wersji Engela

$$\frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} = \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{\frac{1}{a+b}} + \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\frac{1}{b+c}} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{1}{c+a}} \geqslant \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}}.$$

Ponadto z nierówności między średnimi arytmetycznymi i harmonicznymi par liczb spośród $1/a$, $1/b$, $1/c$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}, \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{4}{b+c}, \quad \frac{1}{c}+\frac{1}{a} \geqslant \frac{4}{c+a}.$$

Po dodaniu powyższych nierówności stronami otrzymujemy

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Zatem

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}} \geqslant \frac{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}} = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

co kończy dowód.

Zadanie 20.
Wykazać, że jeśli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a}{a^2+b^2+2}+\frac{b}{b^2+c^2+2}+\frac{c}{c^2+a^2+2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1} \geqslant \frac{(a+1)^2}{a^2+b^2+2} \geqslant \frac{4a}{a^2+b^2+2},$$

przy czym druga nierówność zachodzi, ponieważ $(a-1)^2 \geqslant 0$. Analogiczne nierówności zachodzą dla par liczb b, c oraz c, a. Po dodaniu ich wszystkich stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\frac{a}{a^2+b^2+2}+\frac{b}{b^2+c^2+2}+\frac{c}{c^2+a^2+2}\\ &\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\right)=\frac{3}{4},\end{aligned}$$

co było do wykazania.

Zadanie 21.
Liczby $a, b, c > 1$ spełniają

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1.$$

Wykazać, że

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Niech $x := \frac{1}{a+1}$, $y := \frac{1}{b+1}$, $z := \frac{1}{c+1}$. Wtedy

$$\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a-1}=x\cdot\frac{1}{1/x-2}=\frac{x^2}{1-2x}$$

oraz analogicznie dla liczb b i c. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$1=\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=\frac{x^2}{1-2x}+\frac{y^2}{1-2y}+\frac{z^2}{1-2z} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3-2(x+y+z)}.$$

Niech $S := x+y+z$ i zauważmy, że $3/2 > S > 0$. Ponadto powyższa nierówność daje

$$(S+3)(S-1)=S^2+2S-3 \leqslant 0.$$

Wobec $S > -3$, musi zachodzić $S \leqslant 1$, co jest równoważne tezie.

Zadanie 22. (IZhO 2008)
Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi oraz $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie:
Ponieważ z założenia $abc = 1$, istnieją takie $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, że $a = x/y,\ b = y/z,\ c = z/x$. Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)c} &= \frac{1}{(\frac{x}{y} + \frac{y}{z})\frac{y}{z}} + \frac{1}{(\frac{y}{z} + \frac{z}{x})\frac{z}{x}} + \frac{1}{(\frac{z}{x} + \frac{x}{y})\frac{x}{y}} = \\ &= \frac{z^4}{xz^3 + y^2z^2} + \frac{x^4}{yx^3 + z^2x^2} + \frac{y^4}{zy^3 + x^2y^2} \\ &\geqslant \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xz^3 + zy^3 + yx^3}.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest konsekwencją nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela. Wystarczy wykazać, że ostatnie wyrażenie jest nie mniejsze od $3/2$, co jest równoważne

$$2(x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)) \geqslant 3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xz^3 + zy^3 + yx^3).$$

Sprawdźmy, że $2x^4 + x^2y^2 - 3x^2y \geqslant 0$. Istotnie, po pomnożeniu przez 4 i dodaniu $0 = x^4 - y^4 + y^4 - z^4 + z^4 - x^4$ dostajemy

$$7x^4 + 4x^2y^2 - 12x^3y - y^4 = (x-y)^2(7x^2 + 2xy + y^2) = (x-y)^2(6x^2 + (x+y)^2) \geqslant 0,$$

co jest oczywiście prawdą. Dwie analogiczne nierówności otrzymujemy poprzez cykliczną zamianę zmiennych. Czytelnik zechce sprawdzić, że po dodaniu tych nierówności otrzymamy nierówność równoważną żądanej.

Zadanie 23.
Wykazać, że jeśli $a, b, c, d > 0$ i $a + b + c + d = 4$, to

$$\frac{a}{a^3+5} + \frac{b}{b^3+5} + \frac{c}{c^3+5} + \frac{d}{d^3+5} \leqslant \frac{2}{3}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną

$$\frac{a^3+1+1}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} = a.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{1}{a^3+5} \leqslant \frac{1}{3a+3}.$$

Dodajemy stronami analogiczne nierówności dla a, b, c, d i otrzymujemy, że

$$\frac{a}{a^3+5} + \frac{b}{b^3+5} + \frac{c}{c^3+5} + \frac{d}{d^3+5} \leqslant \frac{a}{3a+3} + \frac{b}{3b+3} + \frac{c}{3c+3} + \frac{d}{3d+3}.$$

Teza będzie spełniona, jeżeli prawa strona będzie nie większa niż $2/3$. W takim razie wystarczy pokazać, że

$$4 - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1} - \frac{1}{d+1} = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} \leqslant 2,$$

Zatem należy udowodnić, że

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} \geqslant 2.$$

Powyższa nierówność zachodzi, ponieważ z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} \geqslant \frac{4^2}{a+b+c+d+4} = \frac{16}{8} = 2.$$

Zadanie 24.
Załóżmy, że $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 4}$. Wykazać, że jeżeli $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ i $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, to

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2+1} \geqslant \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1} + a_2\sqrt{a_2} + \cdots + a_n\sqrt{a_n}\right).$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela ($a_{n+1} := a_1$)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}^2+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^3}{a_k^2 \cdot a_{k+1}^2 + a_k^2} \geqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\sqrt{a_k}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot a_{k+1}^2 + 1}.$$

Zauważmy, że $\sum_{k=1}^{n} a_k^{3/2} \geqslant 1$. Skoro $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$, to dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$ mamy $a_k < 1$. Daje to nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{3/2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

Zatem teza jest równoważna temu, że $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot a_{k+1}^2 \leqslant 1/4$. Niech $x_k := a_k^2$. Jeśli liczba n jest parzysta, to

$$\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n/2} x_{2k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n/2} x_{2k}\right) \leqslant \frac{1}{4},$$

ponieważ jeśli $a + b = 1$, to z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad \text{czyli} \quad ab \leqslant \frac{1}{4}.$$

Jeśli liczba n jest nieparzysta, to bez straty ogólności niech $x_1 \geqslant x_2$. Wtedy

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 \leqslant x_1(x_2 + x_3) + x_4(x_2 + x_3),$$

więc możemy zastąpić n liczb x_i przez $n-1$ liczb $x_1,\ x_2 + x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots,\ x_n$ o sumie równej 1. Wówczas powołujemy się na przypadek parzysty.

Zadanie 25.
Wykazać, że jeśli $x, y, z > 0$ i $x + y + z = 2$, to

$$\frac{xy}{3x+7y} + \frac{yz}{3y+7z} + \frac{zx}{3z+7x} \leqslant \frac{1}{5}.$$

Rozwiązanie:
Weźmy pewne dodatnie liczby p, q. Wtedy z nierówności Cauchy'ego-Schwarza

$$(px + qy)(py + qx) \geqslant (\sqrt{px}\sqrt{py} + \sqrt{qy}\sqrt{qx})^2 = xy(p+q)^2$$

więc

$$\frac{xy}{px+qy} \leqslant \frac{py+qx}{(p+q)^2}.$$

Oznacza to, że skoro $x + y + z = 2$, to

$$\frac{xy}{3x+7y} + \frac{yz}{3y+7z} + \frac{zx}{3z+7x} \leqslant \frac{3y+7x}{100} + \frac{3x+7z}{100} + \frac{3z+7y}{100} = \frac{10(x+y+z)}{100} = \frac{1}{5},$$

co było do wykazania.

Zadanie 26.
Wykazać, że jeśli $a, b, c, m, n, p > 0$ i $m + n + p = 1$, to

$$m \cdot \frac{a}{b+c} + n \cdot \frac{b}{c+a} + p \cdot \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{ma + nb + pc}{(n+p)a + (p+m)b + (m+n)c}.$$

Rozwiązanie:
Dodajmy do obu stron tezy zadania wyrażenie $1 = m + n + p$. Wówczas jej lewa strona jest równa

$$\begin{aligned}
&m \cdot \frac{a}{b+c} + m + n \cdot \frac{b}{c+a} + n + p \cdot \frac{c}{a+b} + p \\
&= m \cdot \frac{a}{b+c} + m \cdot \frac{b+c}{b+c} + n \cdot \frac{b}{c+a} + n \cdot \frac{c+a}{c+a} + p \cdot \frac{c}{a+b} + p \cdot \frac{a+b}{a+b} \\
&= m \cdot \frac{a+b+c}{b+c} + n \cdot \frac{a+b+c}{c+a} + p \cdot \frac{a+b+c}{a+b} \\
&= (a+b+c)\left(\frac{m}{b+c} + \frac{n}{c+a} + \frac{p}{a+b}\right).
\end{aligned}$$

Z kolei prawa strona jest równa

$$\begin{aligned}
&\frac{ma + nb + pc}{(n+p)a + (p+m)b + (m+n)c} + 1 \\
&= \frac{ma + nb + pc}{(n+p)a + (p+m)b + (m+n)c} + \frac{(n+p)a + (p+m)b + (m+n)c}{(n+p)a + (p+m)b + (m+n)c} \\
&= \frac{(a+b+c)(m+n+p)}{(n+p)a + (p+m)b + (m+n)c}.
\end{aligned}$$

Zatem teza jest równoważna

$$(a+b+c)\left(\frac{m}{b+c} + \frac{n}{c+a} + \frac{p}{a+b}\right) \geqslant \frac{(a+b+c)(m+n+p)}{(n+p)a + (p+m)b + (m+n)c}.$$

Po podzieleniu obu stron przez $a + b + c$ otrzymujemy równoważną nierówność

$$\frac{m}{(b+c)} + \frac{n}{(c+a)} + \frac{p}{(a+b)} \geqslant \frac{m+n+p}{(n+p)a + (p+m)b + (m+n)c}.$$

Pozostało zauważyć, że na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarza w formie Engela

$$\begin{aligned}
\frac{m}{(b+c)} + \frac{n}{(c+a)} + \frac{p}{(a+b)} &= \frac{m^2}{m(b+c)} + \frac{n^2}{n(c+a)} + \frac{p^2}{p(a+b)} \\
&\geqslant \frac{(m+n+p)^2}{m(b+c) + n(c+a) + p(a+b)} \\
&= \frac{m+n+p}{na + pa + pb + mb + mc + nc} \\
&= \frac{m+n+p}{a(n+p) + b(p+m) + c(m+n)}.
\end{aligned}$$

Zadanie 27.
Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x + y + z = 3$. Wykazać, że

$$\frac{x}{x^3 + y^2 + z} + \frac{y}{y^3 + z^2 + x} + \frac{z}{z^3 + x^2 + y} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza

$$(x^3 + y^2 + z)\left(\frac{1}{x} + 1 + z\right) \geqslant \left(\sqrt{x^3 \cdot \frac{1}{x}} + \sqrt{y^2 \cdot 1} + \sqrt{z \cdot z}\right)^2 = (x + y + z)^2 = 9.$$

Stąd mamy, że

$$\frac{x}{x^3+y^2+z} \leqslant \frac{x\left(\frac{1}{x}+1+z\right)}{9} = \frac{1+x+xz}{9}.$$

W taki sposób dostajemy

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x}{x^3+y^2+z} \leqslant \frac{1+x+xz}{9} = \frac{6+xy+yz+zx}{9}.$$

Z nierówności między średnią kwadratową i geometryczną

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy, \qquad \frac{y^2+z^2}{2} \geqslant yz, \qquad \frac{z^2+x^2}{2} \geqslant zx.$$

W takim razie

$$\begin{aligned}
9 &= (x+y+z)^2 \\
&= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\
&= \frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}+2xy+2yz+2zx \\
&\geqslant 3(xy+yz+zx),
\end{aligned}$$

więc $xy+yz+zx \leqslant 3$. Po podstawieniu otrzymanej nierówności do poprzedniej otrzymujemy

$$\frac{6+xy+yz+zx}{9} \leqslant 1,$$

co kończy dowód.

Równania diofantyczne

Antoni Łuczak

Modulo

Często podczas rozwiązywania równania diofantycznego warto rozpatrzyć je modulo pewną liczbę.

Ćwiczenie 1.
Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$(x+1)^3 - x^3 = 2y^2.$$

W wielu przypadkach nie jest tak łatwo dobrać odpowiedni modulnik. Pomaga w tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie (Liczba reszt potęg modulo p)

Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba naturalna k. Wtedy liczby

$$1^k,\ 2^k,\ \ldots,\ (p-1)^k$$

generują dokładnie $\frac{p-1}{\gcd(k,p-1)}$ różnych reszt modulo p.

Dowód. Niech g będzie generatorem modulo p. Wtedy ciąg liczb wypisany powyżej jest permutacją ciągu

$$1, g^k, g^{2k}, \ldots, g^{(p-2)k}.$$

Widać, że ten ciąg jest okresowy i jego okres to liczba różnych reszt. Jest on równy najmniejszej takiej liczbie a, że $g^{ak} \equiv 1 \pmod p$, czyli $p-1 \mid ak$. Najmniejszą taką liczbą jest oczywiście $\frac{p-1}{\gcd(k,p-1)}$. $\square$

Ćwiczenie 2.
Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^5 = y^2 + 4.$$

Schodzenie Fermata

Załóżmy, że szukamy niezerowych rozwiązań (x, y, z) pewnego jednorodnego równania diofantycznego. Jeżeli uda nam się pokazać, że w każdym rozwiązaniu liczby x, y, z są podzielne przez pewną liczbę naturalną d, to otrzymamy nowe całkowite rozwiązanie $(x/d, y/d, z/d)$. W ten sposób możemy dostać dowolnie małe rozwiązanie, co prowadzi do sprzeczności.

Ćwiczenie 3.
Udowodnić, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Zadania

Zadanie 4.
Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$$

w liczbach całkowitych.

Zadanie 5.
Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$$

w liczbach całkowitych.

Zadanie 6.
Udowodnić, że liczby 7 nie da się przedstawić w postaci sumy trzech kwadratów liczb wymiernych.

Zadanie 7.
Udowodnić, że żadna liczba postaci $4^n(8k+7)$, przy czym n i k są dodatnimi liczbami całkowitymi, nie jest sumą jednego, dwóch ani trzech kwadratów liczb całkowitych.

Zadanie 8.
Znaleźć wszystkie takie liczby wymierne a i b, że

$$a^2 + ab + b^2 = 2.$$

Zadanie 9.
Liczby całkowite a, b, c, d mają tę własność, że jedynym rozwiązaniem równania

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

w liczbach całkowitych x, y, z, t jest $x = y = z = t = 0$. Czy stąd wynika, że liczby a, b, c, d są wszystkie tego samego znaku?

Zadanie 10.
Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^4 + y^4 + z^4 = 9u^4.$$

Zadanie 11. (64 OM, II etap, zadanie 5)
Rozstrzygnąć, czy wielomian W o współczynnikach całkowitych jest funkcją różnowartościową, o ile tylko dla każdej pary liczb wymiernych $r_1 \neq r_2$ zachodzi $W(r_1) \neq W(r_2)$.

Rozwiązania

Autor rozwiązań: Antoni Łuczak.

Ćwiczenie 1.
Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$(x+1)^3 - x^3 = 2y^2.$$

Rozwiązanie:
Lewa strona równania jest nieparzysta, natomiast prawa parzysta. W takim razie równanie nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 2.
Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^5 = y^2 + 4.$$

Rozwiązanie:
Aby otrzymać jak najmniej reszt postaci x^5 oraz y^2, nasuwa się rozpatrywanie równania modulo 11. Widać, że x^5 może przyjmować jedynie wartości ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$, natomiast y^2 – ze zbioru $\{0, 1, 4, 9, 5, 3\}$. Niezależnie od wyboru y prawa strona równania nigdy nie daje reszty -1, 0 ani 1, zatem równanie to nie ma rozwiązań.

Ćwiczenie 3.
Udowodnić, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że $\sqrt{2} = a/b$ i niech (a, b) będzie rozwiązaniem o najmniejszej sumie wartości bezwzględnych. Po podniesieniu do kwadratu otrzymujemy $a^2 = 2b^2$. Skoro prawa strona jest parzysta, to a jest parzyste, zatem $a = 2a_1$ dla pewnego a_1. Wówczas $2a_1^2 = b^2$. Zauważmy, że para (b, a_1) jest nowym rozwiązaniem równania $x^2 = 2y^2$, którego suma wartości bezwzględnych jest mniejsza niż suma wartości bezwzględnych pary (a, b). Wobec uzyskanej sprzeczności nie może istnieć żadne rozwiązanie.

Zadanie 4.
Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$$

w liczbach całkowitych.

Rozwiązanie:
Postępujemy analogicznie jak w rozwiązaniu Ćwiczenia 3. Skoro liczba t jest parzysta, to możemy ją zastąpić liczbą $2t_1$. Po podzieleniu przez 2 widzimy, że z również jest parzyste i możemy je zastąpić liczbą $2z_1$. W końcu otrzymamy nowe rozwiązanie równania (x_1, y_1, z_1, t_1) o mniejszej sumie modułów (jeśli co najmniej jedna liczba jest niezerowa). Zatem równanie to nie ma rozwiązań poza czwórką $(0, 0, 0, 0)$.

Zadanie 5.
Znaleźć wszystkie rozwiązania równania

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$$

w liczbach całkowitych.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że gdyby każda z liczb x, y, z, t była nieparzysta, to lewa strona dawałaby resztę 4 modulo 8, natomiast prawa resztę 2. Bez straty ogólności załóżmy, że t jest parzyste. Wtedy również pewna inna liczba musi być parzysta, załóżmy, że jest to z. Gdyby x oraz y były nieparzyste, to lewa strona dawałaby resztę 2 modulo 4, natomiast prawa – resztę 0. W takim razie również x oraz y są parzyste i po podzieleniu każdej z liczb przez 2 otrzymujemy nowe, mniejsze rozwiązanie. Oznacza to, że jedynym rozwiązaniem jest czwórka $(0, 0, 0, 0)$.

Zadanie 6.
Udowodnić, że liczby 7 nie da się przedstawić w postaci sumy trzech kwadratów liczb wymiernych.

Rozwiązanie:
Załóżmy przeciwnie, że $7 = x^2 + y^2 + z^2$ i zapiszmy $x = a/d$, $y = b/d$, $z = c/d$. Możemy ponadto wymagać $\gcd(a, b, c, d) = 1$. Wówczas

$$7d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Jeżeli d jest nieparzyste, to lewa strona daje resztę 7 modulo 8, natomiast łatwo sprawdzić, że prawa strona takiej reszty osiągnąć nie może. Wobec tego d jest parzyste. Następnie zauważmy, że jeśli suma trzech kwadratów jest podzielna przez 4, to są to kwadraty liczb parzystych. Wobec tego każda z liczb a, b, c, d jest parzysta, wbrew założeniu $\gcd(a, b, c, d) = 1$.

Zadanie 7.
Udowodnić, że żadna liczba postaci $4^n(8k + 7)$, przy czym n i k są dodatnimi liczbami całkowitymi, nie jest sumą jednego, dwóch ani trzech kwadratów liczb całkowitych.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że liczba $4^n(8k + 7)$ jest sumą trzech kwadratów (być może równych zero). Jeżeli $n > 0$, to dostajemy sumę trzech kwadratów podzielną przez 4. W takim razie każdy z tych kwadratów jest podzielny przez 4 i po obustronnym podzieleniu wnioskujemy, że $4^{n-1}(8k + 7)$ również jest sumą trzech kwadratów.

Powyższe rozumowanie powtarzamy aż $n = 0$. Wówczas $8k + 7$ jest sumą trzech kwadratów, co jest niemożliwe (analogicznie jak w Zadaniu 6).

Zadanie 8.
Znaleźć wszystkie takie liczby wymierne a i b, że

$$a^2 + ab + b^2 = 2.$$

Rozwiązanie:
Zapiszmy $a = x/z$, $b = y/z$ i niech $\gcd(x, y, z) = 1$. Wówczas

$$x^2 + xy + y^2 = 2z^2.$$

Stąd każda z liczb x i y jest parzysta. Jednak po podzieleniu obustronnie przez 2 widzimy, że również liczba z jest parzysta, co przeczy założeniu $\gcd(x, y, z) = 1$.

Zadanie 9.
Liczby całkowite a, b, c, d mają tę własność, że jedynym rozwiązaniem równania

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

w liczbach całkowitych x, y, z, t jest $x = y = z = t = 0$. Czy stąd wynika, że liczby a, b, c, d są wszystkie tego samego znaku?

Rozwiązanie:
$\boxed{\text{NIE.}}$ Wystarczy ustalić $a = b = c = 1$ oraz $d = -7$. Wówczas na mocy Zadania 3 jedynym rozwiązaniem jest czwórka $(0, 0, 0, 0)$.

Zadanie 10.
Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^4 + y^4 + z^4 = 9u^4.$$

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy to równanie modulo 5. Na mocy małego twierdzenia Fermata każda czwarta potęga daje resztę 0 lub 1. Zatem po lewej stronie mamy resztę 0, 1, 2 lub 3, natomiast po prawej resztę 0 lub 4. Stąd wnioskujemy, że każda z liczb x, y, z, u jest podzielna przez 5. Jeśli którakolwiek z liczb była niezerowa, to $(x/5, y/5, z/5, u/5)$ jest rozwiązaniem o mniejszej sumie modułów. Zatem jedynym rozwiązaniem jest czwórka $(0, 0, 0, 0)$.

Zadanie 11. (64 OM, II etap, zadanie 5)
Rozstrzygnąć, czy wielomian W o współczynnikach całkowitych jest funkcją różnowartościową, o ile tylko dla każdej pary liczb wymiernych $r_1 \neq r_2$ zachodzi $W(r_1) \neq W(r_2)$.

Rozwiązanie:
$\boxed{\text{NIE.}}$ Rozważmy wielomian $W(x) = x^3 - 2x$. Wówczas $W(0) = 0 = W(\sqrt{2})$. Chcemy jednak pokazać, że jeżeli r_1, r_2 są takimi liczbami wymiernymi, że $W(r_1) = W(r_2)$, to $r_1 = r_2$. Mamy

$$r_1^3 - 2r_1 = r_2^3 - 2r_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - 2) = 0.$$

Gdyby $r_1 \neq r_2$, to drugi czynnik iloczynu musiałby być zerowy. Na mocy Zadania 8 nie jest to możliwe.

Wykładniki p-adyczne

Magdalena Pudełko

Teoria

Definicja (Wykładnik p-adyczny)

Niech p będzie liczbą pierwszą oraz $a \neq 0$ liczbą całkowitą. Ponadto niech k będzie taką największą nieujemną liczbą całkowitą, że a jest podzielne przez p^k. Wówczas mówimy, że *wykładnik p-adyczny* z a jest równy k, co oznaczamy $v_p(a) = k$. Ponadto przyjmijmy, że $v_p(0) = +\infty$ dla każdego p.

Twierdzenie

Dla wszystkich liczb całkowitych a, b, $n > 0$ oraz liczby pierwszej p zachodzi

(a) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,

(b) $v_p(a^n) = nv_p(a)$,

(c) jeśli $v_p(a) < v_p(b)$, to $v_p(a \pm b) = v_p(a)$,

(d) jeśli $v_p(a) = v_p(b)$, to $v_p(a \pm b) \geqslant v_p(a)$, przy czym jeśli $p = 2$, to nierówność jest ostra,

(e) $a \mid b$, to dla każdego pierwszego p: $v_p(a) \leqslant v_p(b)$,

(f) $v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$ (wzór Legendre'a).

Zadania

Zadanie 1. (74 OM, etap II, zadanie 1)
Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite b o następującej własności: istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, k, l, że liczby $a^k + b^l$ i $a^l + b^k$ są podzielne przez b^{k+l}, a przy tym $k \neq l$.

Zadanie 2.
Dane są takie liczby całkowite a, b, c, że $\gcd(a, b, c) = 1$ oraz $ab = c(a - b)$. Udowodnić, że liczba $|a - b|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (65 OM, etap II, zadanie 1)
Dane są takie dodatnie liczby całkowite x i y, że liczba $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ jest całkowita. Udowodnić, że liczba $\frac{x^2}{y}$ jest całkowita.

Zadanie 4.
Pokazać, że jeśli $a, b \in \mathbb{Z}_+$ oraz $ab \mid a^2 + b^2 + a$, to a jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5.
Wyznaczyć wszystkie takie trójki niezerowych liczb całkowitych a, b, c, że każda z liczb

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{oraz} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

jest całkowita.

Zadanie 6. (63 OM, II etap, zadanie 3)
Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m + 1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Zadanie 7.
Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i k, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba a przystaje modulo n do pewnej k-tej potęgi liczby całkowitej. Wykazać, że a jest k-tą potęgą liczby całkowitej.

Zadanie 8.
Wykazać, że nie istnieje taka liczba całkowita n, że liczba

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

jest całkowita.

Zadanie 9. (58 OM, I etap, zadanie 9)
Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej k. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n, dla których $F(m) = F(n)$.

Zadanie 10. (Mszana 2012, zadanie 18)
Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

jest podzielna przez $n!$.

Zadanie 11.
Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ jest całkowita.

Zadanie 12.
Załóżmy, że liczby całkowite a, b, c, d spełniają $0 < a < b < c < d$ oraz $ad = bc$. Pokazać, że jeżeli każda z liczb $a + d$ i $b + c$ jest potęgą dwójki, to a także jest potęgą dwójki.

Wyzwania

Zadanie 13.
Udowodnić, że istnieją takie zbiory $(A_n)_{n \geqslant 1}$, $A_n \subseteq \mathbb{Z}_+$, że spełnione są następujące warunki.

(1) Każda dodatnia liczba całkowita należy do dokładnie jednego z tych zbiorów.
(2) Każdy z tych zbiorów ma nieskończenie wiele elementów.
(3) Jeżeli (niekoniecznie parami różne) liczby $a > b$, $c > d$ należą do tego samego zbioru A_i, to liczby $a - b$ i $c - d$ należą do tego samego zbioru A_j wtedy i tylko wtedy, gdy $a/b = c/d$.

Zadanie 14. (CAPS 2023 P6)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$ i kwadratowa plansza $n \times n$, której wszystkie pola początkowo są białe. Malarz Piotr spaceruje po planszy i przemalowuje odwiedzane pola zgodnie z następującymi zasadami. Piotr zaczyna każdy *spacer* w lewym dolnym rogu planszy, a następnie:

- jeśli stoi na białym polu, przemalowuje je na czarno i przechodzi o jedno pole w górę (lub schodzi z planszy, jeśli jest w najwyższym rzędzie),
- jeśli stoi na czarnym polu, przemalowuje je na biało i przechodzi o jedno pole w prawo (lub schodzi z planszy, jeśli jest w kolumnie najbardziej na prawo).

Piotr kończy pojedynczy spacer, gdy schodzi z planszy. Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą s o tej własności, że po dokładnie s spacerach wszystkie pola planszy staną się ponownie białe.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Magdalena Pudełko*, Karol Musieliński.

Zadanie 1. (74 OM, etap II, zadanie 1)
Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite b o następującej własności: istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, k, l, że liczby $a^k + b^l$ i $a^l + b^k$ są podzielne przez b^{k+l}, a przy tym $k \neq l$.

Rozwiązanie:
Oczywiście $b = 1$ spełnia warunki zadania. Przypuśćmy teraz, że $b > 1$. Wówczas istnieje liczba pierwsza p dzieląca b. Jeśli istnieją takie liczby całkowite a, k, l, że $b^{k+l} \mid a^k + b^l$, $b^{k+l} \mid a^l + b^k$ i $k \neq l$, to

$$(k+l)v_p(b) \leqslant v_p(a^k + b^l) \quad \text{oraz} \quad (k+l)v_p(b) \leqslant v_p(a^l + b^k).$$

Jednak $v_p(a^k) = kv_p(a)$ i $v_p\left(b^l\right) = lv_p(b)$, więc jeżeli te dwie liczby nie są równe, to

$$(k+l)v_p(b) \leqslant v_p(a^k + b^l) = \min\{kv_p(a), lv_p(b)\} \leqslant lv_p(b).$$

Ponieważ $v_p(b) > 0$ i $k + l > l$, mamy $(k + l)v_p(b) > lv_p(b)$, co jest niemożliwe. Zatem $kv_p(a) = lv_p(b)$, czyli $\frac{v_p(a)}{v_p(b)} = \frac{l}{k}$. Zapis ten jest możliwy, ponieważ $k \neq 0$ i $v_p(b) \neq 0$. Analogicznie dostajemy $\frac{v_p(a)}{v_p(b)} = \frac{k}{l}$. Zatem $\frac{k}{l} = \frac{l}{k}$, czyli $k^2 = l^2$. Ponieważ $k, l > 0$, stąd wynika $k = l$, wbrew założeniu. Zatem $b = 1$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

Zadanie 2.
Dane są takie liczby całkowite a, b, c, że $\gcd(a, b, c) = 1$ oraz $ab = c(a - b)$. Udowodnić, że liczba $|a - b|$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Jeżeli $a = b$, to teza oczywiście zachodzi. W przeciwnym wypadku $|a - b| > 0$, więc aby pokazać, że liczba $|a-b|$ jest kwadratem liczby całkowitej, wystarczy pokazać, że dla każdej liczby pierwszej p liczba $v_p(a-b)$ jest parzysta. Wybierzmy więc dowolną liczbę pierwszą p i rozważmy następujące przypadki:

(i) $v_p(a) = v_p(b) = 0$. Wówczas lewa strona równości $ab = c(a - b)$ nie jest podzielna przez p, więc prawa też nie może być, czyli $v_p(a - b) = 0$.

(ii) Dokładnie jedna z liczb $v_p(a)$, $v_p(b)$ jest równa 0. Wówczas dokładnie jedna z liczb a, b jest podzielna przez p, więc ich różnica nie jest, czyli $v_p(a - b) = 0$.

(iii) $v_p(a) \neq 0 \neq v_p(b)$ Wówczas $v_p(c) = 0$, ponieważ w przeciwnym razie $p \mid \gcd(a, b, c) = 1$, co jest niemożliwe. Zatem
$$v_p(a) + v_p(b) = v_p(ab) = v_p(c(a - b)) = v_p(a - b).$$
Jeżeli $v_p(a) \neq v_p(b)$, to $v_p(a - b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\} < v_p(a) + v_p(b)$, co jest niemożliwe. Zatem $v_p(a) = v_p(b)$, więc $v_p(a - b) = 2v_p(a)$ i istotnie $2 \mid v_p(a - b)$.

Udowodniliśmy, że dla każdej liczby pierwszej p liczba $v_p(a - b)$ jest parzysta, zatem liczba $|a - b|$ istotnie jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (65 OM, etap II, zadanie 1)
Dane są takie dodatnie liczby całkowite x i y, że liczba $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ jest całkowita. Udowodnić, że liczba $\frac{x^2}{y}$ jest całkowita.

Rozwiązanie:
Udowodnimy, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi $v_p(y) \leqslant 2v_p(x)$. Ustalmy zatem liczbę pierwszą p. Z założenia wynika, że
$$v_p(x) + v_p(y) = v_p(xy) \leqslant v_p(x^3 + y^3).$$
Jeżeli $v_p(y) \leqslant v_p(x)$, to oczywiście także $v_p(y) \leqslant 2v_p(x)$. Natomiast w przeciwnym razie

$$v_p(x) + v_p(y) \leqslant v_p(x^3 + y^3) = 3v_p(x)$$

co również implikuje $v_p(y) \leqslant 2v_p(x)$. Wobec dowolności p otrzymujemy tezę.

Zadanie 4.
Pokazać, że jeśli $a, b \in \mathbb{Z}_+$ oraz $ab \mid a^2 + b^2 + a$, to a jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Pokażemy, że liczba $v_p(a)$ jest parzysta. Jeżeli $v_p(a) = 0$, to teza jest oczywista. Dalej załóżmy, że $v_p(a) > 0$. Wówczas

$$v_p\big(a^2\big) = 2v_p(a) > v_p(a), \quad \text{więc} \quad v_p\big(a^2 + a\big) = v_p(a).$$

Jeżeli $v_p(b) = 0$, to $p \mid ab$, ale p nie dzieli $a^2 + b^2 + a$, co jest niemożliwe. Zatem $v_p(b) > 0$. Jeśli

$$v_p\big(a^2 + a\big) = v_p(a) \neq v_p\big(b^2\big)\,,$$

to

$$v_p(ab) \leqslant v_p\big(b^2 + \big(a^2 + a\big)\big) = \min\big\{v_p(a), v_p\big(b^2\big)\big\} \leqslant v_p(a).$$

Jednak

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) > v_p(a),$$

co jest niemożliwe. Zatem

$$v_p(a) = v_p\big(b^2\big) = 2v_p(b),$$

co istotnie jest liczbą parzystą.

Zadanie 5.
Wyznaczyć wszystkie takie trójki niezerowych liczb całkowitych a, b, c, że każda z liczb

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{oraz} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie:
Pokażemy, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi równość $v_p(a) = v_p(b) = v_p(c)$. Przypuśćmy, że tak nie jest dla pewnej liczby pierwszej p. Bez straty ogólności załóżmy, że $v_p(a) \leqslant v_p(b) \leqslant v_p(c)$, przy czym $v_p(a) < v_p(c)$. Wówczas

$$\begin{aligned} v_p(a^2b) &= 2v_p(a) + v_p(b) < v_p(b) + v_p(c) + v_p(b) = 2v_p(b) + v_p(c) = v_p(b^2c), \\ v_p(a^2b) &= 2v_p(a) + v_p(b) < v_p(a) + v_p(c) + v_p(c) = 2v_p(c) + v_p(a) = v_p(c^2a). \end{aligned}$$

Zatem

$$v_p(a^2b + b^2c + c^2a) = 2v_p(a) + v_p(b) < v_p(abc),$$

więc liczba

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{abc} = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

nie jest całkowita, co przeczy warunkom zadania. Wobec tego $v_p(a) = v_p(b) = v_p(c)$ dla każdej liczby pierwszej p, czyli $a = b = c$. Oczywiście każda taka trójka spełnia warunki zadania.

Zadanie 6. (63 OM, II etap, zadanie 3)
Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m + 1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy wbrew tezie, że istnieją takie parami różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1} \in \{1, \ldots, n\}$, że żadna z nich nie dzieli iloczynu pozostałych. Wówczas dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m + 1$ istnieje taka liczba pierwsza p_i, że

$$\begin{aligned} v_{p_i}(a_i) > v_{p_i}(a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_{m+1}) = \\ = v_{p_i}(a_1) + \cdots + v_{p_i}(a_{i-1}) + v_{p_i}(a_{i+1}) + \cdots + v_{p_i}(a_{m+1}). \end{aligned}$$

Wówczas $v_{p_i}(a_i) > v_{p_i}(a_j)$, o ile tylko $i \neq j$. Ponadto $p_i \mid a_i \leqslant n$, więc $p_i \leqslant n$. Zauważmy, że w zbiorze $\{p_1, p_2, \ldots, p_{m+1}\}$ jest co najwyżej m różnych liczb, ponieważ wszystkie są liczbami pierwszymi ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zatem $p_i = p = p_j$ dla pewnych $i \neq j$ i liczby pierwszej p. To jednak jest niemożliwe wobec $v_p(a_i) > v_p(a_j)$ oraz $v_p(a_j) > v_p(a_i)$.

Zadanie 7.
Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i k, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba a przystaje modulo n do pewnej k-tej potęgi liczby całkowitej. Wykazać, że a jest k-tą potęgą liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Niech p będzie pewną liczbą pierwszą i przyjmijmy $n = p^m$, przy czym $m > v_p(a)$. Wówczas z założenia istnieje taka liczba całkowita b, że $n \mid a - b^k$, czyli

$$v_p\big(a - b^k\big) \geqslant m > v_p(a).$$

Jeśli $v_p(a) \neq v_p\big(b^k\big)$, to

$$v_p\big(a - b^k\big) = \min\big\{v_p(a), v_p\big(b^k\big)\big\} \leqslant v_p(a),$$

co jest niemożliwe. Zatem

$$v_p(a) = v_p\big(b^k\big) = kv_p(b).$$

Otrzymaliśmy więc, że dla każdej liczby pierwszej p, liczba $v_p(a)$ jest podzielna przez k, czyli liczba a istotnie jest k-tą potęgą liczby całkowitej.

Zadanie 8.
Wykazać, że nie istnieje taka liczba całkowita n, że liczba

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie:
Niech k będzie największą taką liczbą całkowitą, że $2^k \leqslant n$. Zauważmy, że

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{1} + \frac{n!}{2} + \cdots + \frac{n!}{n}\right).$$

Liczba ta jest całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy liczba w nawiasie (która oczywiście jest całkowita) jest podzielna przez $n!$. Jednak dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq 2^k$ mamy $v_2(i) < k$, ponieważ z definicji k mamy

$$2 \cdot 2^k = 2^{k+1} > n.$$

Zatem dla każdego i mamy $v_2(n!/i) = v_2(n!) - v_2(i) > v_2(n!) - k$. Wobec tego także

$$v_2\left(\frac{n!}{1} + \cdots + \frac{n!}{2^k - 1} + \frac{n!}{2^k + 1} + \cdots + \frac{n!}{n}\right) > v_2(n!) - k.$$

Ponadto $v_2(n!/2^k) = v_2(n!) - k$, więc

$$v_2\left(\frac{n!}{1} + \frac{n!}{2} + \cdots + \frac{n!}{n}\right) = v_2(n!) - k < v_2(n!).$$

Zatem $n!$ nie dzieli wyrażenia w nawiasie, więc liczba $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ nie jest całkowita.

Zadanie 9. (58 OM, I etap, zadanie 9)
Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej k. Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n, dla których $F(m) = F(n)$.

Rozwiązanie:
Zauważmy najpierw, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k zachodzi równość $F(k) = k^{d(k)/2}$, gdzie $d(k)$ jest liczbą dodatnich dzielników k. Istotnie, niech

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{d(k)} = k$$

będą wszystkimi dodatnimi dzielnikami k. Wówczas dla każdego $1 \leqslant i \leqslant d(k)$ zachodzi $d_i d_{d(k)-i+1} = k$, więc

$$F(k)^2 = \left(\prod_{i=1}^{d(k)} d_i\right)\left(\prod_{i=1}^{d(k)} d_{d(k)+1-i}\right) = \prod_{i=1}^{d(k)} d_i d_{d(k)+1-i} = \prod_{i=1}^{d(k)} k = k^{d(k)},$$

co daje $F(k) = k^{d(k)/2}$.

Przypuśćmy teraz, że istnieją $m, n \in \mathbb{Z}_+$, dla których $F(m) = F(n)$ oraz $m \neq n$. Oczywiście nie może zachodzić $d(m) = d(n)$. Załóżmy zatem bez straty ogólności, że $d(m) < d(n)$. Wówczas na mocy wzoru $F(k) = k^{d(k)/2}$ dla każdej liczby pierwszej p mamy

$$v_p(m) = \frac{2v_p(F(m))}{d(m)} = \frac{2v_p(F(n))}{d(m)} > \frac{2v_p(F(n))}{d(n)} = v_p(n).$$

Zatem $n \mid m$. Jednak stąd oczywiście $d(m) \geqslant d(n)$ wbrew założeniu. Wobec tego nie istnieją takie liczby m i n.

Zadanie 10. (Mszana 2012, zadanie 18)
Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1) \cdots (2^n - 2^{n-1})$$

jest podzielna przez $n!$.

Rozwiązanie:
Niech

$$A = \left(2^n - 2^0\right)\left(2^n - 2^1\right) \cdots \left(2^n - 2^{n-1}\right).$$

Pokażemy, że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi $v_p(n!) \leqslant v_p(A)$. Dla $p = 2$ mamy

$$v_2(n!) = \left\lfloor \frac{n}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \cdots < n\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = n,$$

czyli

$$v_2(n!) \leqslant n - 1 = v_2\left(2^n - 2^{n-1}\right) \leqslant v_2(A).$$

Natomiast dla $p > 2$ niech

$$B = \frac{A}{2^{v_2(A)}} = (2^n - 1)\left(2^{n-1} - 1\right) \cdots \left(2^1 - 1\right).$$

Z małego twierdzenia Fermata wynika, że każdy z czynników postaci $\left(2^k - 1\right)$ dla $p - 1 \mid k$, których jest w powyższym iloczynie $\lfloor n/(p-1) \rfloor$ jest podzielny przez p. Zatem $v_p(B) \geqslant \lfloor n/(p-1) \rfloor$.

Jednocześnie

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots \leqslant \left\lfloor n\left(\frac{1}{p^1} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor \leqslant v_p(B) \leqslant v_p(A).$$

Stąd dla każdej liczby pierwszej p zachodzi $v_p(n!) \leqslant v_p(A)$. Wobec tego $n! \mid A$, co było do udowodnienia.

Zadanie 11.
Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ jest całkowita.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Chcemy więc pokazać, że $n!(n+1)! \mid (2n)!$, czyli że dla każdej liczby pierwszej p zachodzi

$$v_p(n!(n+1)!) \leqslant v_p((2n)!)$$

Ze wzoru Legendre'a wynika, że

$$v_p(n!(n+1)!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+1}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^i} \right\rfloor \right).$$

Zauważmy, że dla każdego $i \geqslant 1$, co najmniej jedna z liczb n, $n+1$ jest niepodzielna przez p^i. Stąd

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{p^i} \right\rfloor \quad \text{lub} \quad \left\lfloor \frac{n+1}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

W obu przypadkach korzystamy z nierówności $\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor \leqslant \lfloor a+b\rfloor$, by wnioskować, że

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^i} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor.$$

Zatem

$$v_p(n!(n+1)!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{p^i} \right\rfloor \right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{p^i} \right\rfloor = v_p((2n)!),$$

co kończy dowód.

Zadanie 12.
Załóżmy, że liczby całkowite a, b, c, d spełniają $0 < a < b < c < d$ oraz $ad = bc$. Pokazać, że jeżeli każda z liczb $a+d$ i $b+c$ jest potęgą dwójki, to a także jest potęgą dwójki.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że istnieje czwórka liczb a, b, c, d spełniająca powyższe założenia, ale liczba a nie jest potęgą dwójki. Spośród wszystkich takich czwórek wybierzmy tę, w której liczba a jest najmniejsza. Jeśli jest ich więcej niż jedna taka czwórka, to wybierzmy dowolną z nich.

Przypuśćmy najpierw, że a jest parzyste. Wówczas, skoro a i $a+d$ są parzyste, to d też. Liczba $bc = ad$ też jest parzysta, więc co najmniej jedna z liczb b lub c jest parzysta, ale parzysta jest też ich suma, więc każda z liczb a, b, c, d jest parzysta. Zatem czwórka liczb $(a/2, b/2, c/2, d/2)$ spełnia warunki zadania, wbrew założeniu o minimalności.

Wobec tego liczba a jest nieparzysta, zaś liczba $a+d$ jest parzysta, więc liczba d jest nieparzysta. Wówczas $bc = ad$ także jest nieparzyste, więc nieparzyste są liczby b i c. Niech

$$a + d = 2^k \quad \text{oraz} \quad b + c = 2^m.$$

Skoro $0 < a < b < c < d$ i $ad = bc$, to $a + d > b + c$, więc $k > m$. Zauważmy, że $a(2^k - a) = b(2^m - b)$, czyli $b^2 - a^2 = b \cdot 2^m - a \cdot 2^k$. Stąd $v_2(b \cdot 2^m) = m$ i $v_2(a \cdot 2^k) = k > m$, więc

$$v_2(b+a) + v_2(b-a) = v_2((b+a)(b-a)) = v_2(b^2 - a^2) = v_2(b \cdot 2^m - a \cdot 2^k) = m.$$

Liczby $b - a$ i $b + a$ różnią się o $2a$, czyli ich różnica nie dzieli się przez 4. Zatem co najmniej jedna z nich jest niepodzielna przez 4. Wówczas druga musi być podzielna przez 2^{m-1}. Jednak

$$0 < b - a < b < \frac{b+c}{2} = 2^{m-1},$$

więc to $a + b$ musi być podzielne przez 2^{m-1}. Jednocześnie $a + b < b + c = 2^m$, zatem

$$a + b = 2^{m-1}, \quad b = 2^{m-1} - a \quad \text{oraz} \quad c = 2^{m-1} + a.$$

Mamy zatem

$$a \mid ad = bc = (2^{m-1} - a)(2^{m-1} + a) = 2^{2m-2} - a^2,$$

czyli $a \mid 2^{2m-2}$. Wobec tego a jest potęgą dwójki, co przeczy założeniu.

Zadanie 13.
Udowodnić, że istnieją takie zbiory $(A_n)_{n \geqslant 1}$, $A_n \subseteq \mathbb{Z}_+$, że spełnione są następujące warunki.

(1) Każda dodatnia liczba całkowita należy do dokładnie jednego z tych zbiorów.
(2) Każdy z tych zbiorów ma nieskończenie wiele elementów.
(3) Jeżeli (niekoniecznie parami różne) liczby $a > b$, $c > d$ należą do tego samego zbioru A_i, to liczby $a - b$ i $c - d$ należą do tego samego zbioru A_j wtedy i tylko wtedy, gdy $a/b = c/d$.

Rozwiązanie:
Dla $n \geqslant 2$ niech

$$f(n) = \max\{3^t \mid t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ 3^t < n\},$$

ponadto niech $f(1) = 0$. Rozważmy podział zbioru dodatnich liczb całkowitych, w którym $n \in A_{n-f(n)}$. Wówczas warunek (1) jest oczywiście spełniony. Czytelnik zechce przekonać się, że warunek (2) również jest spełniony.

Sprawdzimy teraz ostatni warunek. Ustalmy i i weźmy takie $a > b$, $c > d$, że $a, b, c, d \in A_i$. Wówczas dla pewnych $k > l$ i $m > n$ zachodzi

$$a = 3^k + i, \quad b = 3^l + i, \quad c = 3^m + i, \quad d = 3^n + i.$$

Wykażemy, że każdy z warunków w (3) jest równoważny warunkowi $(a, b) = (c, d)$.

Załóżmy, że $a - b = 3^k - 3^l$ i $c - d = 3^m - 3^n$ należą do tego samego zbioru A_j. Zauważmy, że $f(a - b) = 3^{k-1}$. Stąd $j = 2 \cdot 3^k - 3^l$. Analogiczne rozumowanie dla $c - d$ daje

$$2 \cdot 3^k - 3^l = j = 2 \cdot 2^m - 3^n.$$

Porównujemy wykładniki 3-adyczne obu stron i wnioskujemy, że $l = n$. Stąd natychmiast $k = m$, czyli istotnie $(a, b) = (c, d)$.

Niech teraz $a/b = c/d$, czyli $ad = bc$ oraz

$$3^{k+n} + i(3^k + 3^n) = 3^{l+m} + i(3^l + 3^m). \tag{$*$}$$

Ponieważ $b = 3^l + i \leqslant 3^{l+1}$, zachodzi $i \leqslant 2 \cdot 3^l$ oraz $v_3(i) < l + 1 \leqslant k$, Ponadto

$$v_3(3^k + 3^n) = \min\{k, n\} \leqslant n.$$

Wobec tego $v_3(i(3^k + 3^n)) < k + n$. Zatem lewa strona $(*)$ ma wykładnik 3-adyczny równy $v_3(i) + \min\{k, n\}$. Analogicznie wnioskujemy, że prawa strona tej równości ma wykładnik 3-adyczny $v_3(i) + \min\{l, m\}$. Stąd

$$\min\{k, n\} = \min\{l, m\}.$$

Zauważmy, że $\min\{k, n\} \leqslant n < m$, więc $\min\{l, m\} = l$. Teraz, ponieważ $k > l$, otrzymujemy $\min\{k, n\} = n$. W konsekwencji $n = l$, czyli $a = c$. Wówczas z warunku $ad = bc$ mamy $b = c$. Wobec tego $(a, b) = (c, d)$, co kończy dowód.

Zadanie 14. (CAPS 2023 P6)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$ i kwadratowa plansza $n \times n$, której wszystkie pola początkowo są białe. Malarz Piotr spaceruje po planszy i przemalowuje odwiedzane pola zgodnie z następującymi zasadami. Piotr zaczyna każdy *spacer* w lewym dolnym rogu planszy, a następnie:

- jeśli stoi na białym polu, przemalowuje je na czarno i przechodzi o jedno pole w górę (lub schodzi z planszy, jeśli jest w najwyższym rzędzie),
- jeśli stoi na czarnym polu, przemalowuje je na biało i przechodzi o jedno pole w prawo (lub schodzi z planszy, jeśli jest w kolumnie najbardziej na prawo).

Piotr kończy pojedynczy spacer, gdy schodzi z planszy. Wyznaczyć najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą s o tej własności, że po dokładnie s spacerach wszystkie pola planszy staną się ponownie białe.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że po s spacerach wszystkie pola są z powrotem białe. Ponumerujmy teraz wiersze kolejnymi liczbami $0, 1, \ldots, n-1$ zaczynając od dolnego wiersza i analogicznie kolumny od lewej. Dla pola o współrzędnych (a, b) niech $L_{a,b} = \binom{a+b}{a}$ będzie liczbą monotonicznych (krokami w górę lub w prawo) ścieżek zaczynających się w lewym dolnym rogu planszy i kończących się na polu (a, b).

Pokażemy indukcyjnie, że po s spacerach Piotr odwiedził pole (a, b) dokładnie

$$N_{a,b} := \frac{sL_{a,b}}{2^{a+b}}$$

razy. Indukcję prowadzimy względem wartości $a + b$. Jedynym polem, dla którego $a + b = 0$, jest lewy dolny róg planszy. Dla tego pola $L_{a,b} = 1$ i Piotr istotnie odwiedził to pole $N_{a,b} = s$ razy.

Niech teraz $a + b > 0$ i załóżmy, że każde pole (u, v), takie że $u + v < a + b$ zostało odwiedzone dokładnie $N_{u,v}$ razy. Zauważmy, że $L_{a,b} = L_{a-1,b} + L_{a,b-1}$, przy czym jeśli jedno z pól $(a - 1, b)$ lub $(a, b - 1)$ nie istnieje, to odpowiednią wartość zastępujemy zerem. Skoro pole $(a - 1, b)$ jest na końcu białe, to Piotr stał na nim parzyście wiele razy, a przeszedł z tego pola na pole (a, b) dokładnie $N_{a-1,b}/2$ razy. Analogicznie rozumujemy dla pola $(a, b - 1)$. Stąd wnioskujemy, że Piotr odwiedził pole (a, b) dokładnie

$$\frac{N_{a-1,b}}{2} + \frac{N_{a,b-1}}{2} = \frac{sL_{a-1,b}}{2^{a+b}} + \frac{sL_{a,b-1}}{2^{a+b}} = N_{a,b}$$

razy, co kończy dowód indukcyjny.

Zauważmy, że dla każdego z pól liczba $N_{a,b}$ jest parzysta, ponieważ każde pole jest z powrotem białe. Stąd dla każdego pola (a,b) zachodzi

$$v_2(s) + v_2\left(\binom{a+b}{a}\right) - a - b = v_2(N_{a,b}) \geqslant 1.$$

Ze wzoru Legendre'a mamy

$$t + v_2(t!) = \left\lfloor \frac{t}{2^0} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{t}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t}{2^2} \right\rfloor + \cdots \right) = \left\lfloor \frac{2t}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2t}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2t}{2^3} \right\rfloor + \cdots = v_2((2t)!).$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej t. Zatem

$$v_2\left(\frac{\binom{a+b}{a}}{2^{a+b}}\right) = v_2((a+b)!) - v_2((2a)!) - v_2((2b)!).$$

Bez straty ogólności niech $a \leqslant b$. Wówczas $a + b \geqslant 2a$ oraz $2b \leqslant 2n-2$. Stąd $v_2((a+b)!) \geqslant v_2((2a)!)$ oraz $v_2((2b)!) \leqslant v_2((2n-2)!)$. Zatem

$$v_2\left(\frac{\binom{a+b}{a}}{2^{a+b}}\right) \geqslant -v_2((2n-2)!),$$

ponadto równość zachodzi dla $(a,b) = (n-1, n-1)$. Wtedy parzystość $N_{a,b}$ narzuca $v_2(s) \geqslant 1 + v_2((2n-2)!) = n + v_2((n-1)!)$, przy czym ostatnia równość wynika z udowodnionej wcześniej tożsamości $v_2((2t)!) = t + v_2(t!)$. Stąd oczywiście

$$s \geqslant 2^{n+v_2((n-1)!)}.$$

Należy jeszcze wykazać, że liczba ta jest wystarczająca. Oczywiście wprost z powyższej konstrukcji każda z liczb $N_{a,b}$ jest parzysta. Czytelnik zechce przekonać się, że w takim wypadku założenie na początku dowodu indukcyjnego, że wszystkie pola są z powrotem białe, jest zbędne. To kończy dowód.

Grafy i matroidy

Michał Mańka

Grafy olimpijskie

Zadania w tej sekcji pochodzą z kursu prof. Andrzeja Grzesika[1].

Zadanie 1.
Udowodnić, że każdy graf spójny G zawiera ścieżkę o $\min\{|V(G)|, 2\delta(G)+1\}$ wierzchołkach, przy czym $\delta(G)$ to najmniejszy stopień wierzchołka w grafie G.

Zadanie 2.
Niech G będzie takim grafem o n wierzchołkach, że stopień każdego wierzchołka jest równy co najmniej $n/2-1$. Wykazać, że w grafie G znajdują się dwie rozłączne ścieżki zawierające wszystkie wierzchołki grafu.

Zadanie 3.
Niech T będzie dowolnym drzewem o k wierzchołkach. Udowodnić, że każdy graf G o n wierzchołkach mający co najmniej $(k-1)n$ krawędzi zawiera T jako podgraf.

Zadanie 4.
Ustalmy dodatnią liczbę całkowitą ℓ i rozważmy graf dwudzielny między zbiorami wierzchołków A i B. Załóżmy, że dla każdego $S \subseteq A$ co najmniej $\ell|S|$ wierzchołków ze zbioru B ma sąsiada w zbiorze S. Udowodnić, że dla każdego wierzchołka $a \in A$ można dobrać taki ℓ-elementowy zbiór jego sąsiadów B_a, że wybrane zbiory będą parami rozłączne.

Zadanie 5.
W Wydziałowym Turnieju Piłkarzyków wzięło udział $2n$ drużyn. Terminarz spotkań był tak ułożony, że każdego spośród $2n-1$ dni turnieju każda drużyna zagrała jeden mecz, a w ciągu całego turnieju każde dwie różne drużyny zagrały ze sobą dokładnie raz i żaden mecz nie zakończył się remisem. Udowodnić, że dla każdego dnia turnieju da się tak wybrać jedną drużynę, która tego dnia wygrała, aby żadnej drużyny nie wybrać więcej niż raz.

Zadanie 6.
Jednostkowe sześciany przerabia się na koraliki, wiercąc w każdym z nich otwór wzdłuż jednej z przekątnych bryły. Koraliki nawleka się na sznurek w taki sposób, że mogą się one swobodnie poruszać w przestrzeni, z tym ograniczeniem, że wierzchołki dwóch sąsiednich sześcianów stykają się ze sobą.

Niech A oznacza wierzchołek początkowy sznurka, a B – wierzchołek końcowy. Na sznurku znajduje się dokładnie $p \times q \times r$ sześcianów, przy czym $p, q, r \geqslant 1$.

(a) Wyznaczyć wszystkie trójki liczb (p, q, r), dla których możliwe jest ułożenie tych sześcianów w prostopadłościan o wymiarach $p \times q \times r$.

(b) Odpowiedzieć na to samo pytanie przy dodatkowym założeniu, że $A = B$, czyli początek i koniec sznurka pokrywają się.

Brak cykli a liniowa niezależność

Definicja (Liniowa niezależność)

Niech K będzie ciałem. Skończony zbiór wektorów $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq K^n$ jest *liniowo niezależny*, jeśli z równości

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = (0, \ldots, 0)$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_m \in K$ wynika $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$.

[1]Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Zadanie 7.
Niech $G = (V, E)$ będzie skończonym grafem o n wierzchołkach. Ustalmy dowolne ciało K. Udowodnić, że istnieje injekcja $\varphi\colon E \to K^n$ o następującej własności. Podzbiór $F \subseteq E$ nie zawiera cyklu wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wektorów $\varphi(F)$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 8.
Wskazać takie ciało K, dodatnią liczbę całkowitą m i skończony podzbiór $A \subseteq K^m$, że nie istnieje graf G o nie więcej niż m wierzchołkach wraz z injekcją φ jak w Zadaniu 7, taką że $\varphi(E) = A$.

Okazuje się, że można wprowadzić operację rozpięcia bezpośrednio na zbiorach krawędzi grafu, która będzie bardzo podobna do rozpięcia w przestrzeniach wektorowych. Dla przypomnienia, rozpięciem podzbioru X przestrzeni wektorowej nad ciałem K nazywamy

$$\operatorname{span}(X) = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid a_i \in K,\ x_i \in X\}.$$

Dla tak zdefiniowanej operacji analogię bazy przestrzeni wektorowej stanowią drzewa rozpinające. Poniższa teoria ma także zastosowanie w teorii ciał, gdzie prowadzi do baz przestępnych.

Sprawdźmy najpierw jakie własności ma $\operatorname{span}(\,\cdot\,)$.

Lemat 1 (Własności $\operatorname{span}(\,\cdot\,)$)

(a) Jeśli $X \subseteq Y$, to $\operatorname{span}(X) \subseteq \operatorname{span}(Y)$.
(b) $X \subseteq \operatorname{span}(X)$.
(c) $\operatorname{span}(\operatorname{span}(X)) = \operatorname{span}(X)$.
(d) *Finitarność* – jeśli $y \in \operatorname{span}(X)$, to $y \in \operatorname{span}(X_0)$ dla pewnego skończonego podzbioru $X_0 \subseteq X$.
(e) *Aksjomat wymiany* – jeśli $y \in \operatorname{span}(X \cup \{x\})$ i $y \notin \operatorname{span}(X)$, to $x \in \operatorname{span}(X \cup \{y\})$.

Definicja (Matroid)

Zbiór Ω wraz z operacją $\operatorname{span} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{P}(\Omega)$ o własnościach z Lematu 1 nazywamy *matroidem*.

Zbiór E krawędzi grafu G jest matroidem z następującą operacją:

$$\operatorname{span}(X) = \{ab \in E \mid \text{ istnieje ścieżka } a \rightsquigarrow b \text{ złożona z krawędzi ze zbioru } X\}.$$

Pokażemy, że dla matroidów można zdefiniować i udowodnić istnienie (oraz równoliczność) baz.

Definicja (Zbiór generatorów)

Zbiór $X \subseteq \Omega$ nazywamy *zbiorem generatorów*, jeśli $\operatorname{span}(X) = \Omega$.

Definicja (Zbiór wolny)

Zbiór $A \subseteq \Omega$ nazywamy *zbiorem wolnym*, jeśli dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \notin \operatorname{span}(A \setminus \{a\})$.

Lemat 2

Jeśli N jest wolny oraz $x \notin \operatorname{span}(N)$, to $N \cup \{x\}$ też jest wolny.

Dowód. Przypuśćmy, że dla pewnego $y \in N$ zachodzi $y \in \operatorname{span}(N \setminus \{y\}, x)$. Skoro N jest zbiorem wolnym, to aksjomat wymiany daje nam $x \in \operatorname{span}(N)$ wbrew założeniu. □

Definicja (Baza)

Podzbiór $B \subseteq \Omega$ jest *bazą*, gdy jest wolnym zbiorem generatorów.

Twierdzenie (Charakteryzacja bazy)

Niech $B \subseteq \Omega$. Wówczas następujące warunki są równoważne.

(1) B jest bazą.

(2) B jest minimalnym zbiorem generatorów.

(3) B jest maksymalnym zbiorem wolnym.

W szczególności nie ma właściwej inkluzji pomiędzy dwoma bazami.

Czytelnik zechce samodzielnie przeprowadzić nietrudne dowody implikacji „(1) $\Longrightarrow$ (2)”, „(1) $\Longrightarrow$ (3)” i (2) $\Longrightarrow$ (1)”. Implikacja „(3) $\Longrightarrow$ (1)” wynika z Lematu 2.

Naśladując analogiczny dowód dla przestrzeni wektorowych, sformułujmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie (O uzupełnianiu do bazy)

Niech X będzie zbiorem generatorów i niech A będzie zbiorem wolnym. Wówczas istnieje taki podzbiór $Y \subseteq X$, że $A \cup Y$ jest bazą.

Dowód. Oczywiście będzie potrzebny Lemat Kuratowskiego-Zorna.

Lemat 3 (Kuratowskiego-Zorna)

Niepusta rodzina zbiorów $\mathcal{F}$ ma tę własność, że $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{F}$, jeśli tylko $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$ i dla każdej pary $A, B \in \mathcal{L}$ zachodzi $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$. Wówczas w rodzinie $\mathcal{F}$ istnieje element maksymalny względem inkluzji.

Niech $\mathcal{F} = \{Z \subseteq X \mid Z \cup A \text{ to zbiór wolny}\}$. Oczywiście $\varnothing \in \mathcal{F}$. Rutynowo sprawdzamy, że $\mathcal{F}$ spełnia założenia lematu i dlatego zawiera element maksymalny Y. Gdyby $A \cup Y$ nie był zbiorem generatorów, to istniałby pewien $x \in X \setminus \operatorname{span}(A \cup Y)$, w szczególności $x \notin Y$. Lemat 2 daje wówczas sprzeczność z maksymalnością. Wobec tego $A \cup Y$ jest bazą, co kończy dowód. □

Z powyższego twierdzenia wynika istnienie bazy po przyjęciu $A = \varnothing$ i $X = \Omega$.

Twierdzenie (Równoliczność baz)

Każde dwie bazy matroidu są równoliczne.

Dowód. Niech A i B będą różnymi bazami. Chcemy pokazać, że $|A| = |B|$. Rozważmy najpierw sytuację, w której jedna z baz, bez straty ogólności A, jest skończona. Powiedzmy, że baza A jest skończona. Wykażemy następującą własność. Jeśli C i D są bazami oraz $c \in C$, to istnieje takie $d \in D$, że $(C \setminus \{c\}) \cup \{d\}$ jest bazą równoliczną z C.

Istotnie, skoro $C \setminus \{c\}$ na mocy minimalności nie jest zbiorem generatorów, to pewien element $d \in D$ nie należy do $\operatorname{span}(C \setminus \{c\})$. Jednak $d \in \operatorname{span}(C)$, więc z aksjomatu wymiany mamy $c \in \operatorname{span}((C \setminus \{c\}) \cup \{d\})$, stąd jest to zbiór generatorów. Jest to także zbiór wolny na mocy Lematu 2. Oczywiście zbiory $(C \setminus \{c\}) \cup \{d\}$ i C są równoliczne.

Ustawmy teraz elementy A w ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ i, korzystając wielokrotnie z powyższej własności, zamieńmy wszystkie elementy $A \setminus B$ na elementy pochodzące z B. Tak otrzymana baza A' zawiera się w B i jest równoliczna z A. Jednak wobec minimalności (z charakteryzacji bazy) musi zachodzić równość $A' = B$. To kończy dowód przypadku skończonego.

Niech teraz oba zbiory A, B będą nieskończone. Dla każdego elementu $a \in A$ wybierzmy, korzystając z aksjomatu finitarności, taki skończony zbiór $B_a \subseteq B$, że $a \in \operatorname{span}(B_a)$. Wówczas $\bigcup_{a \in A} B_a \subseteq B$. Zauważmy, że inkluzja w drugą stronę też jest prawdziwa. Istotnie, w przeciwnym wypadku właściwy podzbiór B generowałby A, więc także cały matroid. Wobec tego

$$|B| = \left| \bigcup_{a \in A} B_a \right| \leqslant \aleph_0 \cdot |A| = |A|.$$

Analogiczna nierówność zachodzi, jeśli zamienimy rolami A i B, więc $|A| = |B|$. □

Spójrzmy teraz bliżej na zbiory wolne matroidu.

Lemat 4

Rozważmy pewien matroid na zbiorze E. Niech $X \subseteq E$. Wówczas każde dwa maksymalne wolne podzbiory X są równoliczne.

Dowód. Czytelnik zechce przekonać się, że X wraz z operacją rozpięcia $\operatorname{span}_X(Y) = \operatorname{span}(Y) \cap X$ jest matroidem, którego podzbiory wolne to dokładnie wolne podzbiory X (w matroidzie E). Stąd teza lematu wynika z twierdzenia o równoliczności baz. □

Okazuje się, że jeśli zbiór E jest skończony, to wszystkie rodziny podzbiorów spełniające powyższy lemat i zamknięte ze względu na branie podzbiorów są rodzinami zbiorów wolnych pewnego matroidu na E.

Zadanie 9.
Niech K będzie ciałem. Rozważmy zbiór wektorów $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ i każdemu przyporządkujmy nieujemną wagę $w_i = w(v_i) \in \mathbb{R}$. Poszukujemy zbioru wektorów liniowo niezależnych, dla których suma wag będzie maksymalna. Wykazać, że następujący naiwny algorytm daje poprawne rozwiązanie. Ustawmy wektory w kolejności nierosnących wag. Zacznijmy od zbioru $I = \varnothing$. Po kolei przechodzimy po wszystkich wektorach i dodajemy v_i do I wtedy i tylko wtedy, gdy nie zepsuje to liniowej niezależności.

Zauważmy, że na mocy Zadania 7 powyższy wynik dowodzi poprawności prostego algorytmu zachłannego wyznaczającego las rozpinający grafu o najmniejszej sumie wag krawędzi. Algorytm ten nazywa się w informatyce algorytmem Kruskala.

Zadanie 10.
Niech V, W będą takimi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K, że $|V| = |W| > |K|$. Udowodnić, że V i W są izomorficzne, czyli istnieje bijektywne przekształcenie liniowe $\varphi \colon V \to W$.

Rozwiązania

Autor rozwiązań: Michał Mańka.

Zadanie 1.
Udowodnić, że każdy graf spójny G zawiera ścieżkę o $\min\{|V(G)|, 2\delta(G)+1\}$ wierzchołkach, przy czym $\delta(G)$ to najmniejszy stopień wierzchołka w grafie G.

Rozwiązanie:
Wybierzmy najdłuższą ścieżkę $P_{\ell+1} = (v_0, \ldots, v_\ell)$ w tym grafie. Przypuśćmy, że

$$\ell + 1 < \min\{|V(G)|, 2\delta(G)+1\}.$$

Skoro ścieżka $P_{\ell+1}$ jest najdłuższa, to wszyscy sąsiedzi wierzchołków v_0 i v_ℓ leżą na ścieżce $P_{\ell+1}$. Wówczas

$$A = \{0 \leqslant i < l \mid v_{i+1} \text{ jest sąsiadem } v_0\}, \quad B = \{0 \leqslant i < l \mid v_i \text{ jest sąsiadem } v_\ell\}$$

są zbiorami mocy co najmniej $\delta(G)$. Jednak ich suma mnogościowa jest mocy nie większej niż $l < 2\delta(G)$. To oznacza, że mają niepuste przecięcie, czyli powiedzmy $m \in A \cap B$. Wówczas wierzchołki

$$v_{m+1},\ \ldots,\ v_l,\ v_m,\ v_{m-1},\ \ldots,\ v_0$$

tworzą cykl. W ten sposób znaleźliśmy dłuższą ścieżkę wbrew maksymalności $P_{\ell+1}$.

Zadanie 2.
Niech G będzie takim grafem o n wierzchołkach, że stopień każdego wierzchołka jest równy co najmniej $n/2-1$. Wykazać, że w grafie G znajdują się dwie rozłączne ścieżki zawierające wszystkie wierzchołki grafu.

Rozwiązanie:
Dla $n = 1$ teza zachodzi, wystarczy rozważyć pustą ścieżkę oraz ścieżkę z jednego wierzchołka. Dalej rozważamy $n \geqslant 2$. Dodajmy do grafu dwa wierzchołki połączone ze wszystkimi dotychczasowymi wierzchołkami, aby otrzymać graf G'. Wówczas dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ mamy

$$\deg_{G'}(v) \geqslant \frac{n}{2} - 1 + 2 = \frac{n+2}{2} = \frac{V(G')}{2}.$$

Ponadto dla każdego $v \in G \setminus G'$ otrzymujemy $\deg(v) = n \geqslant (n+2)/2 = |V(G')|/2$. Zatem z twierdzenia Diraca, które jest wnioskiem z dowodu poprzedniego zadania, graf G' jest hamiltonowski. Cofamy się do grafu G i otrzymujemy poszukiwane rozłączne ścieżki.

Zadanie 3.
Niech T będzie dowolnym drzewem o k wierzchołkach. Udowodnić, że każdy graf G o n wierzchołkach mający co najmniej $(k-1)n$ krawędzi zawiera T jako podgraf.

Rozwiązanie:
Będziemy potrzebowali poniższej obserwacji

Lemat 5

Średnim stopniem grafu G nazwiemy liczbę m taką, że $m = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$. Wtedy każdy niepusty graf o średnim stopniu m ma podgraf H, dla którego $\delta(H) \geqslant m/2$.

Dla dowodu tego lematu wystarczy kolejno usuwać wierzchołki o stopniu nie spełniającym żądanej nierówności.

Wybierzmy więc podgraf H postulowany w lemacie. Jego minimalny stopień wyniesie co najmniej

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2(k-1)}{n} = k - 1.$$

Teraz w tym podgrafie zachłannie wskazujemy drzewo T.

Zadanie 4.
Ustalmy dodatnią liczbę całkowitą ℓ i rozważmy graf dwudzielny między zbiorami wierzchołków A i B. Załóżmy, że dla każdego $S \subseteq A$ co najmniej $\ell|S|$ wierzchołków ze zbioru B ma sąsiada w zbiorze S. Udowodnić, że dla każdego wierzchołka $a \in A$ można dobrać taki ℓ-elementowy zbiór jego sąsiadów B_a, że wybrane zbiory będą parami rozłączne.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf, w którym każdy wierzchołek ze zbioru A występuje w ℓ kopiach i oznaczmy ten zbiór kopii jako A'. Wybierzmy zbiór $S \subseteq A'$. Elementy zbioru S pochodzą od co najmniej $\lceil |S|/l \rceil$ wierzchołków ze zbioru A i w takim razie co najmniej $\ell \lceil |S|/\ell \rceil \geqslant |S|$ wierzchołków ze zbioru B ma sąsiada w zbiorze S. Wobec tego tak utworzony graf spełnia warunek twierdzenia Halla, co kończy dowód.

Zadanie 5.
W Wydziałowym Turnieju Piłkarzyków wzięło udział $2n$ drużyn. Terminarz spotkań był tak ułożony, że każdego spośród $2n-1$ dni turnieju każda drużyna zagrała jeden mecz, a w ciągu całego turnieju każde dwie różne drużyny zagrały ze sobą dokładnie raz i żaden mecz nie zakończył się remisem. Udowodnić, że dla każdego dnia turnieju da się tak wybrać jedną drużynę, która tego dnia wygrała, aby żadnej drużyny nie wybrać więcej niż raz.

Rozwiązanie:
Rozważmy narzucający się graf dwudzielny między zbiorami wierzchołków T i D, przy czym T to zbiór drużyn, a D to zbiór dni. Tworzymy krawędź pomiędzy wierzchołkami $t \in T$ oraz $d \in D$, gdy drużyna t wygrała w dniu d. W tym grafie nie możemy bezpośrednio użyć twierdzenia Halla, dlatego dodajmy do grafu wierzchołek $h \in D$ połączony ze wszystkimi drużynami. Wówczas, gdy wybierzemy podzbiór $S \subseteq T$, okaże się, że drużyny ze zbioru S potrzebowały co najmniej $|S|-1$ dni, żeby rozegrać wszystkie mecze pomiędzy sobą. W każdym z tych dni ktoś wygrał, czyli mamy $|S|-1$ wierzchołków w zbiorze D mających sąsiada w zbiorze S. Dodatkowy wierzchołek h daje nam warunek twierdzenia Halla dla grafu z dodatkowym wierzchołkiem.

Na mocy twierdzenia Halla otrzymujemy skojarzenie zawierające wszystkie drużyny, a więc także wszystkie dni. Po usunięciu ze skojarzenia wierzchołka h odpowiada ono przyporządkowaniu zgodnemu z warunkami zadania.

Zadanie 6.
Jednostkowe sześciany przerabia się na koraliki, wiercąc w każdym z nich otwór wzdłuż jednej z przekątnych bryły. Koraliki nawleka się na sznurek w taki sposób, że mogą się one swobodnie poruszać w przestrzeni, z tym ograniczeniem, że wierzchołki dwóch sąsiednich sześcianów stykają się ze sobą.

Niech A oznacza wierzchołek początkowy sznurka, a B – wierzchołek końcowy. Na sznurku znajduje się dokładnie $p \times q \times r$ sześcianów, przy czym $p, q, r \geqslant 1$.

(a) Wyznaczyć wszystkie trójki liczb (p, q, r), dla których możliwe jest ułożenie tych sześcianów w prostopadłościan o wymiarach $p \times q \times r$.

(b) Odpowiedzieć na to samo pytanie przy dodatkowym założeniu, że $A = B$, czyli początek i koniec sznurka pokrywają się.

Rozwiązanie:
W punkcie (a) odpowiedź jest zawsze twierdząca, natomiast w punkcie (b) odpowiedź jest twierdząca wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej dwie z liczb p, q, r są parzyste.

Rozważmy prostopadłościan $P = [0, p] \times [0, q] \times [0, r] \cap \mathbb{Z}^3$ i ustalmy jedną z czterech par klas parzystości

$$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z), \quad (\varepsilon_x + 1, \varepsilon_y + 1, \varepsilon_z + 1),$$

przy czym $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \in \{0, 1\}$, a dodawanie odbywa się modulo 2. Zdefiniujmy graf G, którego wierzchołkami są wszystkie punkty kratowe prostopadłościanu P należące do tych dwóch klas, a krawędziami są pary punktów różniących się o $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Każdemu sześcianowi jednostkowemu w P odpowiada dokładnie jedna taka przekątna bryły, więc dokładnie jedna krawędź. Zatem ułożenie koralików zgodnie z punktem (a) odpowiada przejściu po wszystkich krawędziach grafu G dokładnie raz, czyli ścieżce Eulera. Warunek w (b) odpowiada cyklowi Eulera.

Zauważmy, że graf G jest spójny. Istotnie, zawsze można w dwóch krokach zmienić jedną wybraną współrzędną o 2, nie zmieniając pozostałych dwóch. Zatem w każdej z klas wszystkie wierzchołki są połączone. Ponadto wierzchołki $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ i $(\varepsilon_x + 1, \varepsilon_y + 1, \varepsilon_z + 1)$ (dodawanie modulo 2) należą do różnych klas i są połączone krawędzią.

Czytelnik zechce przekonać się, że stopień wierzchołka $v = (x, y, z)$ jest nieparzysty wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \{0, p\}$, $y \in \{0, q\}$ oraz $z \in \{0, r\}$, czyli gdy v jest narożem prostopadłościanu P.

Każde z ośmiu naroży prostopadłościanu należy do jednej z czterech par klas parzystości. Wobec tego możemy tak dobrać $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, aby co najwyżej dwa naroża należały do zbioru wierzchołków grafu G. Wtedy graf G ma co najwyżej dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, a więc na mocy twierdzenia Eulera posiada ścieżkę Eulera.

W punkcie (b) potrzebujemy wskazać parę klas parzystości, do której nie należą żadne naroża prostopadłościanu P. Jeśli co najmniej dwie z liczb p, q, r są parzyste, to naroża należą do co najwyżej dwóch różnych par klas parzystości. Jeśli jednak co najmniej dwie z nich są nieparzyste, to bez trudu dla każdej z czterech par klas parzystości wskazujemy naroże do niej należące. To kończy dowód.

Zadanie 7.
Niech $G = (V, E)$ będzie skończonym grafem o n wierzchołkach. Ustalmy dowolne ciało K. Udowodnić, że istnieje injekcja $\varphi\colon E \to K^n$ o następującej własności. Podzbiór $F \subseteq E$ nie zawiera cyklu wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wektorów $\varphi(F)$ jest liniowo niezależny.

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności załóżmy, że zbiór wierzchołków to $\{1, 2, \dots, n\}$. Niech

$$\varphi((i, j)) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$$

dla $i < j$, przy czym niezerowe są tylko i-ta oraz j-ta współrzędna. Jeśli C jest cyklem, to oczywiście zbiór $\varphi(C)$ jest liniowo zależny, ponieważ wystarczy zsumować odpowiadające jego krawędziom wektory z właściwymi znakami. Załóżmy teraz, że parami różne krawędzie $e_1, \dots, e_\ell$ spełniają równość

$$a_1\varphi(e_1) + \dots + a_\ell\varphi(e_\ell) = 0$$

dla $a_i \in K$ nie wszystkich równych 0. Rozważmy dowolny wierzchołek $a \in V$. Jeżeli pewna krawędź e_i jest incydentna z a, to musi również istnieć krawędź $e_j \neq e_i$ incydentna z a. Wobec tego podgraf o krawędziach $e_1, \dots, e_\ell$ nie może być lasem, ponieważ nie ma wierzchołków stopnia 1. Zatem możemy wskazać cykl w tym podgrafie, co kończy dowód.

Zadanie 8.
Wskazać takie ciało K, dodatnią liczbę całkowitą m i skończony podzbiór $A \subseteq K^m$, że nie istnieje graf G o nie więcej niż m wierzchołkach wraz z injekcją φ jak w Zadaniu 7, taką że $\varphi(E) = A$.

Rozwiązanie:
Wystarczy wybrać zbiór składający się z dwóch liniowo zależnych wektorów nad K. Musiałyby one tworzyć cykl długości dwa – sprzeczność.

Zadanie 9.
Niech K będzie ciałem. Rozważmy zbiór wektorów $v_1, \dots, v_m \in K^n$ i każdemu przyporządkujmy nieujemną wagę $w_i = w(v_i) \in \mathbb{R}$. Poszukujemy zbioru wektorów liniowo niezależnych, dla których suma wag będzie maksymalna. Wykazać, że następujący naiwny algorytm daje poprawne rozwiązanie. Ustawmy wektory w kolejności nierosnących wag. Zacznijmy od zbioru $I = \varnothing$. Po kolei przechodzimy po wszystkich wektorach i dodajemy v_i do I wtedy i tylko wtedy, gdy nie zepsuje to liniowej niezależności.

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności niech $w(v_1) \geqslant w(v_2) \geqslant \dots \geqslant w(v_m)$. Dla $1 \leqslant \ell \leqslant m$ rozważmy

$$E_\ell = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\},$$

Załóżmy, że w wyniku działania algorytmu otrzymaliśmy zbiór I i niech J będzie dowolnym zbiorem liniowo niezależnym. Zauważmy, że dla każdego ℓ zachodzi

$$|E_\ell \cap I| \geqslant |E_\ell \cap J|.$$

Istotnie, zbiór $E_\ell \cap I$ jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem E_ℓ, a $E_\ell \cap J$ jest liniowo niezależny, więc wniosek ten wynika z Lematu 4. Niech $w_{m+1} = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned}\sum_{v_i \in I} w_i &= \sum_{\ell=1}^{m} |E_\ell \cap I|(w_\ell - w_{\ell+1}) \\ &\geqslant \sum_{\ell=1}^{m} |E_\ell \cap J|(w_\ell - w_{\ell+1}) = \sum_{v_i \in J} w_i,\end{aligned}$$

co było do wykazania.

Zadanie 10.
Niech V, W będą takimi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K, że $|V| = |W| > |K|$. Udowodnić, że V i W są izomorficzne, czyli istnieje bijektywne przekształcenie liniowe $\varphi\colon V \to W$.

Rozwiązanie:
Przede wszystkim chcemy pokazać, że V i W są tego samego wymiaru. Przez wymiar rozumiemy kardynalność dowolnej bazy przestrzeni wektorowej. Niech B będzie bazą przestrzeni V. Istnieje naturalna bijekcja pomiędzy zbiorem funkcji z B w K, które są niezerowe tylko na skończenie wielu elementach, a zbiorem V.

Gdy B jest skończona, powiedzmy $|B| = n$, to po prostu $|V| = |K|^n$. Jeśli ciało K byłoby nieskończone, to dla każdego dodatniego skończonego n mielibyśmy $|K|^n = |K|$, co przeczyłoby założeniu $|V| > |K|$. Zatem w tym przypadku ciało K musi być skończone. Wtedy także W jest zbiorem skończonym, a więc ma bazę skończoną, powiedzmy $|C| = m$. Otrzymujemy

$$|K|^n = |V| = |W| = |K|^m.$$

Ponieważ $|K| \geqslant 2$, funkcja $t \mapsto |K|^t$ jest różnowartościowa na liczbach naturalnych, więc $n = m$. W szczególności V i W mają ten sam wymiar.

Analogicznie jak wyżej moglibyśmy rozumować, gdyby baza W była skończona, więc dalej możemy założyć, że obie przestrzenie są nieskończenie wymiarowe. Niech F_n oznacza zbiór funkcji $f\colon B \to K$, które są niezerowe na dokładnie n elementach. Wówczas

$$|V| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right|.$$

Każda funkcja z F_n jest wyznaczona przez skończony zbiór n par postaci (b, x), przy czym $b \in B$ oraz $x \in K\setminus\{0\}$, więc $|F_n| \leqslant |(B \times K)^n|$. Ponieważ zbiór $B \times K$ jest nieskończony, mamy $|(B \times K)^n| = |B \times K| = \max\{|B|, |K|\}$ dla każdego $n \geqslant 1$. Stąd

$$|V| \leqslant \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \times K)^n\right| \leqslant \aleph_0 \cdot \max\{|B|, |K|\} = \max\{|B|, |K|\}.$$

Z drugiej strony oczywiście $B \subseteq V$, więc $|B| \leqslant |V|$. Ponadto dla każdego niezerowego $b \in B$ możemy wskazać injekcję $K \to V$ daną wzorem $\lambda \mapsto \lambda b$, a zatem także $|K| \leqslant |V|$. Wobec tego

$$|V| = \max\{|B|, |K|\}.$$

Z założenia $|V| > |K|$ wynika równość $|V| = |B|$.

Analogicznie dla dowolnej bazy C przestrzeni W dostajemy $|W| = |C|$. Ponieważ zaś $|V| = |W|$, otrzymujemy $|B| = |C|$, czyli V i W mają ten sam wymiar. Teraz wystarczy dobrać dowolne dwie bazy, znaleźć bijekcję pomiędzy nimi, a ona w naturalny sposób przedłuży się do liniowej bijekcji pomiędzy V i W.

Ciągi jednomonotoniczne

Filip Manijak

Teoria

Definicja (Ciągi jednomonotoniczne)

Powiemy, że ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są *tej samej monotoniczności* (*jednomonotoniczne*), jeśli dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność

$$(a_i - a_j) \cdot (b_i - b_j) \geqslant 0.$$

W szczególności ciągi są tej samej monotoniczności, jeśli oba są nierosnące/niemalejące.

Definicja (Ciągi przeciwnej monotoniczności)

Powiemy, że ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są *przeciwnej monotoniczności*, jeśli dla wszystkich $i, j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ zachodzi nierówność

$$(a_i - a_j) \cdot (b_i - b_j) \leqslant 0.$$

W szczególności ciągi są przeciwnej monotoniczności, jeśli jeden z nich jest nierosnący, a drugi – niemalejący.

Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych (ang. rearrangement inequality)

Jeśli ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są **tej samej monotoniczności** oraz ciąg $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ stanowi permutację ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, to zachodzą nierówności

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b'_1 + \cdots + a_nb'_n \geqslant a_1b_n + \cdots + a_nb_1.$$

Lewa nierówność uogólnia się dla więcej niż 2 ciągów, o ile tylko wszystkie wyrazy ciągów są nieujemne. Jeśli ciągi (a_i) i (b_i) są **przeciwnej monotoniczności**, to powyższe nierówności zachodzą z przeciwnym zwrotem.

Twierdzenie (Nierówność Czebyszewa)

Jeżeli ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są **jednomonotoniczne**, to zachodzi nierówność

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

Jeśli ciągi są przeciwnej monotoniczności, to nierówność zachodzi z przeciwnym zwrotem.

Rozgrzewka

Zadanie 1.
Udowodnić, że

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant a_1a_2 + \cdots + a_na_1.$$

Zadanie 2.
Dane są $a, b > 0$. Udowodnić, że

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geqslant a^2 + b^2.$$

Zadanie 3. (2 OM, III etap, zadanie 3)
Niech $a, b, c > 0$. Udowodnić, że

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geqslant 6abc.$$

Zadania

Zadanie 4. (14 OM, I etap, zadanie 10)
Dane są liczby $a, b, c > 0$. Udowodnić, że

$$a+b+c \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

Zadanie 5.
Niech $a, b, c > 0$. Udowodnić, że:

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{(abc)^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Zadanie 6.
Udowodnić nierówność Czebyszewa.

Zadanie 7. (20 OM, I etap, zadanie 5)
Udowodnić, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $a, b > 0$ i liczby całkowitej $n \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Zadanie 8.
Niech w trójkącie ABC liczby h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych odpowiednio na boki długości a, b, c. Udowodnić, że

$$(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) \geqslant 18[ABC].$$

Zadanie 9.
Udowodnić, że dla wszystkich $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{a+c} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{a+c}.$$

Zadanie 10.
Wykazać, że jeżeli $a < b < c < d$, to

$$(a+b+c+d)^2 \geqslant 8(ad+bc).$$

Zadanie 11.
Niech $n \geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_n > 0$ oraz $S = a_1 + \cdots + a_n$. Udowodnić, że

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Zadanie 12.
Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają $a_1 + \cdots + a_{2137} = 2137$. Udowodnić, że:

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \cdots + \frac{a_{2137}^3}{a_1} \geqslant 2137.$$

Zadanie 13.
Wykazać dla wszystkich $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqslant 3\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+c}\right).$$

Zadanie 14. (37 OM, I etap, zadanie 2)
Niech $x, y, z \geqslant 0$ spełniają $x + y + z = 1$. Wykazać, że

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Zadanie 15.
Wykazać, że dla wszystkich liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ac}{a+c} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant a+b+c.$$

Zadanie 16.
Wykazać, że dla wszystkich liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}.$$

Zadanie 17.
Niech $a, b, c > 0$. Udowodnić, że

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Zadanie 18.
Dany jest trójkąt ostrokątny opisany na okręgu o promieniu r. Wykazać, że suma odległości ortocentrum tego trójkąta od jego boków jest nie większa od $3r$.

Zadanie 19.
Ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełnia warunki $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ oraz $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1$. Udowodnić, że zachodzi nierówność

$$\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n} \geqslant (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Adam Tutkowski*, Karol Musieliński.

Zadanie 1.
Udowodnić, że

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant a_1a_2 + \cdots + a_na_1.$$

Rozwiązanie:
Ciągi (a_n) i (a_n) są oczywiście tej samej monotoniczności. Zatem na mocy twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant a_1a_2 + \cdots + a_na_1,$$

co było do wykazania.

Zadanie 2.
Dane są $a, b > 0$. Udowodnić, że

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geqslant a^2 + b^2.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że teza zadania jest równoważna nierówności

$$a^4 + b^4 \geqslant a^3b + b^3a.$$

Rozważmy ciągi (a^3, b^3) oraz (a, b) i zauważmy, że są tej samej monotoniczności. Wówczas z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych

$$a^4 + b^4 = a^3 \cdot a + b^3 \cdot b \geqslant a^3b + b^3a,$$

co kończy dowód.

Zadanie 3. (2 OM, III etap, zadanie 3)
Niech $a, b, c > 0$. Udowodnić, że

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant 6abc.$$

Rozwiązanie:
Po wymnożeniu otrzymujemy równoważną nierówność

$$ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a \geqslant 6abc.$$

Załóżmy bez straty ogólności, że $a \geqslant b \geqslant c$. Rozważmy ciągi

$$x = (ab,\ ab,\ ac,\ ac,\ bc,\ bc), \quad y = (c,\ c,\ b,\ b,\ a,\ a).$$

Zauważmy, że ciągi te są przeciwnej monotoniczności, czyli z twierdzenia o ciągach przeciwnie monotonicznych zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a &= x_1y_3 + x_2y_5 + x_5y_4 + x_6y_1 + x_3y_6 + x_4y_2 \\ &\geqslant x_1y_1 + \cdots + x_6y_6 = 6abc, \end{aligned}$$

co należało wykazać.

Zadanie 4. (14 OM, I etap, zadanie 10)
Dane są liczby $a, b, c > 0$. Udowodnić, że

$$a + b + c \leqslant \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

Rozwiązanie:
Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a \geqslant b \geqslant c$. Wtedy ciągi (a^2, b^2, c^2), (a, b, c), (a, b, c) są zgodnie monotoniczne, więc z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych uogólnionego dla trzech ciągów mamy

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2,$$

co jest równoważne tezie.

Zadanie 5.
Niech $a, b, c > 0$. Udowodnić, że:
$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{(abc)^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności niech $a \geqslant b \geqslant c$. Rozważmy ciągi (a^2, b^2, c^2), (a^3, b^3, c^3), (a^3, b^3, c^3) i zauważmy, że są tej samej monotoniczności. Zatem
$$a^8 + b^8 + c^8 \geqslant a^2b^3c^3 + a^3b^2c^3 + a^3b^3c^2,$$
co jest równoważne tezie.

Zadanie 6.
Udowodnić nierówność Czebyszewa.

Rozwiązanie:
Na mocy twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych prawdziwe są nierówności
$$\begin{gathered}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1, \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2, \\
\vdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}.
\end{gathered}$$
W k-tym wierszu rozważamy permutację ciągu (b_n) powstałą przez cykliczne przesunięcie o k pozycji.

Po dodaniu powyższych nierówności stronami otrzymujemy
$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$
co kończy dowód.

Zadanie 7. (20 OM, I etap, zadanie 5)
Udowodnić, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $a, b > 0$ i liczby całkowitej $n \geqslant 0$ zachodzi nierówność
$$\frac{a^n + b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Rozwiązanie:
Dowód przeprowadzamy indukcyjnie względem n. Przypadek $n = 0$ jest trywialny.

Załóżmy, że nierówność zachodzi dla pewnego $n \geqslant 0$. Bez straty ogólności niech $a \geqslant b$, wtedy ciągi (a^n, b^n) i (a, b) są jednomonotoniczne. Wówczas z nierówności Czebyszewa otrzymujemy:
$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2} \geqslant \frac{a^n + b^n}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1},$$
przy czym ostatnia nierówność zachodzi na mocy założenia indukcyjnego. To kończy dowód.

Zadanie 8.
Niech w trójkącie ABC liczby h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych odpowiednio na boki długości a, b, c. Udowodnić, że
$$(a + b + c)(h_a + h_b + h_c) \geqslant 18[ABC].$$

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności niech $a \geqslant b \geqslant c$. Zauważmy, że
$$ah_a = bh_b = ch_c = 2[ABC],$$
więc ciągi (a, b, c) i (h_a, h_b, h_c) są przeciwnie monotoniczne. Zatem na mocy nierówności Czebyszewa
$$2[ABC] = \frac{ah_a + bh_b + ch_c}{3} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{h_a + h_b + h_c}{3},$$
co jest równoważne tezie.

Zadanie 9.
Udowodnić, że dla wszystkich $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{a+c} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geqslant \frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{a+c}.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b + c \geqslant c + a$, a stąd

$$(a-b)\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a}\right) \geqslant 0.$$

Wobec tego ciągi

$$(a, b, c), \quad (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}), \quad \left(\tfrac{1}{b+c}, \tfrac{1}{a+c}, \tfrac{1}{a+b}\right)$$

są tej samej monotoniczności i teza wynika z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych.

Zadanie 10.
Wykazać, że jeżeli $a < b < c < d$, to

$$(a+b+c+d)^2 \geqslant 8(ad+bc).$$

Rozwiązanie:
Ciągi (a, b, c, d) i (d, c, b, a) są przeciwnie monotoniczne, więc z nierówności Czebyszewa

$$\frac{a+b+c+d}{4} \cdot \frac{d+c+b+a}{4} \geqslant \frac{ad+bc+cb+da}{4},$$

$$\text{czyli} \quad \frac{(a+b+c+d)^2}{16} \geqslant \frac{ad+bc}{2}.$$

Ostatnia nierówność jest równoważna tezie.

Zadanie 11.
Niech $n \geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_n > 0$ oraz $S = a_1 + \cdots + a_n$. Udowodnić, że

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Rozwiązanie:
Załóżmy bez straty ogólności, że $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Wtedy $S - a_1 \leqslant \cdots \leqslant S - a_n$, czyli

$$\frac{1}{S-a_1} \geqslant \frac{1}{S-a_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{S-a_n}.$$

Zatem na mocy nierówności Czebyszewa

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{S-a_1} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n}\right) &\geqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{S-a_1} + \frac{1}{S-a_2} + \cdots + \frac{1}{S-a_n}\right) \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{S}{S-a_1} + \frac{S}{S-a_2} + \cdots + \frac{S}{S-a_n}\right) = \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} + n\right).\end{aligned}$$

Po pomnożeniu przez n^2 mamy

$$n \cdot \left(\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n}\right) \geqslant \frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} + n,$$

co jest równoważne tezie.

Zadanie 12.
Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniają $a_1 + \dots + a_{2137} = 2137$. Udowodnić, że:

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \dots + \frac{a_{2137}^3}{a_1} \geqslant 2137.$$

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności niech $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_{2137}$. Wtedy

$$a_1^3 \geqslant a_2^3 \geqslant \dots \geqslant a_{2137}^3$$

oraz

$$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{a_2} \leqslant \dots \leqslant \frac{1}{a_{2137}}.$$

Powyższe ciągi są więc przeciwnej monotoniczności, stąd zachodzi nierówność

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \dots + \frac{a_{2137}^3}{a_1} \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2137}^2.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza

$$\left(\sum_{k=1}^{2137} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2137} 1^2\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{2137} a_k\right)^2,$$

więc $\sum_{k=1}^{2137} a_k^2 \geqslant 2137$. To kończy dowód.

Zadanie 13.
Wykazać dla wszystkich $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqslant 3\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+c}\right).$$

Rozwiązanie:
Załóżmy bez straty ogólności, że $a \geqslant b \geqslant c$. Wtedy

$$\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{1}{a+b}$$

oraz ciągi

$$\left(\frac{a^2}{b+c}, \frac{b^2}{a+c}, \frac{c^2}{a+b}\right), \quad \left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right)$$

są przeciwnej monotoniczności. Zatem na mocy nierówności Czebyszewa

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a+c} \cdot \frac{1}{b^2} + \frac{c^2}{a+b} \cdot \frac{1}{c^2}\right) \leqslant \frac{1}{9}\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Po uproszczeniu lewej strony i pomnożeniu przez 9 otrzymujemy tezę.

Zadanie 14. (37 OM, I etap, zadanie 2)
Niech $x, y, z \geqslant 0$ spełniają $x + y + z = 1$. Wykazać, że

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że teza jest równoważna kolejno nierównościom

$$\frac{4x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{4z}{z+1} \leqslant 3 = \frac{x+(x+y+z)}{x+1} + \frac{y+(x+y+z)}{y+1} + \frac{z+(x+y+z)}{z+1},$$

$$3\left(\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}\right) \leqslant (x+y+z)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right),$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}\right) \leqslant \frac{x+y+z}{9}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right).$$

Bez straty ogólności niech $x \geqslant y \geqslant z$. Wówczas ciągi

$$\left(\frac{1}{x+1}, \frac{1}{y+1}, \frac{1}{z+1}\right), \quad (x,\ y,\ z)$$

są przeciwnie monotoniczne. Zatem ostatnia nierówność wynika wprost z nierówności Czebyszewa.

Zadanie 15.
Wykazać, że dla wszystkich liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ac}{a+c} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant a+b+c.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że ciągi

$$\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right), \quad (a^2, b^2, c^2)$$

są tej samej monotoniczności. Zatem

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a},$$

więc

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ac}{a+c} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant \frac{a^2+ab}{a+b} + \frac{b^2+bc}{b+c} + \frac{c^2+ca}{c+a} = a+b+c,$$

co było do wykazania.

Zadanie 16.
Wykazać, że dla wszystkich liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}.$$

Rozwiązanie:
Czytelnik zechce sprawdzić, że ciągi

$$(a+b,\ b+c,\ c+a), \quad \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{bc}{b+c}, \frac{ca}{c+a}\right)$$

są jednomonotoniczne. Wobec tego z nierówności Czebyszewa

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{9}\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right) \leqslant \frac{ab+bc+ca}{3},$$

co jest równoważne tezie.

Zadanie 17.
Niech $a, b, c > 0$. Udowodnić, że
$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że teza jest równoważna
$$a\ln a + b\ln b + c\ln c = \ln\left(a^a b^b c^c\right) \geqslant \ln\left((abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\right) = \frac{a+b+c}{3}\left(\ln a + \ln b + \ln c\right).$$
Powyższa nierówność jest konsekwencją nierówności Czebyszewa dla jednomonotonicznych ciągów
$$(a, b, c) \quad \text{i} \quad (\ln a, \ln b, \ln c).$$

Zadanie 18.
Dany jest trójkąt ostrokątny opisany na okręgu o promieniu r. Wykazać, że suma odległości ortocentrum tego trójkąta od jego boków jest nie większa od $3r$.

Rozwiązanie:
Niech a, b, c będą długościami boków rozważanego trójkąta, A, B, C jego wierzchołkami, a d_a, d_b, d_c odległościami ortocentrum od odpowiednich boków. Udowodnimy, że ciągi
$$(d_a,\ d_b,\ d_c), \quad \text{oraz} \quad (a,\ b,\ c)$$
są jednomonotoniczne. W tym celu zauważymy, że z twierdzenia sinusów
$$\begin{aligned} a &= 2R\sin\sphericalangle A,\\ b &= 2R\sin\sphericalangle B,\\ c &= 2R\sin\sphericalangle C,\\ d_a &= 2R\cos\sphericalangle B\cos\sphericalangle C,\\ d_b &= 2R\cos\sphericalangle A\cos\sphericalangle C,\\ d_c &= 2R\cos\sphericalangle A\cos\sphericalangle B, \end{aligned}$$
przy czym R to promień okręgu opisanego. Wówczas
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\sphericalangle A}{\sin\sphericalangle B}, \quad \frac{d_a}{d_b} = \frac{\cos\sphericalangle B}{\cos\sphericalangle A}.$$
Zatem jeśli $a \geqslant b$, to $\sin\sphericalangle A \geqslant \sin\sphericalangle B$. Stąd $\cos\sphericalangle A \leqslant \cos\sphericalangle B$, ponieważ trójkąt jest ostrokątny, co daje $d_a \geqslant d_b$. Analogicznie dla pozostałych par zmiennych.

Z nierówności Czebyszewa dla tych ciągów otrzymujemy
$$\frac{d_a+d_b+d_c}{3}\cdot\frac{a+b+c}{3} \leqslant \frac{ad_a+bd_b+cd_c}{3} = \frac{2[ABC]}{3} = \frac{(a+b+c)r}{3}.$$
Stąd oczywiście $d_a+d_b+d_c \leqslant 3r$, co było do wykazania.

Zadanie 19.
Ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spełnia warunki $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ oraz $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1$. Udowodnić, że zachodzi nierówność
$$\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n} \geqslant (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right).$$

Rozwiązanie:
Przypadek $n = 1$ jest trywialny. Dalej niech $n \geqslant 2$. Zauważmy, że teza jest równoważna
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x_k}{\sqrt{x_k}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right) \geqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}},$$
a także równoważna nierówności
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x_k}{\sqrt{x_k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}\right) \geqslant n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}$$
wobec założenia $\frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1$.

Rozważmy ciągi

$$\left(\frac{1+x_k}{\sqrt{x_k}}\right) \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{1}{1+x_k}\right).$$

Drugi ciąg jest oczywiście nierosnący. Wykażemy teraz, że pierwszy ciąg jest niemalejący. Czytelnik zechce sprawdzić, że funkcja $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$$

jest malejąca dla $x \leqslant 1$ i rosnąca dla $x \geqslant 1$. Zatem jeśli $x_1 \geqslant 1$, to oczywiście ciąg $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ jest niemalejący. Jeśli jednak $x_1 < 1$, to

$$\frac{1}{1+x_2} \leqslant 1 - \frac{1}{1+x_1} = \frac{x_1}{1+x_1},$$

co daje $x_2 \geqslant 1/x_1 > 1$. Pozostało zauważyć, że $f(1/x_1) = f(x_1)$, więc $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

Wobec powyższego rozważane ciągi są przeciwnej monotoniczności i nierówność Czebyszewa daje

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x_k}{\sqrt{x_k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}},$$

co kończy dowód.

Metody probabilistyczne

Jacek Jakimiuk

Teoria

Zakładam, że szkolne podstawy są znane, więc tylko dla ustalenia notacji przywołam definicję przestrzeni probabilistycznej (tylko dyskretnej, nie wyjdziemy poza skończony przypadek). Warto sobie przypomnieć, czym jest niezależność zdarzeń.

Definicja (Dyskretna przestrzeń probabilistyczna)

Dyskretną przestrzenią probabilistyczną nazywamy parę (Ω, p), gdzie Ω jest zbiorem skończonym, a $p\colon \Omega \to [0,1]$ spełnia $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$. Podzbiory $A \subset \Omega$ nazywamy zdarzeniami i definiujemy ich prawdopodobieństwo jako $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$.

Tym, czego w szkole nie uczą (przynajmniej nie uczyli u mnie, staszice są proszone o nieprotestowanie), a co równocześnie przesądza o tym, że metoda probabilistyczna w kombinatoryce to coś więcej niż skalowanie sum do 1, są zmienne losowe.

Definicja (Zmienna losowa)

Zmienną losową nazywamy funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Dla podzbioru $A \subset \mathbb{R}$ przyjmujemy notację

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \mid X(\omega) \in A\}).$$

Definicja (Wartość oczekiwana)

Wartość oczekiwaną (wartość średnią) zmiennej losowej $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definiujemy jako

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega).$$

Twierdzenie (Liniowość wartości oczekiwanej)

Dla każdej pary zmiennych losowych X, Y i stałych a, b zachodzi

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Wobec definicji powyżej zależność ta jest oczywista, ale odnotowujemy ją, ponieważ jej konsekwencje są absolutnie magiczne. Przekonamy się o tym podczas rozwiązywania zadań. Można zdefiniować więcej parametrów zmiennej losowej niż tylko wartość oczekiwaną, ale na razie to sobie darujemy, ponieważ już sama średnia otwiera duże możliwości.

Na zaprezentowanie technik pozwalających użyć powyższych narzędzi w zadaniach nie ma lepszego sposobu niż po prostu przetrenować je na przykładach. Aby dać pewien punkt wyjścia, dam kilka dobrych rad na początek.

- Aby udowodnić, że istnieje obiekt spełniający daną własność, wystarczy wykazać, że prawdopodobieństwo wylosowania obiektu spełniającego tę własność jest dodatnie.
- Zawsze istnieje obiekt, na którym zmienna losowa przyjmuje wartość nie mniejszą od wartości oczekiwanej.
- W metodach probabilistycznych często sprawdza się metoda *dziel i rządź*. Warto zdarzenia przedstawić za pomocą prostszych zdarzeń, dla których umiemy liczyć prawdopodobieństwo, a potem szacować z własności prawdopodobieństwa, albo przedstawić zmienną losową jako sumę prostszych zmiennych, dla których umiemy liczyć średnią, i korzystać z liniowości wartości oczekiwanej.

Zadania

Zadanie 1.
Niech $k \geqslant 3$ i $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$. Udowodnić, że istnieje kolorowanie krawędzi kliki o n wierzchołkach dwoma kolorami nie zawierające monochromatycznej kliki o k wierzchołkach.

Zadanie 2.
W turnieju brało udział n zawodników, każdy zagrał z każdym dokładnie jeden mecz i nie było remisów. Okazało się, że dla każdego zbioru k uczestników turnieju istnieje gracz, który wygrał z każdym z nich. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ istnieje liczba całkowita $n \geqslant 1$ i turniej o tej własności.

Zadanie 3. (Nierówność Bollobása)
Niech $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_m$ będą podzbiorami zbioru skończonego X, przy czym $A_i \cap B_j = \varnothing$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = j$. Połóżmy $a_i = |A_i|$ oraz $b_i = |B_i|$. Udowodnić nierówność

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leqslant 1.$$

Zadanie 4. (IMO Shortlist 2006 C3)
Niech S będzie zbiorem $n \geqslant 3$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe. Dla każdego wielokąta wypukłego P o wierzchołkach w S niech $a(P)$ oznacza liczbę jego wierzchołków, a $b(P)$ – liczbę punktów z S leżących poza P. Udowodnić, że dla każdego $x \in$ zachodzi równość

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

przy czym pierwsza suma przebiega wszystkie wielokąty wypukłe P o (przynajmniej trzech) wierzchołkach w S.

Zadanie 5.
Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach. Udowodnić, że można tak podzielić wierzchołki G na zbiory A, B, że istnieje co najmniej $m/2$ krawędzi o jednym końcu w A i jednym w B.

Zadanie 6.
Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach. Udowodnić, że można tak podzielić wierzchołki G na zbiory A, B, że istnieje co najmniej

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{m}{2}$$

krawędzi o jednym końcu w A i jednym w B.

Zadanie 7.
Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ istnieje turniej zawierający co najmniej $(n-1)!2^{-n}$ cykli Hamiltona.

Zadanie 8.
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem d-regularnym ($d \geqslant 6$) o n wierzchołkach. Udowodnić, że istnieje zbiór $A \subseteq V$ o tej własności, że co najmniej

$$\frac{nd(d-1)}{2(d+1)^3}$$

wierzchołków z A ma dokładnie dwóch sąsiadów należących do A. Graf d-regularny to taki, w którym każdy wierzchołek jest stopnia d.

Zadanie 9.
Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach i niech $d = 2m/n$ będzie średnim stopniem w grafie G oraz $d \geqslant 1$. Udowodnić, że G zawiera zbiór niezależny rozmiaru co najmniej $n/2d$.

Zadanie 10.
Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach i niech $d = 2m/n$ będzie średnim stopniem w grafie G oraz $d \geqslant 1$. Udowodnić, że G zawiera zbiór niezależny rozmiaru co najmniej $n/(d+1)$.

Wariancja

Definicja (Wariancja)

Dla zmiennej losowej X definiujemy jej wariancję jako

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right].$$

Intuicyjnie jest to wielkość mierząca średnie odchylenie zmiennej losowej od jej średniej. Z liniowości wartości oczekiwanej wynika następujący rachunek.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X\mathbb{E}[X]] + \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X])^2\right] = \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2(\mathbb{E}[X])^2 + (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2,\end{aligned}$$

przy czym w drugiej równości użyliśmy tego, że $\mathbb{E}[X]$ jest stałą. Jest to bardzo użyteczna postać wariancji.

Nie będziemy zajmować się kombinatorycznymi zastosowaniami wariancji, bo to dość długi temat, a i tak mamy już mnóstwo zadań do przerobienia. Natomiast w niedawnych edycjach Olimpiady Matematycznej pojawiło się kilka nierówności z probabilistycznym kontekstem i chciałbym tu zaprezentować jeden z ciekawszych przykładów, który wykorzystuje wariancję.

Zadanie 11. (74 OM, I etap, zadanie 11)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = n$. Oznaczmy przez A zbiór tych indeksów $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których $a_i \geqslant 2$. Udowodnić, że

$$n \sum_{i \in A} a_i^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leqslant 4n^2.$$

Rozwiązania

Autor rozwiązań: Jacek Jakimiuk.

Zadanie 1.
Niech $k \geqslant 3$ i $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$. Udowodnić, że istnieje kolorowanie krawędzi kliki o n wierzchołkach dwoma kolorami nie zawierające monochromatycznej kliki o k wierzchołkach.

Rozwiązanie:
Kolorujemy każdą krawędź niezależnie z równym prawdopodobieństwem na czerwono lub niebiesko. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że nie ma monochromatycznej k-kliki. Chcemy wykazać, że $\mathbb{P}(A) > 0$, skąd będzie wynikać teza. Mamy $A = \bigcap_S A_S$, przy czym S przebiega wszystkie k-elementowe podzbiory wierzchołków, a zdarzenie A_S polega na tym, że S nie ma wszystkich krawędzi w jednym kolorze.

Niech $A'_S = \Omega \setminus A_S$. Zauważmy, że $\mathbb{P}(A'_S) = 2^{1-\binom{k}{2}}$, ponieważ spośród wszystkich $2^{\binom{k}{2}}$ kolorowań krawędzi podgrafu indukowanego przez S dokładnie dwa są monochromatyczne. Dalej szacujemy

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_S A'_S\right) \leqslant \sum_S \mathbb{P}(A'_S) = \\ &= \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leqslant \frac{n^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}} \leqslant \frac{2^{k^2/2+1-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla wszystkich $k \geqslant 3$. To kończy dowód.

Zadanie 2.
W turnieju brało udział n zawodników, każdy zagrał z każdym dokładnie jeden mecz i nie było remisów. Okazało się, że dla każdego zbioru k uczestników turnieju istnieje gracz, który wygrał z każdym z nich. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ istnieje liczba całkowita $n \geqslant 1$ i turniej o tej własności.

Rozwiązanie:
Gracza, który pokonał wszystkich zawodników ze zbioru S, nazwiemy *pogromcą* S. Będziemy losować turniej poprzez wzięcie n-kliki i niezależne skierowanie każdej z jej krawędzi z równym prawdopodobieństwem w każdą ze stron. Wystarczy wykazać, że $\mathbb{P}(A) < 1$, gdzie A jest zdarzeniem polegającym na tym, że istnieje zbiór S mocy k, dla którego nie istnieje pogromca.

Mamy $A = \bigcup_S A_S$, przy czym S przebiega zbiory wierzchołków mocy k i zdarzenie A_S polega na tym, że zbiór S nie ma pogromcy. Z kolei $A_S = \bigcap_{v \notin S} A_{S,v}$ po zdefiniowaniu zdarzeń $A_{S,v}$ – v nie jest pogromcą S. Jasnym jest, że $\mathbb{P}(A_{S,v}) = 1 - 2^{-k}$, a ponieważ zdarzenia $A_{S,v}$ przy ustalonym S są niezależne dla wszystkich $v \notin S$, mamy

$$\mathbb{P}(A_S) = \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k}.$$

Wobec tego

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \sum_S \mathbb{P}(A_S) = \binom{n}{k} \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k} < n^k \left(1 - 2^{-k}\right)^{n-k}.$$

Prawa strona przy ustalonym k zbiega do 0 przy n dążącym do nieskończoności (z grubsza dlatego, że funkcje wykładnicze rosną szybciej niż wielomianowe), w szczególności dla dostatecznie dużych n jest mniejsza niż 1. To kończy dowód.

Zadanie 3. (Nierówność Bollobása)
Niech $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_m$ będą podzbiorami zbioru skończonego X, przy czym $A_i \cap B_j = \varnothing$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = j$. Połóżmy $a_i = |A_i|$ oraz $b_i = |B_i|$. Udowodnić nierówność

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Przedstawimy składniki sumy jako prawdopodobieństwa pewnych parami rozłącznych zdarzeń, co automatycznie

da nam tezę. Losujemy permutację X z rozkładu jednostajnego (każda permutacja jest jednakowo prawdopodobna). Niech C_i oznacza zdarzenie polegające na tym, że wszystkie elementy A_i występują w tej permutacji przed wszystkimi elementami B_i. Oczywiście mamy

$$\mathbb{P}(C_i) = \frac{a_i!b_i!}{(a_i+b_i)!} = \binom{a_i+b_i}{a_i}^{-1}.$$

Trzeba tylko wykazać, że zdarzenia C_i są rozłączne. Załóżmy, że $i \neq j$. Niech $x \in A_i \cap B_j$ oraz $y \in A_j \cap B_i$. W permutacjach należących do C_i element x występuje przed y, z kolei w permutacjach z C_j element y występuje przed x. To dowodzi rozłączności i kończy rozwiązanie.

Zadanie 4. (IMO Shortlist 2006 C3)
Niech S będzie zbiorem $n \geqslant 3$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe. Dla każdego wielokąta wypukłego P o wierzchołkach w S niech $a(P)$ oznacza liczbę jego wierzchołków, a $b(P)$ – liczbę punktów z S leżących poza P. Udowodnić, że dla każdego $x \in$ zachodzi równość

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

przy czym pierwsza suma przebiega wszystkie wielokąty wypukłe P o (przynajmniej trzech) wierzchołkach w S.

Rozwiązanie:
Będziemy losować podzbiory S, wrzucając niezależnie punkty z S do losowanego zbioru z prawdopodobieństwem x. Wówczas $x^{a(P)}(1-x)^{b(P)}$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że wylosowany zbiór zawiera wszystkie wierzchołki P i nie zawiera żadnego punktu, który nie należy do P. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy P jest otoczką wypukłą wylosowanego zbioru. Zdarzenia te są rozłączne, ponieważ rozważamy wielokąty wypukłe. Zatem lewa strona dowodzonej tożsamości to prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otoczka wypukła wylosowanego zbioru jest wielokątem wypukłym o co najmniej trzech wierzchołkach. Ponieważ żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej, jest to równoważne temu, że wylosowany zbiór ma co najmniej trzy punkty. Prawdopodobieństwem tego jest oczywiście prawa strona dowodzonej tożsamości.

Wobec powyższych żądana równość zachodzi dla każdego $x \in [0,1]$. Pozostało zauważyć, że obie strony tej równości są wielomianami zmiennej x, które przyjmują równe wartości w nieskończenie wielu punktach. Stąd równość ta zachodzi dla wszystkich $x \in$, co kończy dowód.

Zadanie 5.
Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach. Udowodnić, że można tak podzielić wierzchołki G na zbiory A, B, że istnieje co najmniej $m/2$ krawędzi o jednym końcu w A i jednym w B.

Rozwiązanie:
Będziemy losować podział wierzchołków G poprzez niezależne przydzielanie kolejnych wierzchołków z równym prawdopodobieństwem do A albo do B. Niech X będzie zmienną losową, która podziałowi (A, B) przyporządkowuje liczbę krawędzi między A i B. Wystarczy wykazać, że $\mathbb{E}[X] \geqslant m/2$, ponieważ wtedy będzie istnieć podział, dla którego X przyjmuje nie mniejszą wartość. Zauważmy, że $X = \sum_e X_e$, przy czym suma przebiega wszystkie krawędzie grafu G, a X_e jest zmienną losową, która przyjmuje wartość 1, jeśli krawędź e ma jeden koniec w A i jeden w B, lub 0 w przeciwnym przypadku. Wówczas z liniowości wartości oczekiwanej

$$\mathbb{E}[X] = \sum_e \mathbb{E}[X_e] = \sum_e \mathbb{P}(|e \cap A| = |e \cap B| = 1) = \sum_e \frac{1}{2} = \frac{m}{2},$$

co kończy dowód.

Zadanie 6.
Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach. Udowodnić, że można tak podzielić wierzchołki G na zbiory A, B, że istnieje co najmniej

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{m}{2}$$

krawędzi o jednym końcu w A i jednym w B.

Rozwiązanie:
Zastosujemy technikę z poprzedniego zadania, tylko ją lekko wzmocnimy. Zamiast losować dowolny podział losujemy A z równym prawdopodobieństwem spośród zbiorów wierzchołków o mocy $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Wówczas prawdopodobieństwo, że ustalona krawędź łączy A i B jest równe

$$\frac{2\binom{n-2}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} = \frac{n-k}{2(n-k)-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2(n-k)-1}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Dalej dowód przebiega analogicznie do Zadania 5.

Zadanie 7.
Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ istnieje turniej zawierający co najmniej $(n-1)!2^{-n}$ cykli Hamiltona.

Rozwiązanie:
Losujemy turniej poprzez wzięcie n-kliki i niezależne skierowanie każdej krawędzi, w każdą ze stron z prawdopodobieństwem $1/2$. Ustalmy *cykliczną* (czyli utożsamiamy permutacje różniące się cyklicznym przesunięciem) permutację wierzchołków $(v_1, \ldots, v_n)$. Prawdopodobieństwo, że tworzy ona cykl skierowany wynosi 2^{-n}. Ponadto cyklicznych permutacji jest $(n-1)!$. Rozważmy zmienną losową

$$X = \sum_{(v_1,\ldots,v_n)} X_{(v_1,\ldots,v_n)},$$

przy czym sumujemy po wszystkich cyklicznych permutacjach wierzchołków, a zmienna losowa $X_{(v_1,\ldots,v_n)}$ jest równa 1, jeśli krawędzie między kolejnymi wierzchołkami $v_1, \ldots, v_n$ tworzą skierowany cykl (Hamiltona), lub 0 w przeciwnym wypadku. Zauważmy, że wartość X jest równa liczbie cykli Hamiltona. Otrzymujemy też

$$\mathbb{E}[X] = (n-1)!2^{-n},$$

więc istnieje skierowanie krawędzi, które tworzy co najmniej tyle cykli Hamiltona, co było do wykazania.

Zadanie 8.
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem d-regularnym ($d \geqslant 6$) o n wierzchołkach. Udowodnić, że istnieje zbiór $A \subseteq V$ o tej własności, że co najmniej

$$\frac{nd(d-1)}{2(d+1)^3}$$

wierzchołków z A ma dokładnie dwóch sąsiadów należących do A. Graf d-regularny to taki, w którym każdy wierzchołek jest stopnia d.

Rozwiązanie:
Będziemy losować zbiór A poprzez dodawanie do niego kolejnych wierzchołków niezależnie z prawdopodobieństwem p, przy czym liczbę $p \in [0,1]$ ustalimy później. Dla każdego wierzchołka v definiujemy zmienną losową X_v równą 1, jeśli $v \in A$ oraz v ma dokładnie dwóch sąsiadów w A, lub 0 w przeciwnym wypadku. Obliczamy bezpośrednio

$$\mathbb{E}[X_v] = \binom{d}{2} p^3 (1-p)^{d-2},$$

a p będziemy oczywiście chcieli dobrać tak, aby zmaksymalizować wartość tego wyrażenia. Pochodna powyższego wyrażenia to

$$-\binom{d}{2} p^2 (1-p)^{d-3}(dp + p - 3),$$

więc, ponieważ ekstrema funkcji występują dla miejsc zerowych pochodnej, warto spróbować $p = 3/(d+1)$. Następnie szacujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_v] = \binom{d}{2} p^3 (1-p)^{d-2} &= \frac{27d(d-1)}{2(d+1)^3}\left(1 - \frac{3}{d+1}\right)^{d-2} \\ &\geqslant \frac{27d(d-1)}{2(d+1)^3 e^3} \geqslant \frac{d(d-1)}{2(d+1)^3},\end{aligned}$$

przy czym korzystamy ze znanej nierówności $1 - x \geqslant e^{-\frac{x}{1-x}}$ dla $x = 3/(d+1)$, której prawdziwość dla $|x| < 1$ można sprawdzić na przykład poprzez zróżniczkowanie.

Wystarczy teraz zauważyć, że zmienna $X = \sum_v X_v$ zlicza takie wierzchołki w A, które mają dokładnie dwóch sąsiadów należących do A. Czytelnik zechce sprawdzić, że wartość oczekiwana X jest równa wielkości z tezy, co kończy dowód.

Zadanie 9.
Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach i niech $d = 2m/n$ będzie średnim stopniem w grafie G oraz $d \geqslant 1$. Udowodnić, że G zawiera zbiór niezależny rozmiaru co najmniej $n/2d$.

Rozwiązanie:
Zastosujemy następującą technikę. Wylosujemy pewien zbiór wierzchołków, po czym poprawimy go w deterministyczny sposób, aby tworzył zbiór niezależny, czyli aby żadne dwa wierzchołki tego zbioru nie były połączone krawędzią. Oszacowanie średniej mocy zbioru pomniejszonej o średnią poprawkę (zależną tylko od zbioru) da nam tezę.

Każdy wierzchołek dodajemy do losowanego zbioru z prawdopodobieństwem p, a parametr p dobierzemy później. Załóżmy, że wylosowaliśmy w ten sposób zbiór wierzchołków C. Skonstruujemy zbiór D zależny od C w następujący sposób. Przechodzimy po wszystkich krawędziach G i dla każdej sprawdzamy, czy oba jej końce należą do C. Jeśli tak, to jeden z tych wierzchołków dodajemy do D. Zauważmy, że D jest podzbiorem C oraz $C \setminus D$ jest zbiorem niezależnym. Ponadto $|C|$ i $|D|$ są zmiennymi losowymi.

Zauważmy, że $\mathbb{E}[|C|] = pn$, natomiast $|D|$ szacuje się z góry przez liczbę krawędzi, których oba końce są w C, więc $\mathbb{E}[|D|] \leqslant mp^2$. Wówczas

$$\mathbb{E}[|C \setminus D|] \geqslant np - mp^2 = n/2d,$$

jeśli dobierzemy $p = 1/d$. To kończy dowód.

Zadanie 10.
Niech G będzie grafem o n wierzchołkach i m krawędziach i niech $d = 2m/n$ będzie średnim stopniem w grafie G oraz $d \geqslant 1$. Udowodnić, że G zawiera zbiór niezależny rozmiaru co najmniej $n/(d+1)$.

Rozwiązanie:
Jeśli ustawimy wierzchołki G w pewnym porządku $v_1, \ldots, v_n$, to zbiór niezależny możemy uzyskać, wybierając kolejno te wierzchołki, które nie mają żadnej krawędzi do wierzchołków występujących wcześniej w tym porządku. Oczywiście nie kontrolujemy rozmiaru tak uzyskanego zbioru niezależnego, ale teraz wprowadzimy do rozwiązania losowość.

Wylosujmy permutację wierzchołków $(v_1, \ldots, v_n)$ z rozkładu jednostajnego. Przypiszmy tej permutacji zbiór C wygenerowany w wyżej opisany sposób. Wówczas

$$\mathbb{E}[|C|] = \sum_v \mathbb{P}(v \in C).$$

Wierzchołek v trafi do zbioru C dokładnie wtedy, gdy w wylosowanej permutacji wystąpi on przed każdym ze swoich sąsiadów, co (z symetrii) ma miejsce z prawdopodobieństwem $(\deg v + 1)^{-1}$. Zatem

$$\mathbb{E}[|C|] = \sum_v \frac{1}{\deg(v)+1} \geqslant \frac{n^2}{\sum_v(\deg(v)+1)} = \frac{n^2}{2m+n} = \frac{n}{d+1},$$

przy czym skorzystaliśmy tu z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną. To kończy dowód.

Zadanie 11. (74 OM, I etap, zadanie 11)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ spełniają równość $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = n$. Oznaczmy przez A zbiór tych indeksów $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dla których $a_i \geqslant 2$. Udowodnić, że

$$n \sum_{i \in A} a_i^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \leqslant 4n^2.$$

Rozwiązanie:
Przestrzenią probabilistyczną jest tutaj zbiór $\{1,\ldots,n\}$ z rozkładem jednostajnym (czyli $\mathbb{P}(i) = 1/n$ dla każdego i). Zamiast ciągu a rozważamy zmienną losową zdefiniowaną przez $a(i) = a_i$ i założenie o sumie kwadratów odpowiada warunkowi $\mathbb{E}[a^2] = 1$. Teza zadania jest wówczas równoważna nierówności

$$\mathbb{E}[a^2\mathbf{1}_A] + 4\mathbb{E}[a]^2 \leqslant 4\mathbb{E}[a^2],$$

przy czym $\mathbf{1}_A$ oznacza indykator zbioru A, czyli funkcję, która przyjmuje wartość 1 dla argumentów z A oraz wartość 0 dla pozostałych argumentów. Na mocy przedstawionego wzoru na wariancję, powyższa nierówność jest równoważna

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}[a^2\mathbf{1}_A] \leqslant \mathrm{Var}(a).$$

Prawdziwości powyższej nierówności dowodzimy bezpośrednim rachunkiem.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(a) &= \mathbb{E}[(a-\mathbb{E}[a])^2] \geqslant \mathbb{E}[(a-\mathbb{E}[a])^2\mathbf{1}_A] \\ &\geqslant \mathbb{E}[(a-1)^2\mathbf{1}_A] \geqslant \frac{1}{4}\mathbb{E}[a^2\mathbf{1}_A].\end{aligned}$$

Korzystamy tu z nierówności

$$\mathbb{E}[a] \leqslant \big(\mathbb{E}[a^2]\big)^{1/2} = 1$$

będącej probabilistycznym sformułowaniem nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną oraz z tego, że $a-1 \geqslant a/2$, jeśli tylko $a \geqslant 2$. To kończy dowód.

Reszty kwadratowe

Filip Manijak

Teoria

Definicja (Reszta kwadratowa)

Resztą kwadratową modulo p nazywamy taką liczbę całkowitą a, że

$$x^2 \equiv a \pmod{p}.$$

dla pewnej liczby całkowitej x niepodzielnej przez p.

Przykładowo dla $p = 7$ resztami kwadratowymi są 1, 2, 4.

Definicja (Symbol Legendre'a)

Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } a \text{ jest resztą kwadratową,} \\ 0, & \text{jeśli } p \mid a, \\ -1, & \text{jeśli } a \text{ nie jest resztą kwadratową.} \end{cases}$$

Twierdzenie (Kryterium Eulera)

Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas dla każdej liczby całkowitej a zachodzi

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Faktem wynikającym bezpośrednio z kryterium Eulera jest to, że liczba -1 jest resztą kwadratową tylko dla liczb pierwszych postaci $4k+1$ dla pewnego całkowitego k.

Twierdzenie (Multiplikatywność symbolu Legendre'a)

Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas dla wszystkich liczb całkowitych a, b zachodzi

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

Twierdzenie (Prawo wzajemności reszt kwadratowych)

Jeśli p i q to różne nieparzyste liczby pierwsze, to

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right).$$

Jeśli p to nieparzysta liczba pierwsza, to

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Zadania

Zadanie 1.
Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz generator g modulo p. Udowodnić, że $\left(\frac{g^k}{p}\right) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \equiv 0 \pmod{2}$.

Zadanie 2.
Dane są liczby całkowite a, b, c i taka nieparzysta liczba pierwsza p, że $p \nmid a$. Udowodnić, że kongruencja

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq -1$, przy czym $\Delta = b^2 - 4ac$.

Zadanie 3.
Udowodnić, że dla wszystkich liczb całkowitych x, y wyrażenie $(x^2+1)/(y^2-5)$ nie jest całkowite.

Zadanie 4.
Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ i takie liczby całkowite a, b, że $p \mid a+1-b^2$ oraz $p \mid a-1$. Udowodnić, że istnieje takie c, że $p \mid a^3+1-c^2$.

Zadanie 5.
Udowodnić, że liczba 3 jest resztą kwadratową tylko dla $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

Zadanie 6.
Dane są względnie pierwsze liczby całkowite a, b, c spełniające zależność

$$a^2 - ab + b^2 = c^2.$$

Wykazać, że każda taka liczba pierwsza p, że $p \mid c$ jest postaci $p = 6k+1$.

Zadanie 7.
Udowodnić, że liczba postaci $2^n + 1$ nie ma dzielników pierwszych postaci $8k+7$.

Zadanie 8.
Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba pierwsza $p = 4k+1$, że liczby

$$1^3+1,\ 2^3+2,\ \ldots,\ p^3+p$$

dają różne reszty modulo p.

Zadanie 9.
Udowodnić, że każdy dzielnik liczby $n^4 - n^2 + 1$ jest postaci $12k+1$.

Zadanie 10.
Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją takie całkowite a i b, że $p \mid a^2+b^2+1$.

Zadanie 11.
Udowodnić, że jeśli $2^n - 1 \mid 3^n - 1$, to $n = 1$.

Zadanie 12.
Udowodnić, że nie istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że

$$3(ab+bc+ca) \mid a^2+b^2+c^2.$$

Zadanie 13.
Udowodnić, że jeśli $p > 3$ jest liczbą pierwszą postaci $4k+3$, to istnieją takie różne liczby $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, że $p \mid a^2+ab+b^2+1$.

Zadanie 14.
Zbiór S to zbiór wszystkich liczb postaci

$$\frac{(a_1^2+a_1-1)\cdots(a_n^2+a_n-1)}{(b_1^2+b_1-1)\cdots(b_n^2+b_n-1)}$$

dla dodatnich liczb całkowitych a_i, b_i, n. Udowodnić, że w zbiorze S jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Filip Manijak*, Oskar Kuźmik.

We wszystkich rozwiązaniach jeśli mówimy o resztach kwadratowych, to o ile nie zaznaczono inaczej, mamy na myśli reszty kwadratowe modulo p. Jeśli w rozwiązaniu podana jest szczególna postać liczby, na przykład $p = 6k + 1$, to zakładamy, że równość ta zachodzi dla pewnej liczby całkowitej k.

Zadanie 1.
Dana jest nieparzysta liczba pierwsza p oraz generator g modulo p. Udowodnić, że $\left(\frac{g^k}{p}\right) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \equiv 0 \pmod 2$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $g^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, czyli liczba g^{p-1} to reszta kwadratowa. Widzimy, że liczba g^{p-1-2i} jest resztą kwadratową, ponieważ

$$\left(\frac{g^{p-1-2i}}{p}\right)\left(\frac{g^{2i}}{p}\right) = \left(\frac{g^{p-1}}{p}\right).$$

Oczywiście dla każdego $k \equiv 0 \pmod 2$ istnieje takie całkowite i, że $k = p - 1 - 2i$.

Zadanie 2.
Dane są liczby całkowite a, b, c i taka nieparzysta liczba pierwsza p, że $p \nmid a$. Udowodnić, że kongruencja

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq -1$, przy czym $\Delta = b^2 - 4ac$.

Rozwiązanie:
Mnożymy kongruencję obustronnie przez $4a \perp p$ i otrzymujemy

$$(2ax)^2 + 4abx \equiv -4ac \pmod p.$$

Dodajemy obustronnie b^2 i otrzymujemy

$$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod p,$$

co jest równoważne z $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq -1$.

Zadanie 3.
Udowodnić, że dla wszystkich liczb całkowitych x, y wyrażenie $(x^2 + 1)/(y^2 - 5)$ nie jest całkowite.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli liczba y jest nieparzysta, to $y^2 - 5$ jest podzielne przez 4. Jednak

$$x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4, \quad \text{więc} \quad 4 \nmid x^2 + 1,$$

więc rozważane wyrażenie nie może przyjmować wartości całkowitej. Jeśli jednak liczba y jest parzysta, to

$$y^2 - 5 = 4k + 3$$

dla pewnej liczby całkowitej k. Oznacza to, że liczba $y^2 - 5$ ma pewien dzielnik pierwszy $p = 4m + 3$. Gdyby $p \mid x^2 + 1$, to

$$x^2 \equiv -1 \pmod p.$$

Stoi to w sprzeczności z kryterium Eulera. Wobec tego $p \nmid x^2+1$ i liczba $(x^2+1)/(y^2-5)$ także w tym przypadku nie jest całkowita.

Zadanie 4.
Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ i takie liczby całkowite a, b, że $p \mid a + 1 - b^2$ oraz $p \mid a - 1$. Udowodnić, że istnieje takie c, że $p \mid a^3 + 1 - c^2$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\left(\frac{a^3+1}{p}\right) = \left(\frac{a+1}{p}\right)\left(\frac{a^2-a+1}{p}\right) = 1 \cdot 1 = 1,$$

ponieważ z założenia liczby

$$a+1 \qquad \text{oraz} \qquad a^2 - a + 1 \equiv a^2 \pmod p$$

to reszty kwadratowe. W takim razie liczba $a^3 + 1$ to reszta kwadratowa, czyli istnieje takie c, że $p \mid a^3 + 1 - c^2$.

Zadanie 5.
Udowodnić, że liczba 3 jest resztą kwadratową tylko dla $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$.

Rozwiązanie:
Z wzajemności reszt kwadratowych mamy

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right).$$

Jeśli $p \equiv 1 \pmod 3$, to $\left(\frac{p}{3}\right) = 1$, więc z powyższego $p \equiv 1 \pmod 4$, jeśli $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$. Zatem $p \equiv 1 \pmod{12}$. Analogicznie dla $p \equiv 2 \pmod 3$ otrzymujemy $p \equiv 3 \pmod 4$, co daje $p \equiv -1 \pmod{12}$.

Zadanie 6.
Dane są względnie pierwsze liczby całkowite a, b, c spełniające zależność

$$a^2 - ab + b^2 = c^2.$$

Wykazać, że każda taka liczba pierwsza p, że $p \mid c$ jest postaci $p = 6k + 1$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $2 \nmid c$, ponieważ w przeciwnym razie lewa strona równania byłaby nieparzysta, a prawa parzysta. Jeśli $3 \mid c$, to $a^2 - ab + b^2 \equiv 0 \pmod 9$, co jest równoznaczne z

$$(2a - b)^2 + 3b^2 \equiv 4(a^2 - ab + b^2) \equiv 0 \pmod 9.$$

Jednak wtedy $3 \mid 2a - b$, więc $9 \mid 3b^2$. Stąd $3 \mid b$. Wtedy z pierwotnej równości także $3 \mid a$, a więc $3 \mid a, b, c$, wbrew $\gcd(a, b, c) = 1$.

Rozważmy zatem liczbę pierwszą $p > 3$ dzielącą c. Zauważmy, że

$$(a - b)^2 = -ab + c^2 \qquad \text{oraz} \qquad (a + b)^2 = 3ab + c^2,$$

czyli

$$(a - b)^2 \equiv -ab \pmod p \qquad \text{oraz} \qquad (a + b)^2 \equiv 3ab \pmod p.$$

Zatem liczby $3ab$ i $-ab$ są resztami kwadratowymi modulo p, czyli

$$\left(\frac{-ab}{p}\right) = \left(\frac{3ab}{p}\right) = 1.$$

Wówczas

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = 1.$$

Ponadto liczba -3 jest resztą kwadratową tylko dla $p = 12l + 1$ i $p = 12l + 7$. Stąd $p = 6k + 1$, co było do wykazania.

Zadanie 7.
Udowodnić, że liczba postaci $2^n + 1$ nie ma dzielników pierwszych postaci $8k + 7$.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że istnieje taka liczba pierwsza $p \equiv 7 \pmod 8$, że $p \mid 2^n + 1$. Jeśli n jest parzyste, to liczba -1 jest resztą kwadratową. Jednak skoro $p \equiv 3 \pmod 4$, to z kryterium Eulera otrzymujemy sprzeczność. W takim razie n jest nieparzyste. Stąd liczba -2 jest resztą kwadratową. Jednak

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = -1,$$

ponieważ z prawa wzajemności reszt kwadratowych mamy, że liczba 2 jest resztą kwadratową, a liczba -1 jest nieresztą kwadratową. W taki sposób dostaliśmy, że liczba -2 jest jednocześnie resztą kwadratową i nieresztą kwadratową – sprzeczność. Oznacza to, że początkowe założenie było fałszywe.

Zadanie 8.
Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba pierwsza $p = 4k + 1$, że liczby

$$1^3 + 1,\ 2^3 + 2,\ \ldots,\ p^3 + p$$

dają różne reszty modulo p.

Rozwiązanie:
$\boxed{\text{NIE.}}$ Zauważmy, że z kryterium Eulera dla każdej liczby pierwszej $p = 4k + 1$ mamy, że liczba -1 jest resztą kwadratową. Wobec tego istnieje taka liczba $a < p$, że

$$a^3 + a \equiv a(a^2 + 1) \equiv 0 \equiv p^3 + p \pmod p.$$

Zadanie 9.
Udowodnić, że każdy dzielnik liczby $n^4 - n^2 + 1$ jest postaci $12k + 1$.

Rozwiązanie:
Rozważmy dowolny dzielnik pierwszy p liczby $n^4 - n^2 + 1$. Wystarczy udowodnić, że p jest postaci $12k + 1$. Zauważmy

$$n^4 - n^2 + 1 = (n^2 - 1)^2 + n^2 \qquad \text{oraz} \qquad n^4 - n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - 3n^2.$$

z pierwszej postaci otrzymujemy, że liczba $-n^2$ jest resztą kwadratową. W takim razie z kryterium Eulera dostajemy, że $p = 4m+1$. Z drugiej równości wynika, że 3 jest resztą kwadratową. Zatem z Zadania 5 mamy $p = 12k \pm 1$. Z obu tych warunków razem wynika teza.

Zadanie 10.
Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją takie całkowite a i b, że $p \mid a^2 + b^2 + 1$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że dla $p = 4k + 1$ istnieje taka liczba c, że $c^2 \equiv -1 \pmod p$. Jeśli weźmiemy $a = c$ i $b = p$, to otrzymujemy tezę. Dla $p = 4k + 3$ wystarczy udowodnić, że

$$a^2 \equiv -b^2 - 1 \pmod p.$$

Chcemy udowodnić, że istnieje taka reszta kwadratowa r, że liczba $-r - 1$ jest również resztą kwadratową. Przypuśćmy, że nie istnieje taka reszta. Wtedy jeśli liczba a jest resztą kwadratową, to $\left(\frac{-a-1}{p}\right) = -1$, czyli

$$\left(\frac{a+1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-a-1}{p}\right) = 1.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że każda reszta modulo p jest resztą kwadratową, co jest oczywiście niemożliwe. W takim razie istnieje postulowana liczba r, co kończy dowód.

Zadanie 11.
Udowodnić, że jeśli $2^n - 1 \mid 3^n - 1$, to $n = 1$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli n jest parzyste, to $2^n \equiv 1 \pmod 3$, więc $3 \mid 2^n - 1$. Ze założenia mielibyśmy wtedy także $3 \mid 3^n - 1$, co jest niemożliwe. Zatem n jest nieparzyste, czyli $n = 2k + 1$ dla pewnego $k \geqslant 0$.

Ponieważ
$$2^n - 1 \mid (3^n - 1) - (2^n - 1) = 3^n - 2^n$$
oraz $2^n \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$, dostajemy $3^n \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$. Dla $n = 2k + 1$ oznacza to, że
$$3^{2k+1} \equiv 1 \pmod{2^{2k+1} - 1},$$
a więc 3 jest resztą kwadratową modulo $2^{2k+1} - 1$. Przypuśćmy teraz, że $p \mid 2^{2k+1} - 1$. Wówczas na mocy Zadania 5 mamy $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$. Stąd jednak $2^{2k+1} - 1 \equiv \pm 1 \pmod{12}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że jest to możliwe jedynie dla $k = 0$, czyli $n = 1$.

Zadanie 12.
Udowodnić, że nie istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że
$$3(ab + bc + ca) \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że istnieją liczby a, b, c spełniające warunki zadania. Bez straty ogólności niech $\gcd(a, b, c) = 1$. Wówczas
$$(a + b + c)^2 = (3n + 2)(ab + bc + ca).$$
dla pewnego całkowitego n. Rozważmy takie $p = 3k + 2$, że
$$p^{2i+1} \mid 3n + 2 \qquad \text{oraz} \qquad p^{2i+2} \nmid 3n + 2.$$
dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej i. Takie p istnieje, ponieważ z mnożenia reszt 1 i 0 nigdy nie otrzymamy reszty 2. Skoro p może dzielić lewą stronę tylko w parzystej potędze, to dzieli $ab+bc+ca$. Z powodu, że $p \mid a+b+c$, to możemy wstawić $a \equiv -b-c \pmod p$. W takim razie $p \mid ab+bc+ca$, to $p \mid -b^2-bc-c^2$, czyli po pomnożeniu przez liczbę 4, otrzymujemy $p \mid (2b+c)^2 + 3c^2$. Oznacza to, że liczba -3 to reszta kwadratowa. Przypuśćmy, że $p = 4k + 1$. Wtedy
$$\left(\frac{-3}{3k+2}\right) = \left(\frac{-1}{3k+2}\right)\left(\frac{3}{3k+2}\right) = \left(\frac{3k+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1,$$
sprzeczność. Jeśli $p = 4k + 3$, to w analogiczny sposób otrzymujemy sprzeczność, co kończy dowód.

Zadanie 13.
Udowodnić, że jeśli $p > 3$ jest liczbą pierwszą postaci $4k+3$, to istnieją takie różne liczby $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, że $p \mid a^2 + ab + b^2 + 1$.

Rozwiązanie:
Wszystkie reszty kwadratowe rozważamy modulo p. Niech c to odwrotność b modulo p. Mnożymy tezę obustronnie przez $4c^2$ i dostajemy
$$4(ac)^2 + 4ac + 4 \equiv -c^2 \pmod p.$$
Niech $x = ac$. Wówczas
$$(2x + 1)^2 + 3 \equiv -(2c)^2 \pmod p.$$
Z powodu, że $p = 4k + 3$, to -1 nie jest resztą kwadratową, czyli $-(2c)^2$ też nie jest resztą kwadratową. Rozważmy następujący ciąg liczb modulo p:
$$0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \ldots,\ 3 \cdot (p - 1).$$
Znanym faktem jest, że reszt i niereszt kwadratowych jest tyle samo dla nieparzystego p. W takim razie w tym ciągu istnieje takie całkowite t, że liczba t jest resztą kwadratową, a liczba $t + 3$ jest nieresztą kwadratową. Pozostaje zauważyć, że skoro liczba t istnieje, to możemy wyznaczyć liczby x i c, a w konsekwencji liczby a i b, co kończy dowód.

Zadanie 14.
Zbiór S to zbiór wszystkich liczb postaci

$$\frac{(a_1^2+a_1-1)\cdots(a_n^2+a_n-1)}{(b_1^2+b_1-1)\cdots(b_n^2+b_n-1)}$$

dla dodatnich liczb całkowitych a_i, b_i, n. Udowodnić, że w zbiorze S jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Rozwiązanie:
Udowodnimy indukcyjnie, że wszystkie liczby pierwsze przystające do 0, 1, 4 modulo 5 zawierają się w zbiorze S. Niech ciąg p_i zawiera kolejne liczby pierwsze przystające do 0, 1, 4 modulo 5. Pokażemy, że liczba p_i zawiera się w zbiorze S dla każdego całkowitego $i \geqslant 1$. Baza indukcji jest spełniona, ponieważ liczby

$$p_1 = 5,\ p_2 = 11,\ p_3 = 19$$

zawierają się zbiorze w S. Załóżmy indukcyjnie, że liczba p_i zawiera się w zbiorze S dla $1 \leqslant i < n$. Udowodnimy, że liczba p_n zawiera się w zbiorze S. Zauważmy, że z prawa wzajemności reszt kwadratowych liczba 5 jest resztą kwadratową modulo p_i. W takim razie istnieje taka liczba całkowita x, że

$$p_i \mid (2x+1)^2 - 5, \quad \text{czyli} \quad p_i \mid x^2+x-1 \quad \text{oraz} \quad 2x+1 < p_i.$$

Wiemy, że $\Delta = 5$ dla wyrażenia x^2+x-1. Rozważmy dowolny dzielnik pierwszy $p \neq p_i$ tego wyrażenia. Jest on nieparzysty, ponieważ wyrażenie x^2+x-1 jest nieparzyste. W takim razie z Zadania 2 wiemy, że $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq -1$, więc $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq -1$. Stąd z prawa wzajemności reszt kwadratowych wiemy, że $\left(\frac{p}{\Delta}\right) \neq -1$, ponieważ $4 \mid \Delta - 1$. Daje to, że liczba p przystaje do 0, 1, 4 modulo 5. Dodatkowo wiemy, że jeśli $p \neq p_i$, to $p < p_i$, ponieważ $p_i \mid x^2+x-1$ oraz $p_i > 2x+1$. Oznacza to, że liczba p zawiera się w zbiorze S. Zauważmy, że jeśli liczby a oraz b zawierają się w zbiorze S, to również liczby ab i a/b zawierają się w tym zbiorze. Ponieważ każdy z dzielników wyrażenia

$$x^2+x-1$$

jest iloczynem liczb zawierających się w zbiorze S, to również to wyrażenie zawiera się w zbiorze S. Zatem skoro liczba p_i dzieli wyrażenie x^2+x-1, to liczba p_i również zawiera się w zbiorze S, co kończy dowód.

Ciągi rekurencyjne

Oleksii Iermolenko

Teoria

Twierdzenie (o zbieżności ciągu monotonicznego i ograniczonego)

Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny.

W poniższych zadaniach często warto:

- próbować użyć indukcji,
- wszystkie przekształcenia założeń wykonywać równoważnie,
- wypisać kilka pierwszych wyrazów ciągu,
- domyślić się postaci jawnej ciągu oraz udowodnić zauważone własności tego ciągu.

Zadania

Zadanie 1.
Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} - 2}.$$

Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny.

Zadanie 2.
Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n \geqslant 0}$ spełnia $a_0 \geqslant 0$ oraz

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot \{a_i\} \quad \text{dla} \quad i \geqslant 0,$$

przy czym $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Wykazać, że dla wszystkich dostatecznie dużych j zachodzi równość $a_j = a_{j+2024}$.

Zadanie 3.
Ciąg (a_n) określony jest następująco: $a_1 = 1$ oraz

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

dla $n > 1$. Wykazać, że dla każdego parzystego k zachodzi $k! \mid a_k$.

Zadanie 4.
Dany jest taki nieskończony ciąg liczb całkowitych $(a_n)_{n \geqslant 0}$, że $a_0 \geqslant 2$ oraz $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ dla każdego $n \geqslant 0$. Wykazać, że w ciągu tym występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

Zadanie 5.
Ciąg (x_n) określony jest następująco

$$x_0 = 3 \qquad \text{oraz} \qquad \sqrt{x_{n+1}} = 2\sqrt{x_n} + \sqrt{3(1 + x_n)}.$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele takich n, że $x_n \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 6.
Ciąg $(a_n)_{n \geqslant 0}$ określamy rekurencyjnie wzorem

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n). \end{cases}$$

Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej z istnieje takie $a \in (0, 1)$, że ciąg (a_n) jest okresowy z minimalnym okresem z.

Zadanie 7.
Ciąg $(a_n)_{n\geqslant 1}$ dodatnich liczb rzeczywistych jest określony następująco

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{a_n^4+9}{10a_n} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Wykazać, że dla $n \geqslant 2$ zachodzi $4/5 \leqslant a_n \leqslant 5/4$.

Zadanie 8.
Ciąg (b_n) liczb dodatnich spełnia dla każdego $n \geqslant 1$ warunek

$$b_{n+1}^2 > \frac{b_1^2}{1^3} + \frac{b_2^2}{2^3} + \cdots + \frac{b_n^2}{n^3}.$$

Udowodnić, że istnieje taka liczba naturalna m, że

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{b_{n+1}}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} > \frac{2024}{1013}.$$

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Michał Gawron, Karol Musieliński, Michał Oprocha.

Zadanie 1.
Dany jest taki ciąg (a_n), że

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}-2}.$$

Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny.

Rozwiązanie:
Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Pokażemy, że

$$a_n = 4 - (1/2)^{n-2}.$$

Dla $n = 1$ bezpośrednio sprawdzamy, że $a_1 = 2$. Dalej załóżmy, że a_n ma postulowaną własność. Wtedy

$$a_{n+1} = \left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}-2}\right).$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że prawa strona powyższej równości upraszcza się do $4-(1/2)^{n-1}$, co kończy dowód indukcyjny. Stąd oczywiście $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.

Zadanie 2.
Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\geqslant 0}$ spełnia $a_0 \geqslant 0$ oraz

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot \{a_i\} \quad \text{dla} \quad i \geqslant 0,$$

przy czym $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Wykazać, że dla wszystkich dostatecznie dużych j zachodzi równość $a_j = a_{j+2024}$.

Rozwiązanie:
Zauważmy najpierw kilka własności danego ciągu. Zapiszmy

$$a_i = n_i + f_i \quad \text{dla} \quad n_i = \lfloor a_i \rfloor, \quad f_i = \{a_i\}.$$

Wtedy $a_{i+1} = n_i f_i$. Jeśli $n_i \geqslant 1$, to $0 \leqslant a_{i+1} = n_i f_i < n_i$. Stąd $\lfloor a_{i+1} \rfloor \leqslant n_i - 1$.

Oznacza to, że dopóki $a_i \geqslant 1$, część całkowita kolejnego wyrazu maleje co najmniej o 1. Ponieważ n_i jest nieujemną liczbą całkowitą, w skończonej liczbie kroków otrzymamy wyraz $a_k < 1$. Jeżeli $a_k < 1$, to $\lfloor a_k \rfloor = 0$, więc $a_{k+1} = 0 \cdot \{a_k\} = 0$. Dalej już $a_{k+2} = a_{k+3} = \cdots = 0$.

Zatem ciąg (a_n) jest od pewnego momentu stały i równy zeru. W szczególności istnieje takie j_0, że dla wszystkich $j \geqslant j_0$ zachodzi równość $a_j = 0 = a_{j+2024}$.

Zadanie 3.
Ciąg (a_n) określony jest następująco: $a_1 = 1$ oraz

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

dla $n > 1$. Wykazać, że dla każdego parzystego k zachodzi $k! \mid a_k$.

Rozwiązanie:
Niech $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Z definicji ciągu dla $n > 1$ mamy $a_n = nS_{n-1}$, a zatem

$$S_n = S_{n-1} + a_n = (n+1)S_{n-1}.$$

Ponieważ $S_1 = a_1 = 1$, indukcyjnie sprawdzamy, że z powyższej rekurencji wynika $S_n = (n+1)!/2$ dla $n \geqslant 1$. Stąd dla $n > 1$ prawdziwa jest równość

$$a_n = nS_{n-1} = \frac{n \cdot n!}{2}.$$

Rozważmy teraz wyrazy o parzystych indeksach. Dla $n \geqslant 1$ mamy

$$a_{2n} = \frac{2n \cdot (2n)!}{2} = n(2n)!$$

Stąd oczywiście $(2n)! \mid a_{2n}$, co było do wykazania.

Zadanie 4.
Dany jest taki nieskończony ciąg liczb całkowitych $(a_n)_{n\geqslant 0}$, że $a_0 \geqslant 2$ oraz $a_{n+1} \in \{2a_n - 1, 2a_n + 1\}$ dla każdego $n \geqslant 0$. Wykazać, że w ciągu tym występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że w ciągu tym jest skończenie wiele liczb złożonych. Wówczas istnieje takie m, że dla każdego $n \geqslant m$ liczba a_n jest pierwsza. Zauważmy, że z założenia ciąg ten jest rosnący i przyjmijmy bez straty ogólności $a_m \geqslant 5$. Zauważmy również, że jeśli $a_m \equiv 1 \pmod 3$, to $2a_m + 1$ jest podzielne przez 3, więc $a_{m+1} = 2a_m - 1$ i $a_{m+1} \equiv 1 \pmod 3$. Zatem indukcyjnie $a_{n+1} = 2a_n - 1$ dla każdego $n \geqslant m$. Analogicznie, jeśli tylko $a_m \equiv 2 \pmod 3$, to $a_{n+1} = 2a_n + 1$ dla każdego $n \geqslant m$.

Niech $a_m = p \geqslant 5$. W pierwszym przypadku $a_{m+k} = 2^k(p-1) + 1$ dla każdego $k \geqslant 0$. Jednak po przyjęciu $k = p - 1$ mamy z małego twierdzenia Fermata

$$a_{m+p-1} = 2^{p-1}(p-1) + 1 \equiv (p-1) + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Jednak $a_m = p$ oraz $a_{m+p-1} > a_m$, wbrew temu, że a_{m+p-1} jest liczbą pierwszą.

Drugi przypadek jest analogiczny.

Zadanie 5.
Ciąg (x_n) określony jest następująco

$$x_0 = 3 \qquad \text{oraz} \qquad \sqrt{x_{n+1}} = 2\sqrt{x_n} + \sqrt{3(1 + x_n)}.$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele takich n, że $x_n \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązanie:
Niech $u_n = \sqrt{x_n}$ i $v_n = \sqrt{1 + x_n}$. Wtedy z założenia

$$u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{3}v_n.$$

Sprawdźmy również, że

$$\left(\sqrt{3}u_n + 2v_n\right)^2 = \left(2u_n + \sqrt{3}v_n\right)^2 + (v_n^2 - u_n^2) = x_{n+1} + 1,$$

czyli

$$v_{n+1} = \sqrt{3}u_n + 2v_n.$$

Początkowo $u_0 = \sqrt{3}$ i $v_0 = 2$. Ponadto jeśli tylko $u_n = a\sqrt{3}$ i $v_n = b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$, to

$$u_{n+1} = (2a + b)\sqrt{3} \qquad \text{oraz} \qquad v_{n+1} = 3a + 2b.$$

Zatem, na mocy zasady indukcji matematycznej, istnieją takie liczby całkowite a_n i b_n, że $u_n = a_n\sqrt{3}$ i $v_n = b_n$ dla wszystkich n. Wobec tego dla wszystkich n zachodzi

$$x_n = u_n^2 = (a_n\sqrt{3})^2 = 3a_n^2 \in \mathbb{Z}.$$

W szczególności takich n jest nieskończenie wiele.

Zadanie 6.
Ciąg $(a_n)_{n\geqslant 0}$ określamy rekurencyjnie wzorem

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n). \end{cases}$$

Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej z istnieje takie $a \in (0, 1)$, że ciąg (a_n) jest okresowy z minimalnym okresem z.

Rozwiązanie:
Najpierw pokażmy, że teza jest prawdziwa dla $z = 1$. Zauważmy, że po podstawieniu $a = 3/4$ mamy

$$a_0 = 3/4 \quad \text{oraz} \quad a_n = 4 \cdot (3/4) \cdot (1 - 3/4) = 3/4, \quad n \geqslant 1.$$

Zatem wówczas ciąg jest stały, czyli okresowy z okresem 1.

Niech teraz $z > 2$ i rozważmy ciąg (b_n) taki, że

$$a_n = \frac{1+b_n}{2}$$

Wtedy

$$\frac{1+b_{n+1}}{2} = a_{n+1} = 4a_n(1-a_n) = 4 \cdot \frac{1+b_n}{2}\left(1 - \frac{1+b_n}{2}\right) = 1 - b_n^2,$$

czyli $b_{n+1} = 1 - 2b_n^2$. Z definicji ciągu b_n wynika, że $a_0 \in (0,1)$, więc równoważnie $b_0 \in (-1,1)$. Dokonujemy więc podstawienia

$$b_0 = -\cos x \quad \text{dla} \quad x \in (0,\pi).$$

Zauważmy, że wówczas indukcyjnie

$$b_n = 1 - 2\cos^2(2^{n-1}x) = -\cos(2^n x) \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Chcemy, aby dla każdego $n \geqslant 0$ i $m \geqslant 1$ równość

$$-\cos(2^n x) = b_n = b_{n+m} = -\cos(2^{n+m}x),$$

zachodziła wtedy i tylko wtedy, gdy $z \mid m$. Równość ta jest równoważna

$$\sin\left(\frac{2^{n+m}x + 2^n x}{2}\right)\sin\left(\frac{2^{n+m}x - 2^n x}{2}\right) = 0,$$

co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z argumentów jest całkowitą wielokrotnością π. Przyjmijmy

$$x = \frac{2^z - 2}{2^z - 1}\pi \in (0,\pi).$$

Wówczas

$$\frac{2^{n+m}x - 2^n x}{2} = 2^n x(2^{m-1} - 1/2) = 2^n(2^{z-1} - 1)\frac{2^m - 1}{2^z - 1}\pi.$$

Ponieważ $\gcd(2^u - 1, 2^v - 1) = 2^{\gcd(u,v)} - 1$, mamy $2^n(2^{z-1} - 1) \perp 2^z - 1$. Zatem powyższa liczba jest całkowitą wielokrotnością π wtedy i tylko wtedy, gdy $z \mid m$.

Przeanalizujmy teraz argument pierwszego sinusa. Analogicznie

$$\frac{2^{n+m}x + 2^n x}{2} = 2^n(2^{z-1} - 1)\frac{2^m + 1}{2^z - 1}\pi,$$

co jest całkowitą wielokrotnością π wtedy i tylko wtedy, gdy $2^z - 1 \mid 2^m + 1$. Stąd oczywiście $2^z - 1 \mid 2^{2m} - 1$, więc $z \mid 2m$. Jeśli z jest nieparzyste, to natychmiast $z \mid m$. W przeciwnym wypadku mamy $z = 2k$ i $m = kt$ dla pewnego $t \in \mathbb{Z}$. Wówczas $2^k - 1 \mid 2^m - 1$ oraz $2^k - 1 \mid 2^m + 1$, ponieważ $2^k - 1 \mid 2^z - 1$. Stąd jednak $2^k - 1 \mid 2$, co jest niemożliwe dla $z > 2$.

Wobec powyższych równość $b_n = b_{n+m}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $z \mid m$, więc $a = (1 + b_0)/2$ dla $b_0 = -\cos(x)$ spełnia warunki zadania.

Pozostał przypadek $z = 2$. Analogicznie definiujemy ciąg (b_n) oraz przyjmujemy $b_0 = -\cos(x)$ dla $x = 2\pi/5$. Wtedy

$$b_2 = -\cos(4x) = -\cos(2\pi - x) = -\cos(x) = b_0,$$

czyli $a_2 = a_0$, jednak $a_1 \neq a_0$. To kończy dowód.

Zadanie 7.
Ciąg $(a_n)_{n \geqslant 1}$ dodatnich liczb rzeczywistych jest określony następująco

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \frac{a_n^4 + 9}{10a_n} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

Wykazać, że dla $n \geqslant 2$ zachodzi $4/5 \leqslant a_n \leqslant 5/4$.

Rozwiązanie:
Ograniczenie dolne wynika wprost z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną

$$\frac{a_n^4+9}{10a_n} = \frac{a_n^4+2+2+5}{10a_n} \geqslant \frac{4\sqrt[4]{20a_n^4}}{10a_n} = \frac{2\sqrt[4]{20}}{5} \geqslant \frac{4}{5}.$$

Rozważmy następnie funkcję

$$f(x) = 4x^4 - 50x + 36,$$

dla $x \in [4/5, 2]$ i zauważmy, że $a_{n+1} \leqslant 5/4 \iff f(a_n) \leqslant 0$. Ponadto

$$f'(x) = 16x^3 - 50, \qquad f''(x) = 48x^2 > 0.$$

więc funkcja f jest wypukła. Łatwo sprawdzić, że $f(4/5) < 0$ i $f(2) = 0$, więc na całej dziedzinie zachodzi $f(x) \leqslant 0$. Wobec tego indukcyjnie dowodzimy, że $f(a_n) \leqslant 0$ dla wszystkich $n \geqslant 1$, co jest równoważne ograniczeniu górnemu.

Zadanie 8.
Ciąg (b_n) liczb dodatnich spełnia dla każdego $n \geqslant 1$ warunek

$$b_{n+1}^2 > \frac{b_1^2}{1^3} + \frac{b_2^2}{2^3} + \cdots + \frac{b_n^2}{n^3}.$$

Udowodnić, że istnieje taka liczba naturalna m, że

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{b_{n+1}}{b_1+b_2+\cdots+b_n} > \frac{2024}{1013}.$$

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k^3} \geqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} k^3}.$$

Następnie, korzystając z $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$b_{n+1} \geqslant \frac{2\sum_{k=1}^{n} b_k}{n(n+1)} \quad \text{i} \quad \frac{b_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \geqslant \frac{2}{n(n+1)}.$$

Po dodaniu stronami analogicznych nierówności dla $n \in \{1, \ldots, m\}$, pozostało wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{2}{n(n+1)} \geqslant \frac{2024}{1013}.$$

dla pewnego m. Jednak

$$S = \sum_{n=1}^{m} \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{m+1}\right).$$

Zatem dla dostatecznie dużego m, S jest dowolnie bliskie $2 > \frac{2024}{1013}$, co kończy dowód.

Twierdzenie Halla

Magdalena Pudełko

Teoria

Definicja (Graf dwudzielny)

Graf jest *dwudzielny* jeżeli można podzielić zbiór jego wierzchołków na dwa rozłączne podzbiory w taki sposób, że każda krawędź łączy wierzchołki z różnych podzbiorów. Jeżeli A i B są tymi podzbiorami, a E jest zbiorem krawędzi grafu G, to stosujemy zapis $G = (A \cup B, E)$.

Definicja (Skojarzenie)

Skojarzenie w grafie dwudzielnym to taki podzbiór jego krawędzi, że każdy wierzchołek jest końcem co najwyżej jednej z nich.

Definicja (Skojarzenie pełne i doskonałe)

Skojarzenie w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$ nazywamy *skojarzeniem pełnym* (ze zbioru A do zbioru B), jeśli każdy wierzchołek ze zbioru A jest końcem pewnej krawędzi tego skojarzenia. Jeżeli dodatkowo $|A| = |B|$, to skojarzenie to nazywamy *doskonałym*.

Na potrzeby tego skryptu wprowadźmy następujące oznaczenie. Dla grafu G i podzbioru jego wierzchołków A, niech $N_G(A)$ będzie zbiorem wierzchołków grafu G połączonych krawędzią z przynajmniej jednym wierzchołkiem należącym do zbioru A. Gdy w rozwiązaniu jest jeden graf, zapisujemy po prostu $N(A)$.

Twierdzenie (Halla)

W grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$ skojarzenie pełne ze zbioru A do zbioru B istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru $S \subseteq A$ zachodzi $|S| \leqslant |N_G(S)|$.

Dowód. Czytelnik zechce sprawdzić, że jeśli istnieje skojarzenie pełne, to warunek $|S| \leqslant |N(S)|$ jest spełniony. W drugą stronę dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem $|A|$. Przypadek $|A| = 1$ jest trywialny. Załóżmy teraz, że twierdzenie Halla jest prawdziwe, jeśli tylko $|A| < n$. Jeśli $|A| = n$, to zachodzi jeden z poniższych przypadków.

(i) Dla każdego $S \subsetneq A$ zachodzi $|N(S)| \geqslant |S| + 1$. Wówczas dodajemy do skojarzenia dowolną krawędź (a, b), przy czym $a \in A$, $b \in B$. Na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy skojarzenie M' pełne w grafie

$$G' = ((A \setminus \{a\}) \sqcup (B \setminus \{b\}), E'),$$

przy czym $E' = \{\{x, y\} \in E \mid \ x \neq a,\ y \neq b\}$. Wówczas $M = M' \cup \{(a, b)\}$ jest szukanym skojarzeniem.

(ii) Istnieje takie $S \subsetneq A$, że $|N(S)| = |S|$. Wówczas na mocy założenia indukcyjnego istnieje takie skojarzenie M' w grafie indukowanym przez zbiór wierzchołków $S \sqcup N(S)$, że każdy wierzchołek tego grafu jest końcem pewnej krawędzi z M'.
Zauważmy, że założenia twierdzenia Halla są spełnione dla grafu powstałego przez usunięcie wierzchołków $S \sqcup N(S)$ wraz z incydentnymi krawędziami. Istotnie, gdyby pewien zbiór $T \subseteq A \setminus S$ miał w powstałym grafie mniej niż $|T|$ sąsiednich wierzchołków, to

$$|N(S \cup T)| < |N(S)| + |T| = |S| + |T| = |S \cup T|,$$

wbrew założeniu. Zatem analogicznie do M' konstruujemy skojarzenie M''. Wówczas szukanym skojarzeniem jest $M' \cup M''$.

□

Twierdzenie (Uogólnienie Halla)

Dla grafu dwudzielnego $G = (A \cup B, E)$ i liczby całkowitej $0 \leqslant k \leqslant |A|$ skojarzenie pełne z k-elementowego podzbioru A do B istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subseteq A$ zachodzi

$$|N_G(S)| \geqslant |S| - |A| + k.$$

Dowód. Rozważmy graf $G' = (A \cup (B \cup C), E \cup E')$, przy czym C to zbiór $d := |A| - k$ nowych wierzchołków, a E' to zbiór krawędzi łączących każdy element ze zbioru C z każdym elementem zbioru A. Weźmy dowolny podzbiór $S \neq \emptyset$ zbioru A. Ponieważ wszystkie elementy zbioru C należą do zbioru $N_{G'}(S)$, zachodzi nierówność

$$|N_{G'}(S)| = |N_G(S)| + |C| \geqslant (|S| - d) + d = |S|.$$

Wówczas na mocy twierdzenia Halla istnieje skojarzenie pełne ze zbioru A do zbioru $B \cup C$. Usuńmy z tego skojarzenia wszystkie krawędzie o końcach w zbiorze C. Wówczas zostanie nam przynajmniej $|A| - d = k$ krawędzi, z których możemy wybrać żądane skojarzenie. □

Definicja (Pokrycie wierzchołkowe)

Pokryciem wierzchołkowym nazywamy taki podzbiór wierzchołków grafu, że co najmniej jeden koniec każdej krawędzi należy do tego zbioru.

Twierdzenie (Kőniga)

Moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w grafie dwudzielnym jest równa mocy największego skojarzenia w tym grafie.

Dowód. Zauważmy, że moc dowolnego pokrycia wierzchołkowego jest nie mniejsza niż moc dowolnego skojarzenia. Istotnie, każda krawędź skojarzenia musi być pokryta przez któryś ze swoich końców, a ponieważ krawędzie skojarzenia są parami rozłączne, różnym krawędziom trzeba przyporządkować różne wierzchołki pokrycia.

Wystarczy zatem wykazać, że istnieją pokrycie wierzchołkowe i skojarzenie tej samej mocy. Rozważmy graf $G = (A \cup B, E)$ i weźmy najmniejsze takie k, że dla każdego zbioru $S \subseteq A$ zachodzi $|N(S)| \geqslant |S| - k$. Z uogólnionego twierdzenia Halla istnieje wówczas skojarzenie o mocy $|A| - k$. Weźmy dowolny zbiór $S \subseteq A$ dla którego $|N(S)| - |S| = -k$. Zbiór o tej własności istnieje, ponieważ k jest minimalne. Niech $M = (A \setminus S) \cup N(S)$. Wówczas M jest pokryciem wierzchołkowym, ponieważ każda krawędź o końcu w zbiorze S ma drugi koniec w zbiorze $N(S) \subseteq M$. Ponadto

$$|M| = |A| - |S| + |N(S)| = |A| - k,$$

więc istnieją skojarzenie i pokrycie wierzchołkowe o tej samej mocy. □

Zadania

Zadanie 1.
Dane są takie zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ liczb rzeczywistych, że suma dowolnych k z nich ma co najmniej k elementów dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$. Wykazać, że istnieją takie parami różne liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ zachodzi $a_i \in A_i$.

Zadanie 2. (AMSP C3 2013)
Na szachownicy $n \times n$ w każdym rzędzie i w każdej kolumnie stoi dokładnie k figur dla pewnego ustalonego $1 \leqslant k \leqslant n$. Wykazać, że możemy tak wybrać n figur, aby żadne dwie z nich nie stały w jednym rzędzie, ani w jednej kolumnie.

Zadanie 3.
W 2025 roku do finału Olimpiady Matematycznej zakwalifikowano 2025 zawodników. Do sprawdzania zadań finałowych oddelegowana została pewna liczba sprawdzających. Wiadomo, że każdy finalista nie zna co najmniej

45 sprawdzających. Pokazać, że można tak przypisać sprawdzającym finalistów, których prace mają sprawdzić, że spełnione są jednocześnie następujące warunki.

(1) Prace każdego finalisty są sprawdzane przez sprawdzającego, którego ten nie zna.

(2) Każdy sprawdzający sprawdza prace co najwyżej 45 finalistów.

Zadanie 4.
W grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$ wszystkie wierzchołki są stopnia d. Ponadto $|A| = |B|$. Znaleźć najmniejszą liczbę krawędzi, których usunięcie spowoduje, że w G nie będzie już skojarzenia doskonałego.

Zadanie 5. (Putnam 2012 B3)
W turnieju wzięło udział $2n$ drużyn. Każdego z $2n-1$ dni każda drużyna rozegrała jeden mecz, a w całym turnieju każda para drużyn zagrała ze sobą dokładnie raz. Udowodnić, że można tak wybrać $2n-1$ różnych drużyn $T_1, T_2, \ldots, T_{2n-1}$, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$ drużyna T_i wygrała swój mecz i-tego dnia.

Zadanie 6. (Zwardoń 2008, zadanie 16)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Tablica $n \times n$ jest wypełniona liczbami 0 i 1, tak że każdy podzbiór n pól, z których żadne dwa nie leżą w tej samej kolumnie ani w tym samym wierszu, zawiera co najmniej jedno pole z liczbą 1. Udowodnić, że można tak wybrać k wierszy oraz l kolumn, że $k + l > n$ oraz w każdym polu leżącym jednocześnie w wybranym wierszu i w wybranej kolumnie jest wpisane 1.

Zadanie 7.
Graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$ jest spójny i z każdego wierzchołka wychodzi przynajmniej jedna krawędź. Dla każdej krawędzi $\{a, b\} \in E$ zachodzi nierówność $\deg a \geqslant \deg b$. Udowodnić, że w tym grafie istnieje skojarzenie pełne z A do B.

Zadanie 8.
Dana jest prostokątna tablica $m \times n$, przy czym $n > m$. W każde pole tej tablicy wpisano nieujemną liczbę rzeczywistą, tak że każda kolumna zawiera przynajmniej jedną liczbę dodatnią. Wykazać, że istnieje takie pole, w które wpisano liczbę dodatnią, że suma liczb w wierszu zawierającym to pole jest większa niż suma liczb w kolumnie zawierającej to pole.

Zadanie 9. (WOOT 2011)
W pola planszy $m \times n$ $(m, n \geqslant 2)$ wpisano kolejne liczby całkowite od 1 do mn. W jednym ruchu można dowolnie zmienić kolejność liczb osobno w każdym wierszu, albo w każdej kolumnie. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę k, że w co najwyżej k ruchach można osiągnąć dowolną permutację liczb na planszy.

Zadanie 10. (Mszana 2013, zadanie 7)
Na pewnej planecie żyje populacja kosmitów, w której występują trzy różne płcie. Małżeństwo to trójka kosmitów, po jednym z każdej płci, wśród których każda para się lubi (relacja ta jest symetryczna). Wiadomo, że populacja liczy $3n$ kosmitów, po n z każdej płci, oraz dla pewnego $0 \leqslant k \leqslant n$ każdy kosmita lubi co najmniej k kosmitów z każdej płci różnej od jego. Kosmici chcą utworzyć jak najwięcej różnych małżeństw, przy czym każdy kosmita może należeć co najwyżej do jednego małżeństwa. Udowodnić, że

(a) Jeżeli n jest liczbą parzystą oraz $k = n/2$, to może nie dać się utworzyć nawet jednego małżeństwa.

(b) Jeżeli $k \geqslant 3n/4$, to można utworzyć n rozłącznych małżeństw.

Zadanie 11. (IMO Shortlist 2010 C2)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 4$. Na pewnej planecie znajduje się 2^n państw. Każde państwo ma flagę szerokości n i wysokości 1, składającą się z n kwadratów 1×1, z których każdy jest żółty lub niebieski. Żadne dwa kraje nie mają takiej samej flagi. Zbiór n flag nazwiemy *zróżnicowanym*, jeśli można je ułożyć w kwadrat $n \times n$, tak aby wszystkie pola na głównej przekątnej były tego samego koloru. Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą $M \geqslant 1$ o tej własności, że z każdych M różnych flag można wybrać n flag tworzących zbiór zróżnicowany.

Zadanie 12. (Mszana 2021, mecz matematyczny)
Danych jest n smerfów uwięzionych przez Gargamela oraz $2n-1$ czapek $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}$. Gargamel zakłada każdemu smerfowi jedną z czapek. Każdy smerf widzi, jakie czapki są na głowach pozostałych $n-1$ smerfów, ale nie widzi, którą czapkę założył na jego głowę Gargamel. Następnie Gargamel pyta każdego smerfa, którą czapkę ma na głowie. Jeśli co najmniej jeden smerf odpowie poprawnie, to wszystkie smerfy zostaną wypuszczone.

W przeciwnym wypadku pozostaną zamknięte w zamku Gargamela. Smerfy mogą ustalić strategię wcześniej, jednak po założeniu czapek nie mogą się komunikować. Rozstrzygnąć, czy istnieje strategia gwarantująca smerfom wyjście na wolność.

Zadanie 13.
W Matlandii znajduje się n miast. Pomiędzy każdymi dwoma z nich oferowane jest połączenie lotnicze. Koszt takiego połączenia jest taki sam w obie strony, ale koszty różnych połączeń są zawsze różne. Kajko i Kokosz chcą odwiedzić każde miasto dokładnie raz. Kajko zaczyna w mieście A i zawsze wybiera najtańsze połączenie z miasta, w którym się obecnie znajduje, do miasta, w którym jeszcze nie był. Kokosz zaczyna w mieście B i zawsze wybiera najdroższe połączenie z miasta, w którym się obecnie znajduje, do miasta, w którym jeszcze nie był. Pokazać, że koszt podróży Kajka nie może być większy od kosztu podróży Kokosza.

Zadanie 14. (IMO Shortlist 2006 C6)
Plansza w kształcie trójkąta równobocznego o boku n składa się z n^2 pól w kształcie trójkątów równobocznych o boku 1. Pomalowano ją na biało i czarno w ten sposób, że żadne dwa różne pola mające wspólny bok nie są tego samego koloru, przy czym narożniki planszy są białe. Następnie z planszy wycięto n białych pól. Udowodnić, że pozostałą planszę można pokryć rombami o boku 1 i kątach $60°$, $120°$ wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego trójkąta równobocznego składającego się z $k^2 \leqslant n^2$ pól, którego narożniki są białe, wycięto co najwyżej k pól.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań:
Bartosz Kotwicki*, Szymon Adamek, Julian Kuryłłowicz-Kaźmierczak, Karol Musieliński, Albert Siekański.

Zadanie 1.
Dane są takie zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ liczb rzeczywistych, że suma dowolnych k z nich ma co najmniej k elementów dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$. Wykazać, że istnieją takie parami różne liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ zachodzi $a_i \in A_i$.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$, przy czym wierzchołki należące do zbioru A będą reprezentować zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a wierzchołki należące do zbioru B będą reprezentować elementy zbioru

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

Każdy zbiór łączymy krawędziami z jego elementami. Wybierzmy teraz dowolny podzbiór $S \subseteq A$. Założenie mówi wówczas dokładnie, że $|S| \leqslant |N(S)|$. Wobec tego spełnione są założenia twierdzenia Halla, co pozwala nam uzyskać skojarzenie pełne

$$M = \{(A_i, a_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Z definicji skojarzenia liczby a_i są różne. Ponadto wprost z definicji grafu $a_i \in A_i$. To kończy dowód.

Zadanie 2. (AMSP C3 2013)
Na szachownicy $n \times n$ w każdym rzędzie i w każdej kolumnie stoi dokładnie k figur dla pewnego ustalonego $1 \leqslant k \leqslant n$. Wykazać, że możemy tak wybrać n figur, aby żadne dwie z nich nie stały w jednym rzędzie, ani w jednej kolumnie.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$, gdzie wierzchołki należące do zbioru A będą reprezentować kolumny, a wierzchołki należące do zbioru B będą reprezentować wiersze. Kolumnę łączymy krawędzią z wierszem wtedy i tylko wtedy, gdy na ich przecięciu stoi figura.

Z warunków zadania wynika, że $|A| = |B|$ oraz wszystkie wierzchołki są stopnia k. Niech S będzie dowolnym podzbiorem zbioru A. Wówczas ze zbioru S wychodzi $k|S|$ krawędzi, analogicznie ze zbioru $N_G(S)$ wychodzi $k|N_G(S)|$ krawędzi. Zauważmy również, że z definicji zbioru $N_G(S)$ każda krawędź, która wychodzi ze zbioru S ma drugi koniec w $N_G(S)$. Zatem

$$k|S| \leqslant k|N_G(S)|,$$

czyli spełniony jest warunek Halla. Czytelnik zechce przekonać się, że krawędzie uzyskanego skojarzenia doskonałego odpowiadają odpowiednio rozmieszonym figurom.

Zadanie 3.
W 2025 roku do finału Olimpiady Matematycznej zakwalifikowano 2025 zawodników. Do sprawdzania zadań finałowych oddelegowana została pewna liczba sprawdzających. Wiadomo, że każdy finalista nie zna co najmniej 45 sprawdzających. Pokazać, że można tak przypisać sprawdzającym finalistów, których prace mają sprawdzić, że spełnione są jednocześnie następujące warunki.

(1) Prace każdego finalisty są sprawdzane przez sprawdzającego, którego ten nie zna.
(2) Każdy sprawdzający sprawdza prace co najwyżej 45 finalistów.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$, przy czym wierzchołki należące do zbioru A będą reprezentować finalistów, a wierzchołki należące do B – sprawdzających. Wierzchołek $a \in A$ łączymy krawędzią z wierzchołkiem $b \in B$ wtedy i tylko wtedy, gdy finalista a nie zna sprawdzającego b. Z założenia mamy $\deg a \geqslant 45$ dla każdego $a \in A$ oraz $|A| = 2025$.

Rozpatrzmy teraz graf dwudzielny $G' = (A \cup B', E')$, otrzymany z G w ten sposób, że każdy wierzchołek $b \in B$ zastępujemy 45 jego kopiami. Dla każdej krawędzi $\{a, b\} \in E$ oraz każdej kopii wierzchołka b dodajemy krawędź łączącą wierzchołek a z tą kopią. Innymi słowy, każdy wierzchołek $a \in A$ jest połączony ze wszystkimi kopiami wierzchołków ze zbioru B, z którymi był połączony w grafie G. Zauważmy, że teraz dla każdego $a \in A$ zachodzi

$$\deg_{G'} a = 45 \deg_G a \geqslant 2025.$$

Niech $S \subseteq A$. Wówczas dla każdego $a \in S$ oczywiście

$$|N_{G'}(S)| \geqslant \deg_{G'} a \geqslant 2025 = |A| \geqslant |S|.$$

Zatem spełniony jest warunek Halla. Otrzymane skojarzenie pełne przypisuje każdemu finaliście jednego z dozwolonych sprawdzających, ponadto każdy sprawdzający został przypisany co najwyżej 45 razy.

Zadanie 4.
W grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$ wszystkie wierzchołki są stopnia d. Ponadto $|A| = |B|$. Znaleźć najmniejszą liczbę krawędzi, których usunięcie spowoduje, że w G nie będzie już skojarzenia doskonałego.

Rozwiązanie:
Możemy oczywiście usunąć d krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Przypuśćmy, że da się usunąć mniej krawędzi bez pozostawienia skojarzenia doskonałego. Niech $G' = (A \cup B, E')$ będzie grafem powstałym w wyniku takiej operacji. Na mocy twierdzenia Halla istnieje taki podzbiór $S \subseteq A$, że

$$|S| - 1 \geqslant |N_{G'}(S)|.$$

Rozważmy teraz krawędzie grafu G' między zbiorami S i $N_{G'}(S)$. Z każdego wierzchołka należącego do zbioru $N_{G'}(S)$ wychodzi nie więcej niż $m := \min\{|S|, d\}$ takich krawędzi. Zatem wszystkich tych krawędzi jest maksymalnie $m(|S| - 1)$. Jednocześnie są to wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołków w S, których w grafie G było $d|S|$. Stąd

$$d|S| - m(|S| - 1) < d.$$

Jednak $m \leqslant d$, więc

$$d|S| - m(|S| - 1) \geqslant d|S| - d(|S| - 1) = d.$$

Wobec otrzymanej sprzeczności niemożliwe jest usunięcie mniej niż d krawędzi.

Zadanie 5. (Putnam 2012 B3)
W turnieju wzięło udział $2n$ drużyn. Każdego z $2n - 1$ dni każda drużyna rozegrała jeden mecz, a w całym turnieju każda para drużyn zagrała ze sobą dokładnie raz. Udowodnić, że można tak wybrać $2n - 1$ różnych drużyn $T_1, T_2, \ldots, T_{2n-1}$, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant 2n - 1$ drużyna T_i wygrała swój mecz i-tego dnia.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf $G = (A \cup B, E)$, przy czym zbiór A będzie reprezentował dni, a zbiór B będzie reprezentował drużyny. Dzień a i drużynę b łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy drużyna b wygrała swój mecz a-tego dnia. Teza jest równoważna istnieniu skojarzenia pełnego z A do B. Przypuśćmy, że takie skojarzenie nie istnieje. Wówczas na mocy twierdzenia Halla istnieje taki podzbiór $S \subseteq A$, że $|S| > |N(S)|$.

Ponieważ $|N(S)| < |S| < 2n = |B|$, nie wszystkie drużyny należą do $N(S)$. Weźmy zatem dowolną drużynę spoza zbioru $N(S)$. Drużyna ta każdego z dni w S przegrała swój mecz. Wobec tego istnieje $|S|$ drużyn, które wygrały mecz pewnego dnia ze zbioru S. Stąd jednak $|N(S)| \geqslant |S|$ – sprzeczność.

Zadanie 6. (Zwardoń 2008, zadanie 16)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Tablica $n \times n$ jest wypełniona liczbami 0 i 1, tak że każdy podzbiór n pól, z których żadne dwa nie leżą w tej samej kolumnie ani w tym samym wierszu, zawiera co najmniej jedno pole z liczbą 1. Udowodnić, że można tak wybrać k wierszy oraz l kolumn, że $k + l > n$ oraz w każdym polu leżącym jednocześnie w wybranym wierszu i w wybranej kolumnie jest wpisane 1.

Rozwiązanie:
Rozważmy graf $G = (A \cup B, E)$, gdzie zbiór A będzie reprezentował wiersze, a B – kolumny. Wiersz i kolumnę łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy na ich przecięciu jest pole z liczbą 0.

Wówczas z założenia wynika, że w grafie G nie istnieje skojarzenie rozmiaru n. Zatem na mocy twierdzenia Halla istnieje taki podzbiór wierszy $S \subseteq A$, że

$$|S| > |N(S)|.$$

Rozważmy teraz kolumny $C = B \setminus N(S)$. Wtedy

$$|S| + |C| = |S| + (n - |N(S)|) > n$$

oraz z definicji grafu G na przecięciu wiersza z S oraz kolumny z C znajduje się liczba 1. To kończy dowód.

1	1	1	0	1
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0

Zadanie 7.
Graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$ jest spójny i z każdego wierzchołka wychodzi przynajmniej jedna krawędź. Dla każdej krawędzi $\{a, b\} \in E$ zachodzi nierówność $\deg a \geqslant \deg b$. Udowodnić, że w tym grafie istnieje skojarzenie pełne z A do B.

Rozwiązanie:
Przypiszmy każdemu wierzchołkowi $a \in A$ wartość $1/\deg a$ oraz każdemu wierzchołkowi $b \in B$ wartość $1/\deg b$. Niech S będzie dowolnym podzbiorem zbioru A. Niech E_S będzie zbiorem krawędzi wychodzących z wierzchołków zbioru S. Rozważmy sumy

$$S_1 = \sum_{\{a,b\}} \frac{1}{\deg a} \quad \text{oraz} \quad S_2 = \sum_{\{a,b\}} \frac{1}{\deg b},$$

przy czym sumowanie przebiega po wszystkich krawędziach $\{a, b\} \in E_S$, $a \in A$, $b \in B$. Z założenia mamy $S_1 \leqslant S_2$. Zauważmy, że S_1 zlicza $1/\deg a$ dla każdego wierzchołka $a \in S$ dokładnie $\deg a$ razy, więc $S_1 = |S|$. Podobnie S_2 zlicza $1/\deg b$ dla każdego $b \in N(S)$ nie więcej niż $\deg b$ razy, więc $S_2 \leqslant |N(S)|$. Stąd natychmiast

$$|S| = S_1 \leqslant S_2 \leqslant |N(S)|.$$

Wystarczy zatem powołać się na twierdzenie Halla.

Zadanie 8.
Dana jest prostokątna tablica $m \times n$, przy czym $n > m$. W każde pole tej tablicy wpisano nieujemną liczbę rzeczywistą, tak że każda kolumna zawiera przynajmniej jedną liczbę dodatnią. Wykazać, że istnieje takie pole, w które wpisano liczbę dodatnią, że suma liczb w wierszu zawierającym to pole jest większa niż suma liczb w kolumnie zawierającej to pole.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że istnieje tablica, dla której teza jest nieprawdziwa. Spośród takich tablic weźmy taką tablicę $m \times n$, aby liczba m była najmniejsza możliwa. Oznaczmy sumę liczb w i-tym wierszu przez A_i oraz sumę liczb w i-tej kolumnie przez B_i. Ponadto niech $f(i, j)$ oznacza liczbę wpisaną w pole (i, j), czyli w i-tym wierszu i j-tej kolumnie. Wówczas $A_i \leqslant B_j$, jeśli tylko $f(i, j) > 0$.

Rozpatrzmy graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$, przy czym zbiór A reprezentuje wiersze, a B reprezentuje kolumny. Wiersz i kolumnę łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy na ich przecięciu znajduje się liczba dodatnia. Z założenia każdy wierzchołek ze zbioru B ma co najmniej jednego sąsiada.

Jeśli w G istnieje skojarzenie pełne ze zbioru A do zbioru B, to suma liczb w wierszach tego skojarzenia jest nie większa niż suma liczb w kolumnach skojarzenia. Jednak pierwsza z nich to suma wszystkich liczb w tablicy, a druga jest ściśle mniejsza, ponieważ $n > m$ i każda kolumna zawiera przynajmniej jedną liczbę dodatnią.

Wobec tego w grafie G nie istnieje skojarzenie pełne. Wówczas na mocy twierdzenia Halla istnieje taki podzbiór $S \subseteq A$, że $|S| > |N(S)|$. Niemożliwe jest przy tym $|S| = |A|$, ponieważ wtedy z założenia $N(A) = B$ i $|B| > |A|$. Usuńmy teraz wszystkie wiersze z S i kolumny z $N(S)$. Otrzymamy w ten sposób tablicę $(m-|S|)\times(n-|N(S)|)$, przy czym

$$0 < m - |S| < n - |N(S)|.$$

Wobec definicji zbioru $N(S)$ z żadnej kolumny ze zbioru $B\setminus N(S)$ nie usunęliśmy żadnej liczby dodatniej. Zatem żaden wiersz nie zwiększył sumy wpisanych w niego liczb, a w kolumnach suma nie zmieniła się. Otrzymaliśmy zatem kontrprzykład o ściśle mniejszej liczbie wierszy, wbrew minimalności m. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 9. (WOOT 2011)
W pola planszy $m\times n$ $(m, n \geqslant 2)$ wpisano kolejne liczby całkowite od 1 do mn. W jednym ruchu można dowolnie zmienić kolejność liczb osobno w każdym wierszu, albo w każdej kolumnie. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę k, że w co najwyżej k ruchach można osiągnąć dowolną permutację liczb na planszy.

Rozwiązanie:
Czytelnik zechce znaleźć planszę o $m = n = 2$, dla której $k \geqslant 3$. Zauważmy, że stąd $k \geqslant 3$ dla wszystkich m i n.

Pozostało udowodnić, że $k = 3$ jest wystarczające. Niech P będzie dowolnym ustawieniem liczb na planszy i dla każdej liczby $x \in \{1,\ldots,mn\}$ określmy $s(x)$ oraz $t(x)$ – numery wierszy, w których znajduje się ta liczba odpowiednio na wyjściowej planszy oraz w P. Rozważmy wówczas graf (być może z wielokrotnymi krawędziami) $G = (S \sqcup T, E)$, przy czym

$$S = T = \{1,\ldots,m\} \quad \text{i} \quad E = \{(s(x), t(x)) \mid x \in \{1,\ldots,mn\}\}.$$

Zauważmy, że każdy wierzchołek grafu G jest stopnia n. Uogólniamy teraz rozumowanie z Zadania 2, aby wykazać że spełniony jest warunek Halla. Czytelnik zechce przekonać się, że twierdzenie to można stosować także, jeśli w grafie występują krawędzie wielokrotne. Zatem istnieje skojarzenie doskonałe z S do T.

Usuńmy teraz z grafu G krawędzie tego skojarzenia, otrzymując graf regularny stopnia $n-1$. Zauważmy, że na mocy powyższego rozumowania w powstałym grafie ponownie możemy wskazać skojarzenie doskonałe. Krok ten powtarzamy, aż otrzymamy rozkład

$$E = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$$

zbioru krawędzi E na sumę rozłącznych skojarzeń doskonałych.

Wykonajmy teraz następujące ruchy na wyjściowej planszy. Dla każdego $r \in \{1,\ldots,m\}$ każde ze skojarzeń M_j zawiera dokładnie jedną krawędź o początku w $r \in S$. Wykonajmy zatem ruch na wierszach, tak aby liczba odpowiadająca krawędzi należącej do M_j znalazła się w kolumnie j. Ponieważ skojarzenia M_j są doskonałe, po tym kroku w każdej kolumnie numery docelowych wierszy $t(x)$ są różne. Umieśćmy zatem wszystkie liczby we właściwych wierszach, wykonując ruch na kolumnach. Możemy teraz wykonać ruch na wierszach, uzyskując docelowe ustawienie P. Wobec dowolności wyboru P, liczba $k = 3$ ma żądaną własność.

Zadanie 10. (Mszana 2013, zadanie 7)
Na pewnej planecie żyje populacja kosmitów, w której występują trzy różne płcie. Małżeństwo to trójka kosmitów, po jednym z każdej płci, wśród których każda para się lubi (relacja ta jest symetryczna). Wiadomo, że populacja liczy $3n$ kosmitów, po n z każdej płci, oraz dla pewnego $0 \leqslant k \leqslant n$ każdy kosmita lubi co najmniej k kosmitów z każdej płci różnej od jego. Kosmici chcą utworzyć jak najwięcej różnych małżeństw, przy czym każdy kosmita może należeć co najwyżej do jednego małżeństwa. Udowodnić, że

(a) Jeżeli n jest liczbą parzystą oraz $k = n/2$, to może nie dać się utworzyć nawet jednego małżeństwa.
(b) Jeżeli $k \geqslant 3n/4$, to można utworzyć n rozłącznych małżeństw.

Rozwiązanie:
Niech X, Y, Z będą zbiorami kosmitów każdej z płci.

(a) Podzielmy każdy z tych zbiorów na dwa rozłączne i równoliczne podzbiory

$$X = X_1 \cup X_2, \qquad Y = Y_1 \cup Y_2, \qquad Z = Z_1 \cup Z_2.$$

Niech sympatie będą dokładnie między parami

$$X_1 \text{ i } Y_1,\ Y_1 \text{ i } Z_1,\ Z_1 \text{ i } X_2,\ X_2 \text{ i } Y_2,\ Y_2 \text{ i } Z_2,\ Z_2 \text{ i } X_1$$

oraz niech poza nimi nie będzie żadnych innych sympatii. Wówczas każdy kosmita lubi dokładnie $k = n/2$ kosmitów każdej z dwóch pozostałych płci. Zauważmy jednak, że małżeństwo odpowiadałoby trójkątowi złożonemu z jednego wierzchołka z X, jednego z Y i jednego z Z. Tymczasem w rozważanym grafie każdy cykl ma długość podzielną przez 6.

(b) Najpierw rozpatrzmy graf dwudzielny między X i Y, w którym krawędź oznacza sympatię. Pokażemy, że spełniony jest warunek Halla. Weźmy dowolny podzbiór $S \subseteq X$. Jeśli $|S| \leqslant n/2$, to dla każdego $x \in S$ mamy

$$|N(S)| \geqslant \deg x \geqslant 3n/4 \geqslant |S|.$$

Jeśli zaś $|S| > n/2$, to dla każdego $y \in Y$ zachodzi

$$\deg y \geqslant 3n/4 > n - |S| = |X \setminus S|,$$

więc y musi mieć sąsiada w S. Wobec dowolności y otrzymujemy $N(S) = Y$, czyli znów $|N(S)| \geqslant |S|$. Z twierdzenia Halla istnieje więc skojarzenie doskonałe między X i Y. Otrzymujemy n rozłącznych par

$$V = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}.$$

Teraz zbudujmy graf dwudzielny między V i Z, przy czym para $(x, y) \in V$ jest połączona z $z \in Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy z lubi zarówno x, jak i y. Każda para $(x, y) \in V$ ma co najmniej

$$\deg x + \deg y - n \geqslant n/2$$

sąsiadów w Z. Analogicznie każdy $z \in Z$ ma co najmniej $n/2$ sąsiadów w V. Znów stosujemy twierdzenie Halla. Jeśli $S \subseteq V$ spełnia $|S| \leqslant n/2$, to natychmiast

$$|N(S)| \geqslant n/2 \geqslant |S|.$$

Z kolei jeśli $|S| > n/2$, to każdy $z \in Z$ ma więcej niż $n - |S| < n/2$ sąsiadów, więc musi mieć sąsiada w S. Stąd $N(S) = Z$. Zatem istnieje skojarzenie doskonałe M między V i Z. Wówczas (x_i, y_i, z_i) dla $((x_i, y_i), z_i) \in M$ to szukane małżeństwa.

Zadanie 11. (IMO Shortlist 2010 C2)
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 4$. Na pewnej planecie znajduje się 2^n państw. Każde państwo ma flagę szerokości n i wysokości 1, składającą się z n kwadratów 1×1, z których każdy jest żółty lub niebieski. Żadne dwa kraje nie mają takiej samej flagi. Zbiór n flag nazwiemy *zróżnicowanym*, jeśli można je ułożyć w kwadrat $n \times n$, tak aby wszystkie pola na głównej przekątnej były tego samego koloru. Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą $M \geqslant 1$ o tej własności, że z każdych M różnych flag można wybrać n flag tworzących zbiór zróżnicowany.

Rozwiązanie:
Udowodnimy najpierw, że $M \geqslant 2^{n-2} + 1$. Można wziąć podzbiór 2^{n-2} flag, w których pierwszy kolor jest żółty, a drugi niebieski. Wtedy niezależnie od konfiguracji na głównej przekątnej w pierwszym wierszu jest kolor żółty, a w drugim wierszu jest kolor niebieski.

Udowodnimy teraz, że $M = 2^{n-2} + 1$ jest wystarczające. Rozważmy prostokąt utworzony przez pewne $2^{n-2} + 1$ flag ułożonych w kolejnych wierszach. Niech K i W będą odpowiednio zbiorem kolumn i wierszy utworzonego prostokąta. Stwórzmy dwa grafy dwudzielne. Pierwszym z nich niech będzie $G = (K \cup W, E)$, przy czym $k \in K$ i $w \in W$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy na przecięciu kolumny k i wiersza w jest niebieski kwadrat. Analogicznie stwórzmy graf $G' = (K \cup W, E')$ dla koloru żółtego.

Jeżeli w którymkolwiek z tych grafów istnieje skojarzenie ze zbioru K do zbioru W, to teza jest spełniona. Przypuśćmy zatem, że tak nie jest. Wtedy na mocy twierdzenia Halla dla pewnych podzbiorów $S, S' \subseteq K$ zachodzą nierówności

$$|S| \geqslant |N_G(S)| + 1 \quad \text{oraz} \quad |S'| \geqslant |N_{G'}(S')| + 1.$$

Najpierw załóżmy, że $S \cap S' \neq \varnothing$, i weźmy $k \in S \cap S'$. Każda flaga ma w kolumnie k albo kolor niebieski, albo żółty, więc każdy wiersz należy do $N_G(S) \cup N_{G'}(S')$. Zatem

$$2^{n-2} + 1 = |W| \leqslant |N_G(S)| + |N_{G'}(S')| \leqslant (|S| - 1) + (|S'| - 1) \leqslant 2n - 2,$$

co nie zachodzi dla $n \geqslant 4$. Wobec tego $S \cap S' = \varnothing$. Niech $c = |S| + |S'|$. Rozważmy teraz te wiersze, które nie należą do $N_G(S) \cup N_{G'}(S')$. W każdym takim wierszu wszystkie pola w kolumnach z S są żółte, a wszystkie pola w kolumnach z S' są niebieskie. Stąd takich flag jest co najwyżej 2^{n-c}. Jednocześnie takich wierszy jest co najmniej

$$\begin{aligned} |W| - |N_G(S)| - |N_{G'}(S')| &\geqslant (2^{n-2} + 1) - (|S| - 1) - (|S'| - 1) \\ &= 2^{n-2} + 3 - c. \end{aligned}$$

Dostajemy więc $2^{n-c} \geqslant 2^{n-2} + 3 - c$. Czytelnik zechce sprawdzić, że powyższa nierówność nie zachodzi dla $2 \leqslant c \leqslant n$. To kończy dowód.

Zadanie 12. (Mszana 2021, mecz matematyczny)
Danych jest n smerfów uwięzionych przez Gargamela oraz $2n - 1$ czapek $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}$. Gargamel zakłada każdemu smerfowi jedną z czapek. Każdy smerf widzi, jakie czapki są na głowach pozostałych $n-1$ smerfów, ale nie widzi, którą czapkę założył na jego głowę Gargamel. Następnie Gargamel pyta każdego smerfa, którą czapkę ma na głowie. Jeśli co najmniej jeden smerf odpowie poprawnie, to wszystkie smerfy zostaną wypuszczone. W przeciwnym wypadku pozostaną zamknięte w zamku Gargamela. Smerfy mogą ustalić strategię wcześniej, jednak po założeniu czapek nie mogą się komunikować. Rozstrzygnąć, czy istnieje strategia gwarantująca smerfom wyjście na wolność.

Rozwiązanie:
Smerfy mogą uciec. Niech A będzie rodziną wszystkich $(n-1)$-elementowych podzbiorów zbioru czapek, które smerfy mogą zobaczyć, a B – rodziną wszystkich n-elementowych podzbiorów. Rozważmy graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$, przy czym wierzchołki $a \in A$ i $b \in B$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $a \subseteq b$. Zauważmy, że

$$|A| = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n} = |B|.$$

Ponadto każdy wierzchołek jest stopnia n, ponieważ każdy zbiór n-elementowy ma n podzbiorów $(n-1)$-elementowych oraz do każdego $(n-1)$-elementowego podzbioru można dodać n-tą czapkę na n sposobów, więc na mocy Zadania 2 istnieje w tym grafie skojarzenie doskonałe.

Strategia wygrywająca smerfów jest następująca. Jeżeli smerf widzi zbiór $n-1$ czapek $a \in A$, to przechodzi po krawędzi w skojarzeniu doskonałym, uzyskując zbiór $a' \in B$ i twierdzi, że ma na głowie jedyny element zbioru $a' \setminus a$. Jeżeli zbiór czapek na głowach smerfów to $b \in B$, a sąsiadem tego zbioru w skojarzeniu jest $a \in A$, to smerf noszący jedyną czapkę ze zbioru $b \setminus a$ odpowie poprawnie na pytanie Gargamela.

Zadanie 13.
W Matlandii znajduje się n miast. Pomiędzy każdymi dwoma z nich oferowane jest połączenie lotnicze. Koszt takiego połączenia jest taki sam w obie strony, ale koszty różnych połączeń są zawsze różne. Kajko i Kokosz chcą odwiedzić każde miasto dokładnie raz. Kajko zaczyna w mieście A i zawsze wybiera najtańsze połączenie z miasta, w którym się obecnie znajduje, do miasta, w którym jeszcze nie był. Kokosz zaczyna w mieście B i zawsze wybiera najdroższe połączenie z miasta, w którym się obecnie znajduje, do miasta, w którym jeszcze nie był. Pokazać, że koszt podróży Kajka nie może być większy od kosztu podróży Kokosza.

Rozwiązanie:
Dla czytelności $v_i v_j$ będziemy oznaczać przejście nieskierowaną krawędzią z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j. Ponadto niech $|v_i v_j|$ oznacza koszt tej krawędzi.

Rozważmy graf dwudzielny $G = (A \sqcup B, E)$, przy czym A oznacza zbiór połączeń, którymi leciał Kajko, a B oznacza zbiór połączeń, którymi leciał Kokosz. Połączenia $a \in A$, $b \in B$ łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy koszt b jest nie mniejszy niż koszt a.

Na mocy twierdzenia Halla wystarczy, że udowodnimy następujący fakt. Dla dowolnego kosztu w, liczba połączeń w A droższych niż w, jest nie większa niż liczba takich połączeń w B.

Ustalmy zatem w. Niech $u_1v_1, \ldots, u_kv_k$ będą wszystkimi połączeniami wybranymi przez Kajka o koszcie większym niż w, wypisanymi w kolejności występowania na jego trasie. Ponadto niech $u_{k+1} = v_k$. Wówczas miasta $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$ występują na trasie Kajka w tej właśnie kolejności. Weźmy teraz dowolne $p < q \leqslant k+1$. W chwili, gdy Kajko znajdował się w mieście u_p, miasto u_q nie było jeszcze odwiedzone, a zatem krawędź u_pu_q prowadziła do miasta jeszcze nieodwiedzonego. Ponieważ Kajko wybrał z u_p najtańsze dozwolone połączenie, mamy

$$|u_pu_q| > |u_pv_p| > w.$$

Oznacza to, że każde dwa miasta ze zbioru $\{u_1, \ldots, u_{k+1}\}$ są połączone krawędzią o koszcie większym niż w.

Rozważmy teraz trasę Kokosza i spójrzmy na miasta $u_1, \ldots, u_{k+1}$ w kolejności, w jakiej odwiedza je Kokosz. Oznaczmy je przez $x_1, \ldots, x_{k+1}$. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$, gdy Kokosz znajduje się w mieście x_i, miasto x_{i+1} nie było jeszcze przez niego odwiedzone. Ponieważ jednak $|x_ix_{i+1}| > w$, istnieje z x_i połączenie do miasta jeszcze nieodwiedzonego o koszcie większym niż w. Kokosz wybiera najdroższe dozwolone połączenie, zatem wybierze połączenie o koszcie większym niż w. Takich sytuacji jest dokładnie k, zatem Kokosz wybiera połączenie o koszcie większym niż w co najmniej k razy. To kończy dowód.

Zadanie 14. (IMO Shortlist 2006 C6)
Plansza w kształcie trójkąta równobocznego o boku n składa się z n^2 pól w kształcie trójkątów równobocznych o boku 1. Pomalowano ją na biało i czarno w ten sposób, że żadne dwa różne pola mające wspólny bok nie są tego samego koloru, przy czym narożniki planszy są białe. Następnie z planszy wycięto n białych pól. Udowodnić, że pozostałą planszę można pokryć rombami o boku 1 i kątach $60°$, $120°$ wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego trójkąta równobocznego składającego się z $k^2 \leqslant n^2$ pól, którego narożniki są białe, wycięto co najwyżej k pól.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że planszę T po wycięciu pól można pokryć rombami. Rozważmy dowolny trójkąt T' o boku k i białych narożnikach zawarty w trójkącie T i niech h oznacza liczbę dziur w trójkącie T'. Każdy romb składa się z dokładnie jednego trójkąta białego oraz jednego trójkąta czarnego. Zauważmy, że trójkąt T' zawiera dokładnie $k(k-1)/2$ czarnych pól oraz każdy romb zawierający czarne pole w trójkącie T' zawiera również białe pole w tym trójkącie. Zatem po usunięciu h białych pól pozostaje ich przynajmniej tyle co czarnych. Ponieważ przed usunięciem jest ich $k(k+1)/2$, otrzymujemy $h \leqslant k$, co było do wykazania.

Udowodnimy teraz wynikanie w drugą stronę. Załóżmy, że dla każdego trójkąta o boku k i białych narożnikach zawartego w trójkącie T liczba dziur w nim nie przekracza k. Podzielmy wszystkie pola planszy na dwa zbiory

(i) C – zbiór wszystkich trójkątów czarnych,

(ii) B – zbiór wszystkich trójkątów białych, które nie są dziurami.

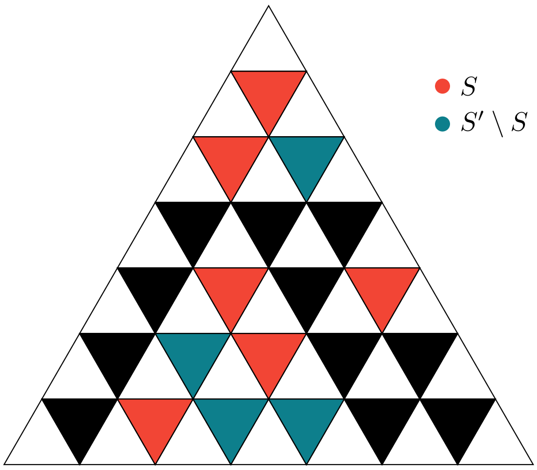
Zauważmy, że romb odpowiada parze trójkątów (c, b) o wspólnym boku, przy czym $c \in C$, $b \in B$. Rozpatrzmy zatem graf dwudzielny $G = (C \cup B, E)$, gdzie krawędziami połączone są wszystkie pary trójkątów w różnych kolorach o wspólnym boku. Zauważmy, że możliwość pokrycia planszy rombami jest równoważna istnieniu skojarzenia doskonałego.

Niech $S \subseteq C$. Jeżeli istnieją dwa czarne pola należące do S o wspólnym wierzchołku, to dodanie trzeciego czarnego pola o tym wierzchołku do S doda co najwyżej jedno pole do zbioru $N(S)$. Zatem wystarczy rozważyć takie S, gdzie nie możemy już wykonać tej operacji.

Czarnym trójkątem nazwijmy zbiór czarnych pól trójkąta równobocznego złożonego z pól, którego narożniki są białe. Stwórzmy graf $G' = (S, E)$, gdzie dwa pola są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy mają one wspólny wierzchołek. Podzielmy zbiór S na spójne składowe $S_1, S_2, \ldots, S_m$ względem grafu G'. Wtedy

$$|N_G(S)| = |N_G(S_1)| + \cdots + |N_G(S_m)|,$$

ponieważ jeżeli pola czarne nie mają wspólnego wierzchołka, to nie mają wspólnego białego sąsiada. Czytelnik zechce przekonać się, że każdy ze zbiorów S_i jest czarnym trójkątem. Jeśli S_i to zbiór czarnych pól trójkąta



o boku b, to $|S_i| = b(b-1)/2$. Na pełnej planszy elementy zbioru S_i mają razem $b(b+1)/2$ sąsiadów. Skoro wszyscy sąsiedzi zbioru S_i należą do trójkąta o boku b i z założenia ma on maksymalnie b dziur, to

$$|N_G(S_i)| \geqslant \frac{b(b+1)}{2} - b = |S_i|.$$

Zatem

$$|N_G(S)| = |N_G(S_1)| + \cdots + |N_G(S_m)| \geqslant |S_1| + \cdots + |S_m| = |S|.$$

Wobec tego spełnione są założenia twierdzenia Halla, co kończy dowód.

Układy równań

Oleksii Iermolenko

Zadania

Zadanie 1.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} x^2 - 2xz + y^2 = 0, \\ x^2 - 2yz + z^2 = 0, \\ y^2 - 2xy + z^2 = 0. \end{cases}$$

Zadanie 2.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} (a-b)c = a+b, \\ (b-c)a = b+c, \\ (c-a)b = c+a. \end{cases}$$

Zadanie 3.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach całkowitych.

$$\begin{cases} a^2 - b = 2b^2 + b, \\ b^2 - c = 2c^2 + c, \\ c^2 - a = 2a^2 + a. \end{cases}$$

Zadanie 4. (74 OM, II etap, zadanie 4)
Dane są parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d, e spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab + b = ac + a, \\ bc + c = bd + b, \\ cd + d = ce + c, \\ de + e = da + d. \end{cases}$$

Udowodnić, że $abcde = 1$.

Zadanie 5.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23, \\ a + 2b + 4c = 22. \end{cases}$$

Zadanie 6. (62 OM, II etap, zadanie 1)
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} (x-y)(x^3+y^3) = 7, \\ (x+y)(x^3-y^3) = 3. \end{cases}$$

Zadanie 7.
Liczby a, b, c różne od 0 spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2 + a = b^2, \\ b^2 + b = c^2, \\ c^2 + c = a^2. \end{cases}$$

Wykazać, że $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Zadanie 8.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ac + a + b + c = 1, \\ bcd + bc + cd + bd + b + c + d = 9, \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 9, \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9. \end{cases}$$

Zadanie 9.
Rozstrzygnąć, dla jakich $n \geqslant 2$ poniższy układ równań ma rozwiązania w liczbach całkowitych.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2, \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3, \\ x_3^2 + x_4^2 + 50 = 16x_3 + 12x_4, \\ \quad \vdots \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n, \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1. \end{cases}$$

Zadanie 10. (73 OM, III etap, zadanie 4)
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} a^3 + b^2c = ac, \\ b^3 + c^2a = ab, \\ c^3 + a^2b = cb. \end{cases}$$

Zadanie 11.
Niech a, b, c, d będą liczbami rzeczywistymi, które spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3, \\ b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4, \\ c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5. \end{cases}$$

Udowodnić, że $a = b = c = d$.

Zadanie 12.
Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 2, \\ 2x^3 + y^3 + 2xy^2 + x^2y + 4x^2 + 3y^2 + x + 3y = 7. \end{cases}$$

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Michał Oprocha*, Michał Gawron.

Zadanie 1.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} x^2 - 2xz + y^2 = 0, \\ x^2 - 2yz + z^2 = 0, \\ y^2 - 2xy + z^2 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Dodajemy równania stronami i otrzymujemy, że

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0.$$

Skoro kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, to

$$x - y = y - z = z - x = 0,$$

czyli $z = y = z$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda trójka $(x, y, z) = (t, t, t)$, przy czym t to liczba rzeczywista, spełnia warunki zadania.

Zadanie 2.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} (a-b)c = a + b, \\ (b-c)a = b + c, \\ (c-a)b = c + a. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Po dodaniu wszystkich równań stronami otrzymujemy

$$0 = (a-b)c + (b-c)a + (c-a)b = 2(a+b+c),$$

więc $a + b + c = 0$. Rozważmy przypadek $abc = 0$. Wtedy bez straty ogólności $c = 0$, ponieważ układ równań jest cykliczny względem zmiennych a, b, c. Wówczas

$$\begin{cases} 0 = a + b, \\ ba = b, \\ -ab = a. \end{cases}$$

Stąd albo $ab = 0$ i wtedy $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, albo $ab \neq 0$ i wtedy $(a, b, c) = (1, -1, 0)$. W pozostałym przypadku, gdy $abc \neq 0$, mamy

$$\begin{cases} (a-b)c = -c, \\ (b-c)a = -a, \\ (c-a)b = -b, \end{cases} \quad \text{więc} \quad \begin{cases} a - b = -1, \\ b - c = -1, \\ c - a = -1. \end{cases}$$

Wówczas jednak dodajemy równania stronami i otrzymujemy $0 = -3$ – sprzeczność. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda z trójek

$$(a, b, c) \in \{(-1, 0, 1),\ (0, 0, 0),\ (0, 1, -1),\ (1, -1, 0)\}$$

spełnia warunki zadania.

Zadanie 3.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach całkowitych.

$$\begin{cases} a^2 - b = 2b^2 + b, \\ b^2 - c = 2c^2 + c, \\ c^2 - a = 2a^2 + a. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności niech $|a| = \max\{|a|, |b|, |c|\}$, ponieważ układ równań jest symetryczny względem zmiennych a, b, c. Wówczas z trzeciego równania mamy

$$a^2 - a \geqslant c^2 - a = 2a^2 + a,$$

co przekształcamy do postaci

$$a(a+2) = a^2 + 2a \leqslant 0.$$

Wobec tego $a \in [-2, 0]$. Skoro a jest całkowite, to wiemy, że $a \in \{-2, -1, 0\}$. Wstawiamy otrzymane wartości a do trzeciego równania i otrzymujemy możliwe wartości zmiennej c. Analogicznie z drugiego równania otrzymujemy możliwe wartości zmiennej b. Czytelnik zechce sprawdzić, że jedynym rozwiązaniem spełniającym warunki zadania jest trójka $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Zadanie 4. (74 OM, II etap, zadanie 4)
Dane są parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d, e spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab + b = ac + a, \\ bc + c = bd + b, \\ cd + d = ce + c, \\ de + e = da + d. \end{cases}$$

Udowodnić, że $abcde = 1$.

Rozwiązanie:
Równoważnie układ równań możemy zapisać jako

$$\begin{cases} b(a+1) = a(c+1), \\ c(b+1) = b(d+1), \\ d(c+1) = c(e+1), \\ e(d+1) = d(a+1). \end{cases}$$

Jeśli $bcd = 0$, to bez straty ogólności niech $b = 0$ (pozostałe przypadki analogicznie). Wtedy z drugiego równania otrzymujemy

$$c = bd + b - bc = 0$$

wbrew temu, że $b \neq c$. Jeśli $(a+1)(c+1)(d+1) = 0$, to bez straty ogólności niech $a = -1$ (pozostałe przypadki analogicznie). Z pierwszego równania mamy

$$c = -ac = a - ab - b = a + b - b = a$$

wbrew założeniu $a \neq c$. Zatem $bcd(a+1)(c+1)(d+1) \neq 0$. Po pomnożeniu wszystkich równań stronami oraz podzieleniu przez tę liczbę, mamy

$$e(b+1) = a(e+1).$$

Otrzymaliśmy piąte, brakujące równanie do wyjściowego układu równań, które daje nam cykliczność całego układu. Równoważnie mamy, że

$$\begin{cases} a(b-c) = a-b, \\ b(b-c) = b-c, \\ c(b-c) = c-d, \\ d(b-c) = d-e, \\ e(b-c) = e-a. \end{cases}$$

Mnożymy teraz wszystkie równania stronami i dzielimy przez $(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)(e-a) \neq 0$. Daje to żądaną równość $abcde = 1$.

Zadanie 5.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23, \\ a + 2b + 4c = 22. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Z wyjściowego układu równań mamy

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + 2b + 4c) = 23 - 2 \cdot 22 = -21.$$

Równoważnie daje to

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-4)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + 2b + 4c) + 21 = 0.$$

Stąd oczywiście

$$a - 1 = b - 2 = c - 4 = 0,$$

więc jedynym rozwiązaniem może być $(a, b, c) = (1, 2, 4)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że ta trójka liczb nie spełnia warunków zadania, więc układ równań nie ma rozwiązań.

Zadanie 6. (62 OM, II etap, zadanie 1)
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} (x-y)(x^3 + y^3) = 7, \\ (x+y)(x^3 - y^3) = 3. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Równoważnie wyjściowy układ równań możemy zapisać jako

$$\begin{cases} (x-y)(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 7, \\ (x+y)(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3. \end{cases}$$

Mnożymy równania stronami, dzielimy przez $(x-y)(x+y) \neq 0$ i dostajemy

$$3(x^2 - xy + y^2) = 7(x^2 + xy + y^2).$$

Następnie upraszczamy wyrazy podobne i dzielimy przez 4. Wtedy

$$\left(y + \frac{1}{2}x\right)(y + 2x) = x^2 + y^2 + \frac{5}{2}xy = 0.$$

Jeśli $y = -x/2$, to po wstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy

$$\frac{21}{16}x^4 = (x-y)(x^3 + y^3) = 7,$$

więc $x^4 = 16/3$. Stąd

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right), \left(-\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) \right\}.$$

Natomiast dla przypadku $y = -2x$ pierwsze równanie przyjmuje postać $x^4 = -1/3$, więc nie ma rozwiązań rzeczywistych. Czytelnik zechce sprawdzić, że obie otrzymane pary spełniają warunki zadania.

Zadanie 7.
Liczby a, b, c różne od 0 spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2 + a = b^2, \\ b^2 + b = c^2, \\ c^2 + c = a^2. \end{cases}$$

Wykazać, że $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Rozwiązanie:
Po dodaniu stronami pierwszego równania z drugim, drugiego z trzecim, trzeciego z pierwszym otrzymujemy

$$\begin{cases} a^2+a\ +b^2+b=b^2+c^2, \\ b^2+b+c^2+c=c^2+a^2, \\ c^2+c+a^2+a\ =a^2+b^2, \end{cases} \qquad \text{więc} \qquad \begin{cases} a\ +b=(c-a)(c+a), \\ b+c=(a-b)(a+b), \\ c+a\ =(b-c)(b+c). \end{cases}$$

Jeśli $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$, to po pomnożeniu stronami wszystkich równań z powyższego układu i podzieleniu przez $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ otrzymujemy tezę. Stąd pozostaje rozważyć przypadek, gdy

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Bez straty ogólności niech $a=-b$ (układ równań jest cykliczny). Jednak wówczas

$$a^2+a=b^2=(-a)^2=a^2,$$

więc $a=0$ wbrew założeniu. To kończy dowód.

Zadanie 8.
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} abc+ab+bc+ac+a+b+c=1, \\ bcd+bc+cd+bd+b+c+d=9, \\ cda+cd+da+ac+c+d+a=9, \\ dab+da+ab+bd+d+a+b=9. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Odejmujemy stronami drugie równanie z trzecim i otrzymujemy

$$(c+1)(d+1)(b-a)=0.$$

Jeśli $c+1=0$, to z pierwszego równania mamy

$$c=(c+1)(ab+a+b)+c=1,$$

czyli $1=-1$ – sprzeczność. Jeśli $d+1=0$, to z czwartego równania

$$d=(d+1)(ab+a+b)+d=9,$$

czyli $0=9$ – także sprzeczność. Wobec tego $a=b$. Analogicznie z trzeciego i czwartego równania otrzymujemy $b=c$. Wówczas z pierwszego równania wnioskujemy, że

$$a^3+3a^2+3a=abc+ab+bc+ac+a\ +b+c=1.$$

Stąd

$$(a+1)^3-2=(a^3+3a^2+3a+1)-2=0,$$

więc $a=\sqrt[3]{2}-1$. Wówczas z czwartego równania

$$d(a^2+2a+1)+a^2+2a=dab+da+ab+bd+d+a+b=9.$$

Wiemy, że $a^2+2a=\sqrt[3]{4}-1$, więc $d=5\sqrt[3]{2}-1$. Czytelnik zechce sprawdzić, że czwórka

$$(a,b,c,d)=\left(\sqrt[3]{2}-1,\, \sqrt[3]{2}-1,\, \sqrt[3]{2}-1, 5\sqrt[3]{2}-1\right)$$

spełnia warunki zadania.

Zadanie 9.
Rozstrzygnąć, dla jakich $n \geqslant 2$ poniższy układ równań ma rozwiązania w liczbach całkowitych.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2, \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3, \\ x_3^2 + x_4^2 + 50 = 16x_3 + 12x_4, \\ \quad \vdots \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n, \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że k-te równanie możemy zapisać jako

$$(x_k - 6)^2 + (x_{k+1} - 8)^2 = 50.$$

Oznacza to, że punkt (x_k, x_{k+1}) musi leżeć na okręgu w układzie współrzędnych o środku w punkcie $(6, 8)$ oraz promieniu $\sqrt{50}$. Wszystkie punkty kratowe leżące na tym okręgu to

$$\begin{gathered} (1,5),\ (1,7),\ (3,1),\ (3,11),\ (7,-1),\ (7,13), \\ (9,-1),\ (9,13),\ (13,1),\ (13,11),\ (15,5),\ (15,7). \end{gathered}$$

Skoro rzędna pary (x_k, x_{k+1}) wyznacza odciętą pary (x_{k+1}, x_{k+2}), to jedyne możliwe wartości x_k należą do zbioru $\{1, 7, 13\}$. Stąd każda z par (x_k, x_{k+1}) jest jedną z trzech poniższych

$$(1,7),\ (7,13),\ (13,7).$$

Oznacza to, że x_1, x_2, $\ldots$, x_n są kolejno cyklicznie równe 1, 7, 13. Wobec tego liczba n jest podzielna przez 3. Pokazaliśmy jednocześnie konstrukcję rozwiązania dla każdej liczby n podzielnej przez 3.

Zadanie 10. (73 OM, III etap, zadanie 4)
Rozwiązać poniższy układ równań w liczbach rzeczywistych.

$$\begin{cases} a^3 + b^2c = ac, \\ b^3 + c^2a = ab, \\ c^3 + a^2b = cb. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Na początek rozważmy przypadek $abc = 0$. Bez straty ogólności $c = 0$ (układ równań jest cykliczny). Z pierwszego równania $a^3 = 0$, więc $a = 0$, a z drugiego równania $b^3 = 0$, więc $b = 0$. Oznacza to, że $a = b = c = 0$.

Niech teraz $abc \neq 0$. Wówczas z pierwszego równania

$$(a^2 - c)a = -b^2c,$$

a z trzeciego równania otrzymujemy

$$c^3 = -b(a^2 - c).$$

Skoro $abc \neq 0$, to strony powyższych równań są różne od 0. W taki sposób po podzieleniu powyższych równań stronami otrzymujemy równość

$$-\frac{b^2c}{a} = a^2 - c = -\frac{c^3}{b}.$$

Wobec tego $b^3 = ac^2$. Wtedy z drugiego równania mamy

$$(b^2 - a)b = -c^2a = -b^3,$$

a skoro $b \neq 0$, to $a = 2b^2$. Analogicznie dostajemy $b = 2c^2$ oraz $c = 2a^2$, więc

$$a = 2b^2 = 2\left(2c^2\right)^2 = 2^3c^4 = 2^3\left(2a^2\right)^4 = 2^7a^8.$$

Zatem $a^7 = 2^{-7}$, czyli $a = 1/2$. Z wcześniejszych rozważań $b = 2c^2$ oraz $c = 2a^2$, więc $a = b = c = 1/2$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda z trójek

$$(a,b,c) \in \{(0,0,0),\ (1/2,1/2,1/2)\}$$

spełnia warunki zadania.

Zadanie 11.
Niech a, b, c, d będą liczbami rzeczywistymi, które spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3, \\ b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4, \\ c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5. \end{cases}$$

Udowodnić, że $a = b = c = d$.

Rozwiązanie:
Rozważmy równanie

$$x^n + y^n + z^n = 3t^n$$

dla $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ oraz dla pewnego całkowitego dodatniego n.

Załóżmy, że $|t| = \max\{|x|, |y|, |z|, |t|\}$. Jeśli $2 \mid n$ lub $2 \nmid n$ oraz $t \geqslant 0$, to

$$x^n + y^n + z^n = 3t^n \geqslant |x|^n + |y|^n + |z|^n,$$

więc $|x| = |y| = |z| = |t|$. Jeśli $2 \nmid n$ oraz $t < 0$, to

$$x^n + y^n + z^n = 3t^n = -3|t|^n \leqslant -|x|^n - |y|^n - |z|^n,$$

więc $x = y = z = t$. Zatem zawsze $|x| = |y| = |z| = |t|$. Analogicznie rozumujemy w przypadku $|t| = \min\{|x|, |y|, |z|, |t|\}$.

Jeśli

$$|c| \neq \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} \quad \text{lub} \quad |c| \neq \min\{|a|, |b|, |c|, |d|\},$$

to na mocy powyższego rozumowania $|a| = |b| = |c| = |d|$ – sprzeczność. Zatem

$$|c| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} = \min\{|a|, |b|, |c|, |d|\},$$

czyli $|a| = |b| = |c| = |d|$. Wówczas z pierwszego równania $a = b = c = d$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda czwórka postaci $(a, b, c, d) = (t, t, t, t)$, gdzie t to dowolna liczba rzeczywista, spełnia warunki zadania.

Zadanie 12.
Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 2, \\ 2x^3 + y^3 + 2xy^2 + x^2y + 4x^2 + 3y^2 + x + 3y = 7. \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że lewa strona drugiego równania jest równa

$$2y - 3xy + (2x + y + 2)(x^2 + x + y^2 + y) = 2y - 3xy + 2(2x + y + 2) = 4x + 4y - 3xy + 4.$$

Stąd równoważnie układ równań przyjmuje postać

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 2, \\ 4x + 4y - 3xy = 3 \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 0 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 &= 2(4x + 4y - 3xy) - 3(x^2 + x + y^2 + y) = \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 6xy - 5x - 5y = (x + y)(3x + 3y - 5). \end{aligned}$$

Jeśli $x = -y$, to z pierwszego równania mamy

$$2 = x^2 + x + y^2 + y = 2x^2,$$

więc $x^2 = 1$. Zatem $x = \pm 1$, a stąd $y = \mp 1$. Jeśli $3x + 3y - 5 = 0$, to z wcześniej otrzymanego równania otrzymujemy

$$0 = 3(4x + 4y - 3xy - 3) = 12(x + y) - 9xy - 9 = 4 \cdot 5 - 9 - 3x(5 - 3x) = 9x^2 - 15x + 11.$$

Jednak wyróżnik powyższego równania kwadratowego jest równy

$$\Delta = 15^2 - 4 \cdot 9 \cdot 11 = -171,$$

więc układ równań nie ma rozwiązań w tym przypadku. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda z par

$$(x, y) \in \{(-1, 1), (1, -1)\}$$

spełnia warunki zadania.

Ortocentrum

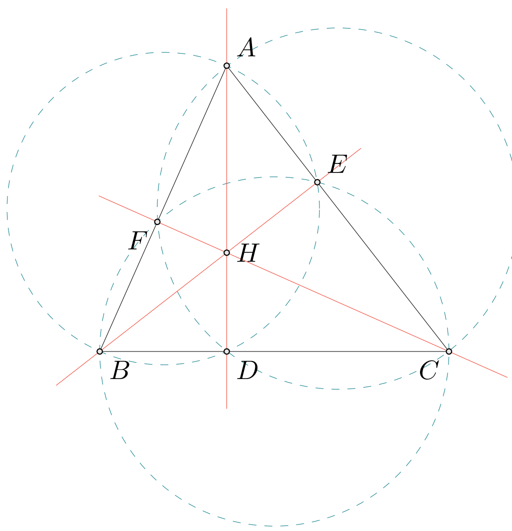
Jakub Stachniak

Głębokie, osobiste refleksje

Ortocentrum jest jednym z najbardziej szczególnych punktów trójkąta. Konfiguracje, które go obejmują, stanowią fundament wiedzy olimpijskiej. Ponadto już samo przeprowadzenie dowodów przedstawionych tu faktów stanowi świetne ćwiczenie, rozwijające umiejętności olimpijskie.

Podczas rozwiązywania zadań należy pamiętać, że konfiguracja rzadko wykonuje za nas całą pracę. Zazwyczaj korzystamy z kilku znanych faktów, następnie czynimy kilka nowych dla nas obserwacji i udowodnienie ich kończy rozwiązanie. Warto jednocześnie pamiętać o takich technikach jak potęga punktu, osie potęgowe, czy rozważenie okręgu o promieniu 0. Przydatna bywa również inwersja. Warto kierować się zasadą, że szersza znajomość technik nigdy nie jest obciążeniem.

Podstawowe pojęcia



Definicja (Wysokość)

Wysokością z wierzchołka A w trójkącie ABC nazywamy prostą przechodzącą przez wierzchołek A i prostopadłą do przeciwległego boku.

Lemat 1 (O istnieniu ortocentrum)

Wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Oznaczmy przez D, E, F spodki wysokości z wierzchołków A, B, C na odpowiednie boki w trójkącie ABC. Niech H będzie punktem przecięcia prostych BE oraz CF. Zauważmy, że punkty B, C, E, F leżą na jednym okręgu, ponieważ $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BEC = 90°$. Analogicznie punkty A, F, H, E leżą na jednym okręgu. Wówczas

$$\sphericalangle HAC = \sphericalangle HAE = \sphericalangle HFE = \sphericalangle CFE = \sphericalangle CBE = 90° - \sphericalangle BCE = \sphericalangle DAC,$$

więc punkty A, H, D są współliniowe, co było do wykazania. □

Definicja (Ortocentrum)

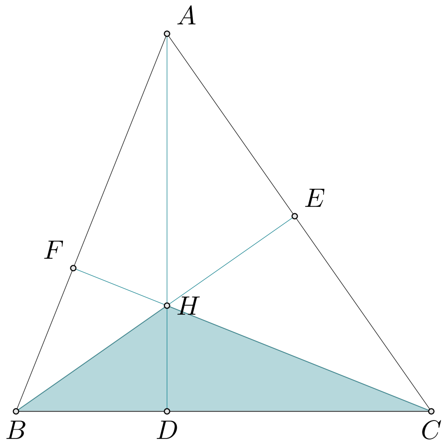
Ortocentrum trójkąta ABC nazywamy punkt przecięcia jego wysokości.

Jasne jest, że każdy trójkąt ma dokładnie jedno ortocentrum.

Lemat 2

Jeżeli H jest ortocentrum trójkąta ABC, to A jest ortocentrum trójkąta HBC.

Dowód. Niech D, E, F będą spodkami wysokości z wierzchołków A, B, C na odpowiednie boki w trójkącie ABC. Z definicji wysokości wiemy, że proste FC oraz AB są prostopadłe. Zatem prosta AB jest wysokością opuszczoną z wierzchołka B na bok HC w trójkącie BCH. Analogicznie prosta EC jest wysokością w tym trójkącie. Oznacza to, że istotnie punkt A, będący przecięciem prostych BF oraz EC, jest ortocentrum tego trójkąta.



□

Definicja (Układ ortyczny)

Punkty A, B, C, H określone jak powyżej tworzą tak zwany *układ ortyczny*.

Konfiguracja z sześcioma okręgami

Niech punkty D, E, F będą spodkami wysokości odpowiednio z punktów A, B, C w trójkącie ABC o ortocentrum H i środku okręgu opisanego O. Mówimy, że trójkąt DEF jest *trójkątem ortycznym* w trójkącie ABC.

Lemat 3

Czworokąty $BCEF$ i $AHEF$ są wpisane w okręgi o średnicach odpowiednio BC i AH.

Jest tak, ponieważ $\sphericalangle BFC = 90° = \sphericalangle BEC$ oraz $\sphericalangle HFA = 90° = \sphericalangle HEA$. Analogiczne zależności zachodzą dla punktów B i C. W istocie ortocentrum, spodki wysokości oraz wierzchołki trójkąta wyznaczają łącznie sześć czworokątów wpisanych w okrąg.

Ćwiczenie 1.
Wykazać, że H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEF.

Ćwiczenie to jest konsekwencją silniejszego lematu.

Lemat 4

Dane są trzy punkty D, E, F na prostych BC, CA, AB, takie że AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie P. Wówczas odcinek AD jest wysokością w trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy jest on dwusieczną kąta $\sphericalangle EDF$.

Dowód. Załóżmy, że proste AD i BC są prostopadłe. Z twierdzenia sinusów w trójkącie ACD otrzymujemy

$$\frac{AE}{EC} = \frac{[AED]}{[ECD]} = \frac{DE \cdot AD \cdot \sin\alpha}{DE \cdot CD \cdot \sin(90^\circ - \alpha)},$$

przy czym $\alpha = \sphericalangle ADE$. Analogicznie dla trójkąta ABD otrzymujemy

$$\frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{AD},$$

przy czym $\beta = \sphericalangle ADF$. Na mocy twierdzenia Cevy mamy

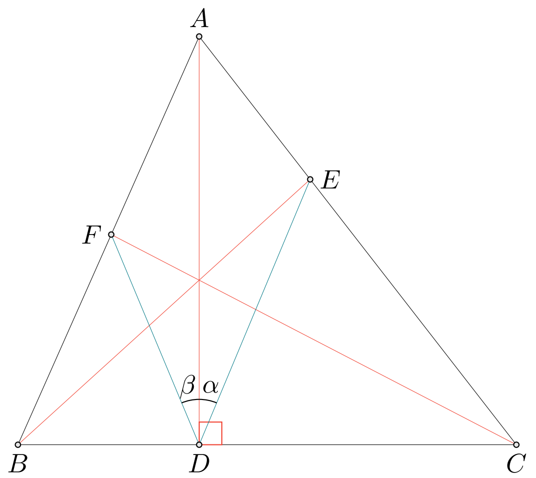
$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin\beta} = \left(\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{AD}\right) \cdot \left(\frac{FB}{AF} \cdot \frac{AD}{BD}\right) = 1,$$

więc $\tan\alpha = \tan\beta$. Skoro $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$, to $\alpha = \beta$.

Pozostało wykazać wynikanie w drugą stronę. Czytelnik zechce sprawdzić, że podobnie do wcześniejszych rozważań otrzymujemy

$$\frac{\sin(180^\circ - 2\alpha - \beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin(180^\circ - 2\alpha - \beta)}{\sin\alpha} = \left(\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{AD}\right) \cdot \left(\frac{FB}{AF} \cdot \frac{AD}{BD}\right) = 1,$$

przy czym $\alpha = \sphericalangle ADE$ oraz $\beta = \sphericalangle EDC$. Stąd $\sin(180^\circ - 2\alpha - \beta) = \sin\beta$, więc $\alpha + \beta = 90^\circ$ – pozostałe przypadki są niemożliwe.



□

Warto zapamiętać powyższy lemat. Jest to jeden z podstawowych lematów w każdym rzetelnym pliku o dwustosunku.

Z własności tej wynika, że boki trójkąta ABC, jako proste prostopadłe do dwusiecznych wewnętrznych trójkąta DEF, są dwusiecznymi zewnętrznymi tego trójkąta. Zatem punkty A, B, C są środkami okręgów dopisanych do trójkąta DEF.

Podobnie trójkąt ABC jest trójkątem ortycznym w trójkącie, którego wierzchołkami są środki okręgów dopisanych do trójkąta ABC.

Lemat 5 (Dualność ortocentrum i środka okręgu wpisanego)

Trójkąt XYZ jest trójkątem ortycznym trójkąta $X'Y'Z'$ wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołkami trójkąta $X'Y'Z'$ są środki okręgów dopisanych do trójkąta XYZ.

Dowód. Wynikanie w prawą stronę już udowodniliśmy. W drugą stronę wystarczy skorzystać z faktu, że prosta prostopadła do dwusiecznej wewnętrznej to dwusieczna zewnętrzna, więc punkty X', Y', Z' to środki okręgów dopisanych do boków trójkąta XYZ. □

Lemat 6

Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A jest styczna do okręgu o średnicy AH.

Dowód. Niech k będzie rozważaną prostą. Wówczas $k \parallel BC$ oraz $BC \perp AH$, czyli prosta k jest także prostopadła do średnicy AH i przechodzi przez punkt A, więc jest styczną, co było do wykazania. □

Powyższy fakt jest dość prosty, ale bywa przydatny, co czyni go wartym zapamiętania. Zauważmy ponadto, że styczna w punkcie H jest równoległa do prostej BC.

Okrąg dziewięciu punktów

Dla ustalenia uwagi rozważamy poniżej tylko trójkąty ostrokątne. Jednak poniższe dowody da się analogicznie przeprowadzić na kątach skierowanych, a zatem dowodzone własności są prawdziwe w każdym trójkącie.

Lemat 7

Odbicia ortocentrum trójkąta ABC względem boków i względem środków boków leżą na okręgu na nim opisanym. Ponadto, jeśli H' jest odbiciem H względem M – środka BC, to AH' jest średnicą okręgu opisanego na ABC.

Dowód. Z okręgu opisanego na czworokącie $AHEF$ otrzymujemy

$$\sphericalangle BHC = \sphericalangle EHF = 180^\circ - \sphericalangle BAC.$$

Jeżeli punkt H' jest odbiciem punktu H względem prostej BC lub przez środek BC, to

$$\sphericalangle BH'C = \sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle BAC,$$

zatem punkt H' leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. W przypadku, gdy punkt H' jest odbiciem względem środka boku, to czworokąt $HBH'C$ jest równoległobokiem, czyli $H'C \parallel HB \perp AC$. Stąd $\sphericalangle ABH' = 90^\circ$, czyli odcinek AH' to średnica okręgu opisanego na trójkącie ABC. □

Lemat 8

Każdy z okręgów $\odot(BHC)$, $\odot(CHA)$, $\odot(AHB)$ ma promień równy promieniowi okręgu $\odot(ABC)$. Okręgi te są odbiciami okręgu $\odot(ABC)$ odpowiednio względem prostych BC, CA, AB.

Dowód. Niech A' będzie odbiciem punktu A względem boku BC oraz D, E, F będą spodkami wysokości odpowiednio z punktów A, B, C. Zachodzi

$$\sphericalangle BCF = \sphericalangle BAD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBE = \sphericalangle CAD,$$

zatem

$$\sphericalangle CA'B = \sphericalangle CAB = 180^\circ - \sphericalangle CHB.$$

Czworokąt $BHCA'$ jest cykliczny, więc okrąg $\odot(BHC)$ istotnie jest odbiciem okręgu $\odot(ABC)$. Analogicznie otrzymujemy tezę dla okręgów $\odot(CHA)$ oraz $\odot(AHB)$. □

Twierdzenie (O sprzężeniu izogonalnym ortocentrum)

W trójkącie ABC zachodzi równość

$$\sphericalangle BAH = \sphericalangle CAO.$$

Analogiczne równości zachodzą przy wierzchołkach B i C.

Dowód. Z kąta środkowego i wpisanego otrzymujemy

$$\sphericalangle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CHA) = 90^\circ - \sphericalangle CBA = \sphericalangle BAH.$$

Analogicznie udowadniamy tezę dla pozostałych wierzchołków. □

Lemat 9

Jeśli punkty O i M są środkami odpowiednio okręgu $\odot(ABC)$ i odcinka BC, to

$$2 \cdot OM = AH.$$

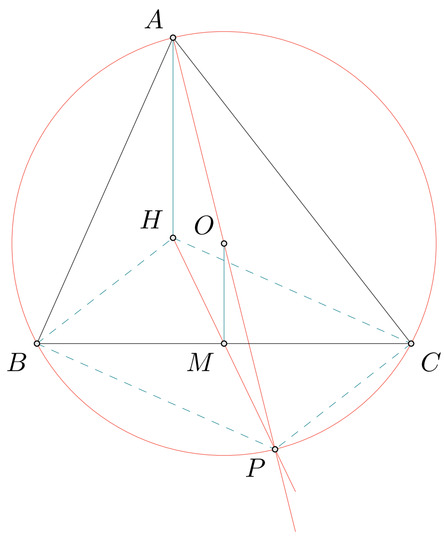
Dowód. Pokażemy, że proste AO i HM przecinają się na okręgu opisanym. Niech prosta AO przecina okrąg opisany na ABC jeszcze w punkcie P. Wtedy z twierdzenia o sprzężeniu izogonalnym

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCF,$$

więc $CH \parallel PB$ oraz

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle PAB = \sphericalangle DAC = \sphericalangle EBC.$$

Stąd czworokąt $PCHB$ jest równoległobokiem oraz odcinek HP dzieli odcinek BC na pół. Zatem punkty H, M, P są współliniowe. Teza wynika teraz z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.



□

Ćwiczenie 2.
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty X oraz Y są ortocentrami trójkątów ABC i DBC. Wykazać, że $AXYD$ jest równoległobokiem.

Na mocy Lematu 7 jednokładność o środku w punkcie H i skali $1/2$ przekształca okrąg opisany na trójkącie ABC w okrąg przechodzący przez spodki wysokości, środki boków oraz środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum. Wynika stąd następujące twierdzenie.

Twierdzenie (O okręgu dziewięciu punktów Eulera/Feuerbacha)

Spodki wysokości, środki boków oraz środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum leżą na jednym okręgu, którego środkiem jest środek odcinka OH. Okrąg ten jest obrazem okręgu opisanego na ABC w jednokładności o środku w H i skali $1/2$. Ponadto, jeśli M i N są środkami odcinków AH i BC, to MN jest jego średnicą (analogicznie dla B i C).

Ćwiczenie 3. (Prosta Steinera)
Pokazać, że jeśli punkt P leży na okręgu opisanym na ABC, to jego odbicia względem boków leżą na jednej prostej, która przechodzi przez ortocentrum ABC.

Lemat 10

Jeśli M jest środkiem boku BC, a BE i CF są wysokościami trójkąta ABC, to ME i MF są stycznymi do okręgu o średnicy AH.

Dowód. Niech S będzie środkiem odcinka AH. Na mocy twierdzenia Feuerbacha kąty $\sphericalangle MES$ i $\sphericalangle MFS$ są proste. Ponadto proste ME i MF są prostopadłe do promieni SE i SF, skąd wynika teza lematu. □

Zadania

Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC z ortocentrum H, wpisany w okrąg ω. Niech M będzie środkiem boku BC, a X punktem przecięcia półprostej MH z okręgiem ω. Dodatkowo niech punkty E i F będą spodkami wysokości poprowadzonych z wierzchołków B i C w trójkącie ABC. Prosta AX przecina prostą BC w punkcie S. Wykazać, że

(a) czworokąt $HEFX$ jest wpisany w okrąg,

(b) proste SH oraz AM są prostopadłe.

Zadanie 5.
Dany jest trójkąt ABC z ortocentrum H, wpisany w okrąg o środku O. Niech M i N będą środkami odpowiednio odcinków BC i AH. Wykazać, że $MN \parallel AO$.

Zadanie 6.
W trójkącie ABC punkty O, O_A, O_B, O_C są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABC, BHC, CHA, AHB. Wykazać, że proste AO_A, BO_B, CO_C mają punkt wspólny leżący na prostej OH.

Zadanie 7. (Poręba wrzesień 2023)
W trójkącie ABC punkty K, L są spodkami dwusiecznych z wierzchołków B i C, a punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC. Prosta KL przecina okrąg opisany na ABC w punktach M oraz N. Wykazać, że okrąg opisany na MIN ma promień dwa razy większy niż okrąg opisany na ABC.

Zadanie 8.
W trójkącie ABC punkty K i L są punktami przecięcia dwusiecznych kątów $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ z bokami AC i AB. Punkty O i J są środkami okręgów odpowiednio opisanego na trójkącie ABC i A-dopisanego. Wykazać, że $JO \perp KL$.

Zadanie 9. (Iran TST 2011)
W ostrokątnym trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest większy niż kąt przy wierzchołku C. Niech M będzie środkiem boku BC, a punkty E i F będą spodkami wysokości z wierzchołków B i C. Oznaczmy K i L jako środki odcinków ME i MF. Punkt T to taki punkt na prostej KL, że $TA \parallel BC$. Pokazać, że $TA = TM$.

Zadanie 10. (IMO Shortlist 2010 G1)
W trójkącie ABC wysokości AD, BE, CF przecinają się w H. Punkt P jest jednym z przecięć prostej EF z okręgiem opisanym na ABC, a punkt Q jest przecięciem prostych BP oraz DF. Wykazać równość $AP = AQ$.

Zadanie 11.
Na trójkącie ostrokątnym ABC opisano okrąg. Oznaczmy środki krótszych łuków BC, CA, AB odpowiednio przez X, Y, Z. Udowodnić, że pole trójkąta ABC jest nie większe od pola trójkąta XYZ.

Zadanie 12. (69 OM, III etap, zadanie 5)
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P. Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q. Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta ABC wychodzącej z wierzchołka A.

Zadanie 13. (IMO 2013 P4)
Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym o ortocentrum w punkcie H. Niech W będzie punktem na BC. Oznaczmy przez E i F spodki wysokości odpowiednio z wierzchołków B i C. Oznaczmy przez ω_1 okrąg opisany na BWF. Niech X będzie takim punktem na ω_1, że WX jest jego średnicą. Analogicznie definiujemy ω_2 jako okrąg opisany na CWE i punkt Y jako punkt na ω_2 taki, że WY jest jego średnicą. Udowodnić, że punkty X, Y i H są współliniowe.

Zadanie 14. (USA TST 2011)
Ostrokątny trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω o środku w punkcie O. Punkt H jest jego ortocentrum, a punkty M i N są środkami boków AB i AC. Półproste MH i NH przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach P i Q. Proste MN i PQ przecinają się w punkcie R. Wykazać, że $OA \perp RA$.

Zadanie 15. (Poręba styczeń 2024)
W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD, BE i CF przecinają się w H. Niech M będzie środkiem BC i załóżmy, że okręgi opisane na EFM i BCH przecinają się w punktach P i Q. Wykazać, że proste EF, PH i MQ przecinają się na okręgu opisanym na ABC.

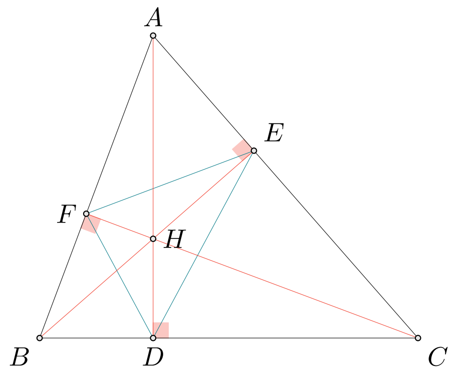
Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Bartosz Trojanowski*, Tomasz Czyżewski, Mirosław Koziak, Bartosz Kotwicki.

Ćwiczenie 1.
Wykazać, że H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEF.

Rozwiązanie:
Wystarczy udowodnić, że H jest przecięciem dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ortycznego DEF. Pokażemy, że $\sphericalangle HFD = \sphericalangle HFE$. Dowód dla dwóch pozostałych par kątów jest analogiczny. Czworokąty $AEHF$ i $BDHF$ są cykliczne, więc

$$\sphericalangle HFE = \sphericalangle HAE = \sphericalangle DAC = 90^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CBE = \sphericalangle DBH = \sphericalangle DFH.$$

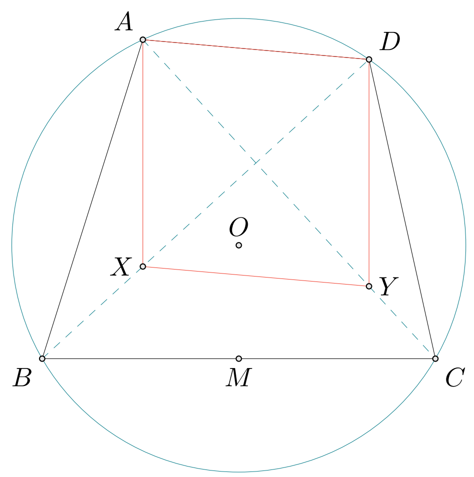


Ćwiczenie 2.
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty X oraz Y są ortocentrami trójkątów ABC i DBC. Wykazać, że $AXYD$ jest równoległobokiem.

Rozwiązanie:
Każda z prostych AX i DY jest prostopadła do BC, więc proste te są równoległe. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, a M – środkiem odcinka BC. Z Lematu 9 wiemy, że

$$AX = 2OM = DY,$$

więc $AXYD$ jest równoległobokiem, co kończy dowód.



Ćwiczenie 3. (Prosta Steinera)
Pokazać, że jeśli punkt P leży na okręgu opisanym na ABC, to jego odbicia względem boków leżą na jednej prostej, która przechodzi przez ortocentrum ABC.

Rozwiązanie:
Niech P_A, P_B, P_C oznaczają odbicia punktu P względem odpowiednio boków BC, CA oraz AB, a kolejno punkty A', B', C' będą rzutami prostokątnymi punktu P na te boki. Z twierdzenia o prostej Simsona punkty A', B', C' są współliniowe. Zauważmy, że punkty te są obrazami punktów P_A, P_B, P_C w jednokładności o skali $1/2$ i środku w punkcie P. Wobec tego odbicia P również są współliniowe.

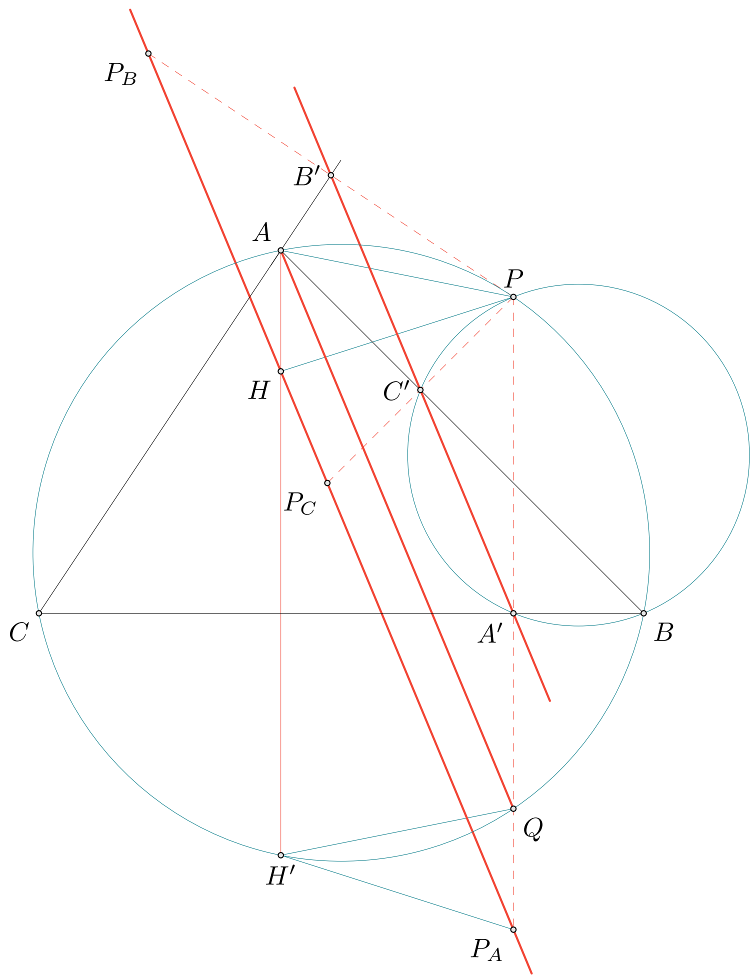
Teraz pokażemy, że H również leży na tej prostej. Niech ω będzie okręgiem opisanym na ABC, Q będzie przecięciem ω z PP_A różnym od P oraz H' odbiciem H względem boku AB. Oczywiście punkt H' leży na okręgu ω oraz czworokąt $APQH'$ jest trapezem równoramiennym, ponieważ jest wpisany w ω oraz $AH' \parallel PQ$. Podobnie czworokąt $HH'P_AP$ jest trapezem równoramiennym. Wobec tego

$$\sphericalangle PP_AH = \sphericalangle H'PP_A = \sphericalangle H'PQ = \sphericalangle AQP.$$

Otrzymaliśmy zatem $QA \parallel HP_A$. Teraz zauważmy, że A' i C' leżą na okręgu o średnicy PB, więc

$$\sphericalangle PA'C' = \sphericalangle PBC' = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PQA,$$

czyli $AQ \parallel A'C' \parallel P_AP_C$. Wobec tego prosta P_AH jest równoległa do prostej Steinera, a to oznacza, że H leży na tej prostej.



Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC z ortocentrum H, wpisany w okrąg ω. Niech M będzie środkiem boku BC, a X punktem przecięcia półprostej MH z okręgiem ω. Dodatkowo niech punkty E i F będą spodkami wysokości

poprowadzonych z wierzchołków B i C w trójkącie ABC. Prosta AX przecina prostą BC w punkcie S. Wykazać, że

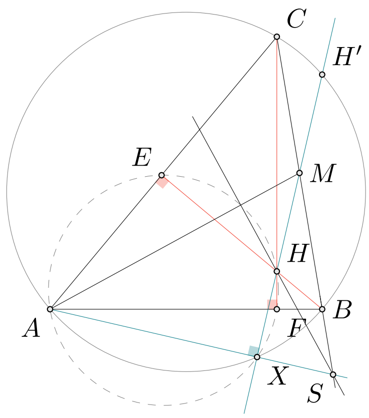
(a) czworokąt $HEFX$ jest wpisany w okrąg,

(b) proste SH oraz AM są prostopadłe.

Rozwiązanie:

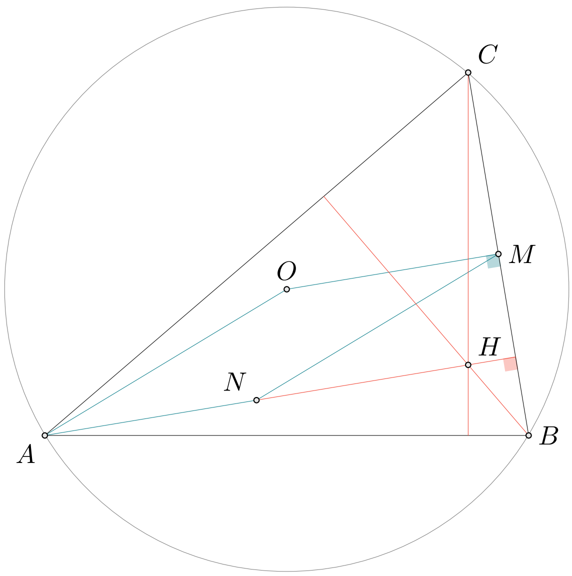
(a) Odbicie punktu H względem M nazwiemy H'. Wówczas z twierdzenia Feuerbacha H' jest antypodą punktu A okręgu ω. Zatem
$$\sphericalangle AXH = \sphericalangle AXH' = 90^\circ = \sphericalangle AFH.$$
Stąd punkt X leży na okręgu $\odot(AFHE)$, czyli w szczególności czworokąt $HEFX$ jest wpisany w okrąg.

(b) Wiemy, że $XH \perp AS$. Ponadto $AH \perp BC$, czyli $AH \perp SM$. Stąd H jest ortocentrum trójkąta ASM, więc $SH \perp AM$.



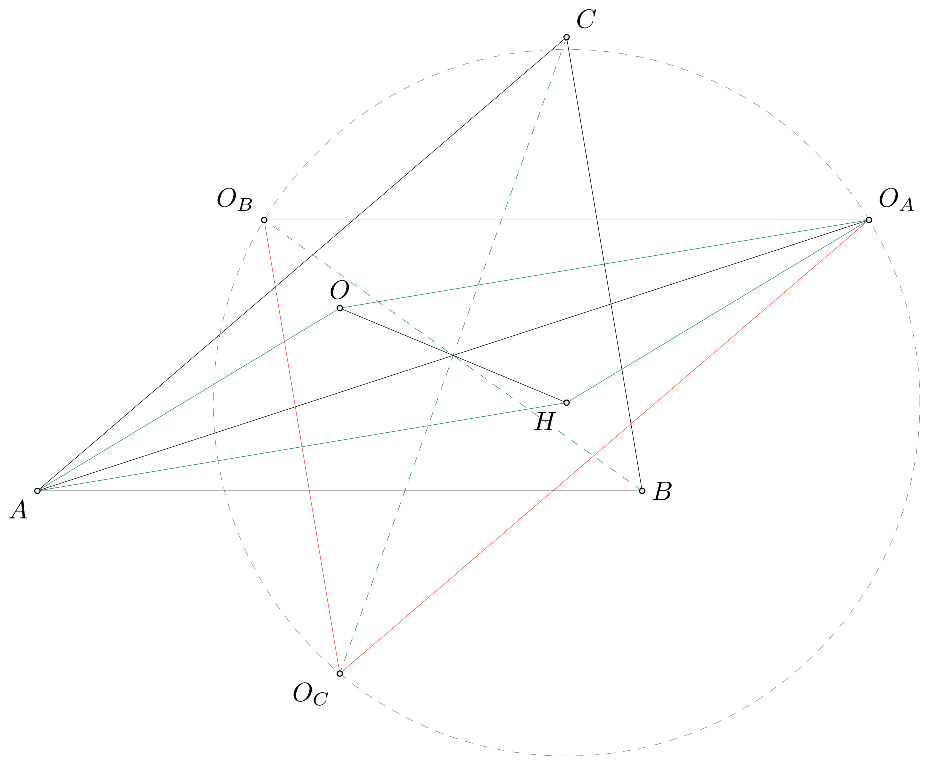
Zadanie 5.
Dany jest trójkąt ABC z ortocentrum H, wpisany w okrąg o środku O. Niech M i N będą środkami odpowiednio odcinków BC i AH. Wykazać, że $MN \parallel AO$.

Rozwiązanie:
Proste AN i OM są oczywiście równoległe. Z Lematu 9 mamy $AN = OM$, więc $ANMO$ jest równoległobokiem.



Zadanie 6.
W trójkącie ABC punkty O, O_A, O_B, O_C są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABC, BHC, CHA, AHB. Wykazać, że proste AO_A, BO_B, CO_C mają punkt wspólny leżący na prostej OH.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że OO_A to symetralna BC oraz odcinek AH jest również prostopadły do BC, więc $OO_A \parallel AH$. Z Lematu 8 wiemy, że $O_AH = AO$, więc $OAHO_A$ jest równoległobokiem i środek odcinka OH leży na prostej O_AA. Analogicznie odcinki O_BB i O_CC przechodzą przez środek odcinka OH.



Zadanie 7. (Poręba wrzesień 2023)
W trójkącie ABC punkty K, L są spodkami dwusiecznych z wierzchołków B i C, a punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ABC. Prosta KL przecina okrąg opisany na ABC w punktach M oraz N. Wykazać, że okrąg opisany na MIN ma promień dwa razy większy niż okrąg opisany na ABC.

Rozwiązanie:

Definicja (Oś ortyczna)

Niech A', B', C' będą spodkami wysokości odpowiednio z wierzchołków A, B, C trójkąta ABC. Niech X, Y, Z będą przecięciami prostych $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ odpowiednio z prostymi AB, BC, CA. *Osią ortyczną* trójkąta ABC nazywamy prostą przechodzącą przez punkty X, Y i Z

Lemat 11 (O osi ortycznej)

Oś ortyczna trójkąta ABC jest osią potęgową jego okręgu opisanego i okręgu dziewięciu punktów.

Dowód. Oczywiście punkty A', B', A, B leżą na jednym okręgu. Stąd

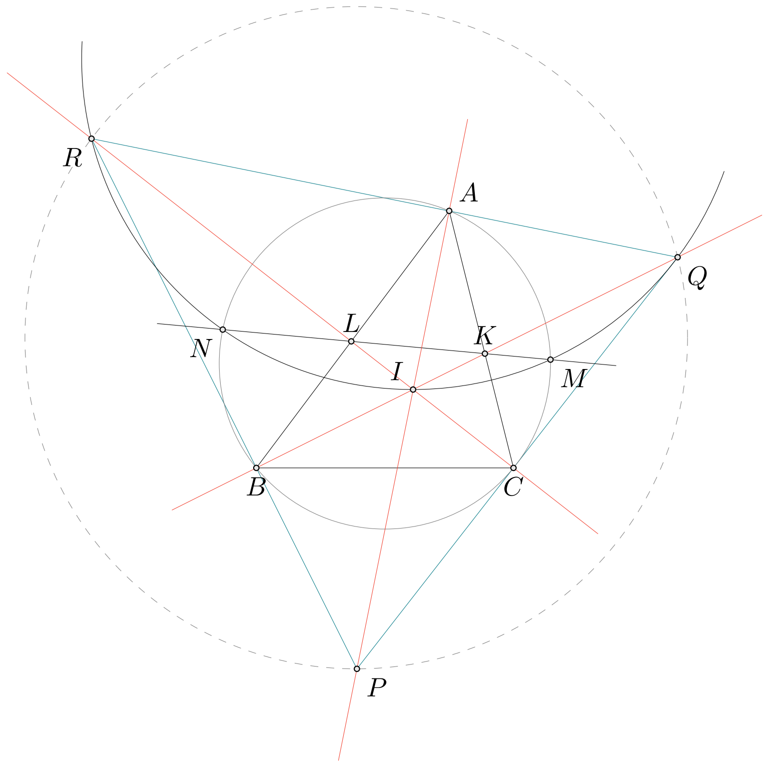
$$\begin{aligned}\mathrm{Pot}(X, \odot(A'B'C')) = XA' \cdot XB' = \mathrm{Pot}(X, \odot(A'B'AB)) = \\ = XA \cdot XB = \mathrm{Pot}(X, \odot(ABC)).\end{aligned}$$

Zatem X leży na osi potęgowej okręgu dziewięciu punktów oraz okręgu opisanego. Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla punktów Y i Z. □

Niech P, Q, R będą odpowiednio środkami okręgów A-dopisanego, B-dopisanego oraz C-dopisanego. Oczywiście

$$PQ \perp CR, \qquad QR \perp AP, \qquad RP \perp BQ,$$

więc I jest ortocentrum trójkąta PQR. Okrąg $\odot(ABC)$ jest okręgiem dziewięciu punktów trójkąta PQR, ponieważ przechodzi przez jego spodki wysokości. Stąd mamy, że środki IQ, QR i RI leżą na okręgu $\odot(ABC)$. Prosta KL jest osią ortyczną trójkąta IQR (trójkąt ABC jest również trójkątem ortycznym trójkąta IQR). Korzystamy z Lematu 11 i otrzymujemy, że KL jest osią potęgową okręgów $\odot(ABC)$ i $\odot(IQR)$, więc $\odot(IQR) = \odot(IMN)$. Z Lematu 8 otrzymujemy tezę.



Zadanie 8.
W trójkącie ABC punkty K i L są punktami przecięcia dwusiecznych kątów $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ z bokami AC i AB. Punkty O i J są środkami okręgów odpowiednio opisanego na trójkącie ABC i A-dopisanego. Wykazać, że $JO \perp KL$.

Rozwiązanie:
Niech X, Y będą punktami przecięcia osi potęgowej okręgów danych w treści zadania z prostymi AB i AC. Dodatkowo niech M i N będą punktami styczności okręgu A-dopisanego z prostymi AB i AC. Oczywiście $XY \perp OJ$. Przez s oznaczmy połowę obwodu ABC. Wówczas z potęgi punktu względem okręgu dopisanego otrzymujemy, że

$$AM = AN = \frac{1}{2}(AM + AN) = \frac{1}{2}(AB + BM + CN + AC) = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = s.$$

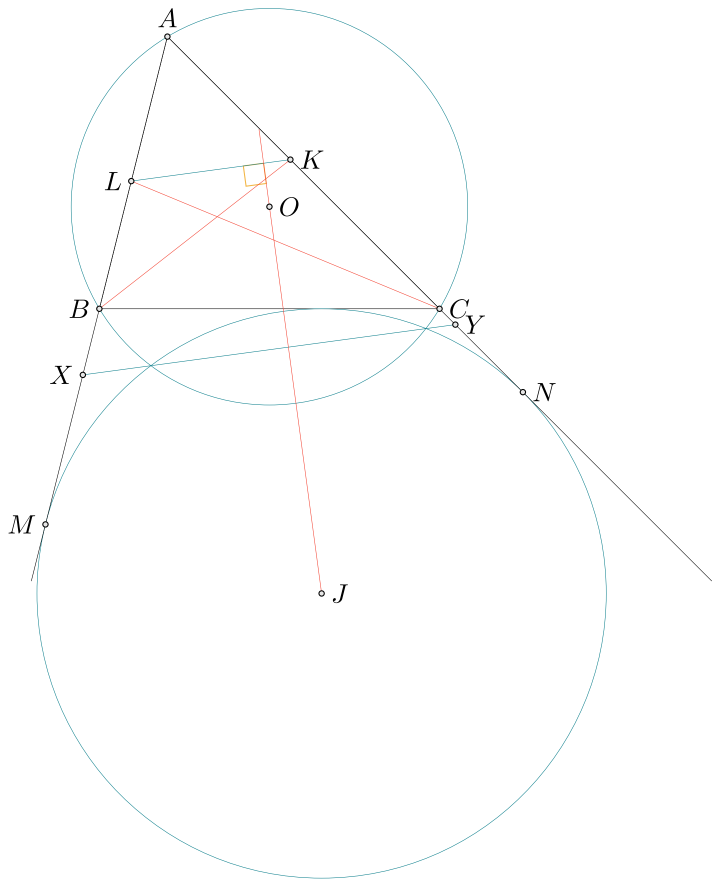
Mamy $XA \cdot XB = XM^2$, więc

$$XA(XA - AB) = (s - XA)^2, \qquad \text{czyli} \qquad XA = \frac{s^2}{2s - AB} = \frac{s^2}{BC + AC}.$$

Analogicznie otrzymujemy $YA = s^2/(BC + AB)$. Z twierdzenia o dwusiecznej dostajemy, że

$$AK = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC} \qquad \text{oraz} \qquad AL = \frac{AB \cdot AC}{AC + BC},$$

więc $AL/AK = AX/AY$. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy tezę.

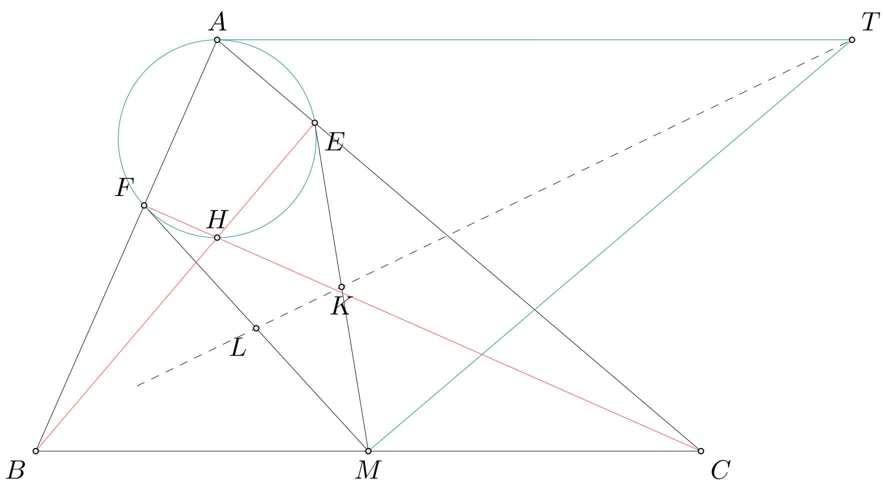


Zadanie 9. (Iran TST 2011)
W ostrokątnym trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest większy niż kąt przy wierzchołku C. Niech M będzie środkiem boku BC, a punkty E i F będą spodkami wysokości z wierzchołków B i C. Oznaczmy K i L jako środki odcinków ME i MF. Punkt T to taki punkt na prostej KL, że $TA \parallel BC$. Pokazać, że $TA = TM$.

Rozwiązanie:
Z Lematu 10 wynika, że proste ME i MF są styczne do okręgu opisanego na trójkącie AEF. Zatem prosta LK to oś potęgowa okręgu opisanego na czworokącie $AFHE$ i okręgu o promieniu 0 o środku w punkcie M. Zatem T leży na ich osi potęgowej. Dodatkowo AH to średnica okręgu opisanego na czworokącie $AFHE$, więc $AT \perp AH$, a skoro $AH \perp BC$, to $AT \parallel BC$. Wówczas z potęgi punktu otrzymujemy, że

$$TA^2 = TM^2,$$

czyli $TA = TM$, co należało wykazać.



Zadanie 10. (IMO Shortlist 2010 G1)
W trójkącie ABC wysokości AD, BE, CF przecinają się w H. Punkt P jest jednym z przecięć prostej EF z okręgiem opisanym na ABC, a punkt Q jest przecięciem prostych BP oraz DF. Wykazać równość $AP = AQ$.

Rozwiązanie:
Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AB \leqslant AC$. Rozważymy dwa przypadki, najpierw załóżmy, że P leży po przeciwnej stronie AC niż B. Zauważmy, że

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle APC - \sphericalangle BPC = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle AFQ,$$

ponieważ punkty A, C, D, F leżą na okręgu o średnicy AC. Z tego powodu punkty A, F, P, Q leżą na jednym okręgu. Stąd

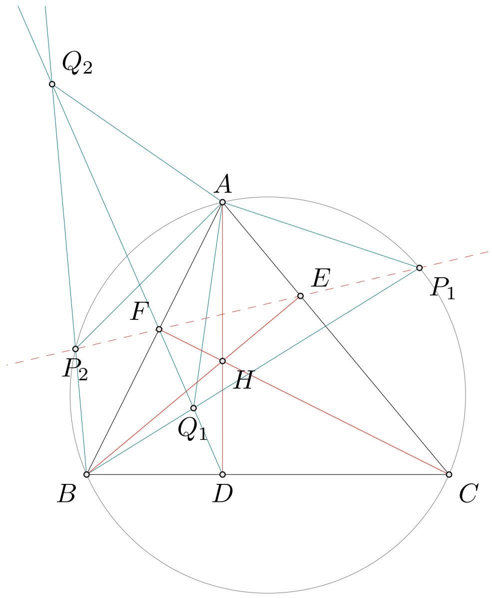
$$\sphericalangle AQP = \sphericalangle AFE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle APQ,$$

ponieważ punkty B, C, E, F leżą na okręgu o średnicy BC. Zatem $AP = AQ$.

Teraz załóżmy, że punkty P i B są po tej samej stronie prostej AC. Zauważmy, że

$$\sphericalangle APQ = 180^\circ - \sphericalangle APB = \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle AFD = \sphericalangle AFQ,$$

więc punkty A, F, P, Q leżą na jednym okręgu. Dalsza część dowodu jest analogiczna do pierwszego przypadku, ponieważ $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ACB$.



Zadanie 11.
Na trójkącie ostrokątnym ABC opisano okrąg. Oznaczmy środki krótszych łuków BC, CA, AB odpowiednio przez X, Y, Z. Udowodnić, że pole trójkąta ABC jest nie większe od pola trójkąta XYZ.

Rozwiązanie:
Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wykażemy, że jest on ortocentrum trójkąta XYZ. Znanym faktem jest, że I to przecięcie prostych AX, BY, CZ. Zauważmy, że

$$\sphericalangle XZY = \sphericalangle XZC + \sphericalangle YZC = \sphericalangle XAC + \sphericalangle YBC = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC),$$

a także

$$\sphericalangle AXZ = \sphericalangle ACZ = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.$$

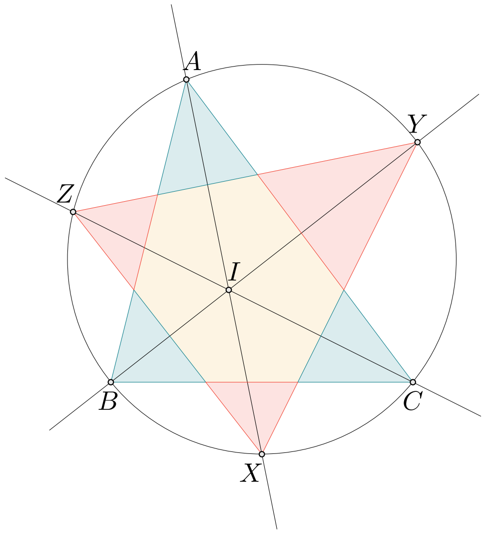
Stąd wynika, że $\sphericalangle XZY + \sphericalangle AXZ = 90^\circ$, więc proste AX i ZY są prostopadłe. Analogicznie dostajemy prostopadłość prostych BY i ZX, czyli punkt I jest ortocentrum trójkąta XYZ. Niech H_A będzie odbiciem ortocentrum H trójkąta ABC względem BC. Oczywiście $[BH_AC] \leqslant [BXC]$, ponieważ odległość punktu H' od prostej BC jest równa co najwyżej odległości punktu X od prostej BC. Analogicznie dostajemy dwie podobne nierówności. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}[ABC] &= [ABH] + [BCH] + [CAH] = \\ &= [ABH_C] + [BCH_A] + [CAH_B] \leqslant [BXC] + [CYA] + [AZB].\end{aligned}$$

Na koniec pozostaje zauważyć, że punkty A, B, C to odbicia punktu I odpowiednio względem prostych YZ, ZX, XY. Wobec tego

$$2[XYZ] = [XYZ] + [XYC] + [YZA] + [ZXB] = [ABC] + [BXC] + [CYA] + [AZB],$$

więc z wcześniej uzyskanej nierówności otrzymujemy tezę zadania.

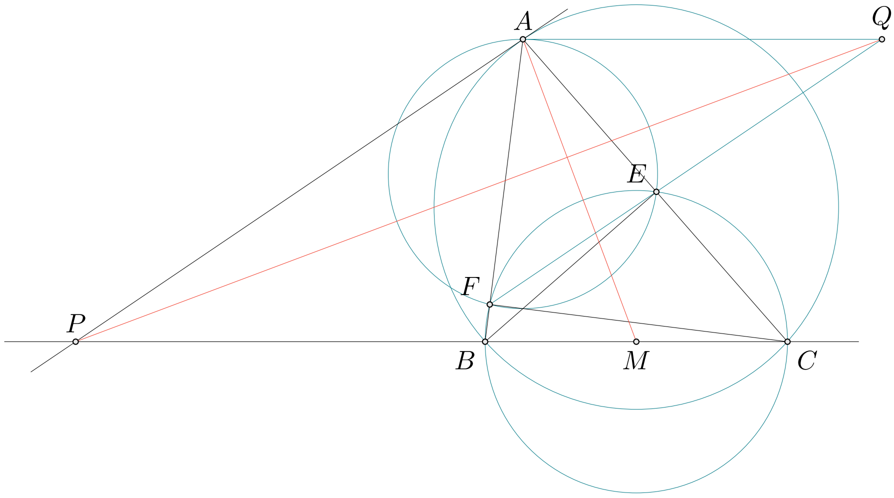


Zadanie 12. (69 OM, III etap, zadanie 5)
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P. Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q. Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta ABC wychodzącej z wierzchołka A.

Rozwiązanie:
Przez M oznaczmy środek BC. Niech ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkątach ABC, AEF, $FBCE$ oraz okręgiem o środku w A i promieniu 0. Okręgi ω_2 i ω_3 przecinają się w E i F, więc prosta EF, do której należy punkt Q, jest osią potęgową tych okręgów. Ponieważ

$$\sphericalangle EFA = 180^\circ - \sphericalangle BFE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle EAQ,$$

to prosta AQ jest styczna do ω_2. Zatem z twierdzenia o osiach potęgowych dla okręgów ω_2, ω_3, ω_4 wynika, że punkt Q leży na osi potęgowej okręgów ω_3 i ω_4. Rozważamy osie potęgowe ω_1, ω_2 i ω_4 i analogicznie otrzymujemy, że punkt P również leży na tej osi potęgowej. Stąd wynika, że prosta PQ jest prostopadła do prostej łączącej środki okręgów ω_3 i ω_4, co jest równoważne z tezą zadania.

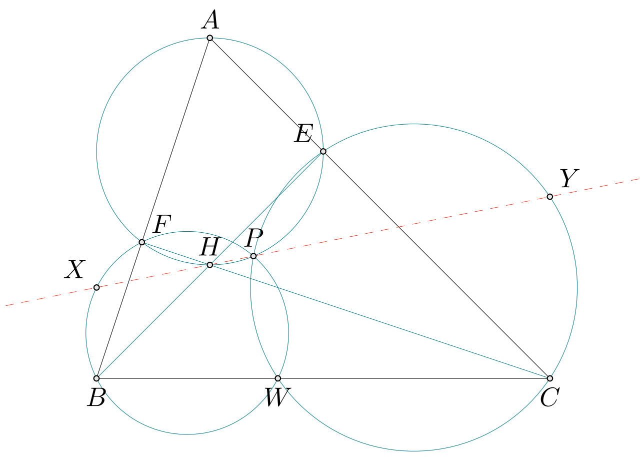


Zadanie 13. (IMO 2013 P4)
Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym o ortocentrum w punkcie H. Niech W będzie punktem na BC. Oznaczmy przez E i F spodki wysokości odpowiednio z wierzchołków B i C. Oznaczmy przez ω_1 okrąg opisany na BWF. Niech X będzie takim punktem na ω_1, że WX jest jego średnicą. Analogicznie definiujemy ω_2 jako okrąg opisany na CWE i punkt Y jako punkt na ω_2 taki, że WY jest jego średnicą. Udowodnić, że punkty X, Y i H są współliniowe.

Rozwiązanie:
Niech P będzie drugim przecięciem okręgów ω_1 i ω_2. Z twierdzenia Miquela wynika, że leży on też na $\odot(AEHF)$. Mamy $\triangle AFC \sim \triangle AEB$, więc $AF \cdot AB = AE \cdot AC$. Zatem punkty A, P, W leżą na osi potęgowej okręgów ω_1 i ω_2, czyli są współliniowe. Skoro punkt X jest antypodą punktu W, to

$$\sphericalangle WPX = 90^\circ = \sphericalangle APH = \sphericalangle WPH,$$

więc punkty P, H, X leżą na jednej prostej. Analogicznie udowadniamy, że punkt P leży na prostej HY. Zatem proste HX i HY się pokrywają.



Zadanie 14. (USA TST 2011)
Ostrokątny trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω o środku w punkcie O. Punkt H jest jego ortocentrum, a punkty M i N są środkami boków AB i AC. Półproste MH i NH przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach P i Q. Proste MN i PQ przecinają się w punkcie R. Wykazać, że $OA \perp RA$.

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez ϕ okrąg Feuerbacha trójkąta ABC. Niech P' i Q' będą drugimi punktami przecięcia okręgu ϕ

kolejno z prostymi MP i NQ. Z twierdzenia Feuerbacha wynika, że punkt H jest środkiem jednokładności okręgów ϕ oraz ω. Z definicji jednokładności

$$HQ = 2 \cdot HQ' \qquad \text{oraz} \qquad HP = 2 \cdot HP'.$$

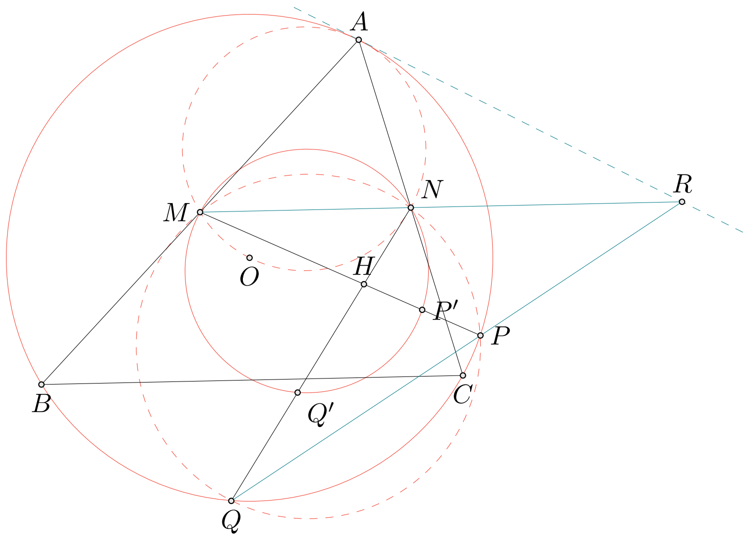
Zauważmy, że potęga punktu H względem okręgu ϕ wynosi

$$\mathrm{Pot}(H, \phi) = HP' \cdot HM = HQ' \cdot HN.$$

Zatem

$$2 \cdot \mathrm{Pot}(H, \phi) = HP \cdot HM = HQ \cdot HN,$$

czyli punkty P, Q, M, N leżą na jednym okręgu. Niech $\omega_1 = \odot(PQMN)$ oraz $\omega_2 = \odot(AMN)$. Zauważmy, że prosta PQ jest osią potęgową okręgów ω_1 i ω, a prosta MN osią potęgową okręgów ω_2 i ω_1. Z twierdzenia o osiach potęgowych prosta AR jest osią potęgową okręgów ω i ω_2. Zauważmy, że punkty B i C są obrazami punktów M i N w jednokładności o środku w punkcie A i skali 2, więc ω jest obrazem okręgu ω_2 w tej jednokładności. Oznacza to, że okręgi ω i ω_2 są styczne.

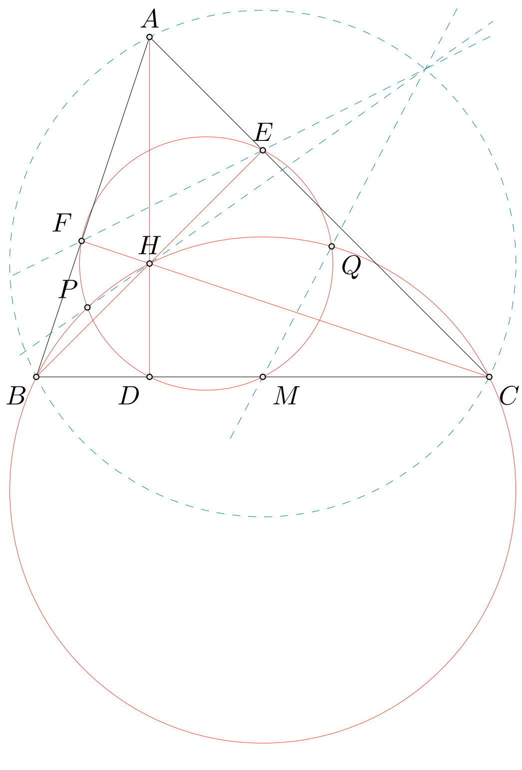


Zadanie 15. (Poręba styczeń 2024)
W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD, BE i CF przecinają się w H. Niech M będzie środkiem BC i załóżmy, że okręgi opisane na EFM i BCH przecinają się w punktach P i Q. Wykazać, że proste EF, PH i MQ przecinają się na okręgu opisanym na ABC.

Rozwiązanie:
Niech Ω oznacza okrąg opisany na trójkącie ABC.

Pokażemy na początku, że prosta PH przechodzi przez punkt przecięcia EF i Ω. Rozważmy antyinwersję względem okręgu o środku w punkcie H i o promieniu $\sqrt{AH \cdot DH}$. Wiemy, że czworokąty $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ są cykliczne, czyli z potęgi punktu H wynika, że obrazami punktów D, E, F w tej antyinwersji będą odpowiednio A, B, C. Istotnie zamienia ona okrąg Feuerbacha trójkąta ABC na okrąg Ω. Skoro punkt P leży na okręgu Eulera oraz na okręgu BCH, który przechodzi przez środek okręgu inwersyjnego, to punkt P przejdzie w tej antyinwersji na przecięcie prostej EF z okręgiem Ω.

Pokażemy teraz, że MQ także przechodzi przez punkt przecięcia EF i Ω. Rozważmy w tym celu inwersję względem okręgu opisanego na czworokącie $BCEF$, którego środkiem jest punkt M. Okręgi opisane na $BCEF$ oraz $AEHF$ są ortogonalne, czyli H przejdzie na przecięcie prostej MH z okręgiem Ω. Istotnie okrąg opisany na trójkącie BCH przechodzi w tej inwersji na okrąg opisany na trójkącie ABC, stąd punkt Q przejdzie na przecięcie prostej EF z okręgiem Ω, czyli na przecięcie prostych PH i EF, co kończy dowód.


A
E
F
H
Q
P
B
D
M
C

Podobieństwo spiralne

Kordian Pisarek

Definicje

Definicja (Podobieństwo spiralne)

Podobieństwo spiralne jest to przekształcenie będące złożeniem jednokładności oraz obrotu, przy czym środek jednokładności jest również środkiem obrotu.

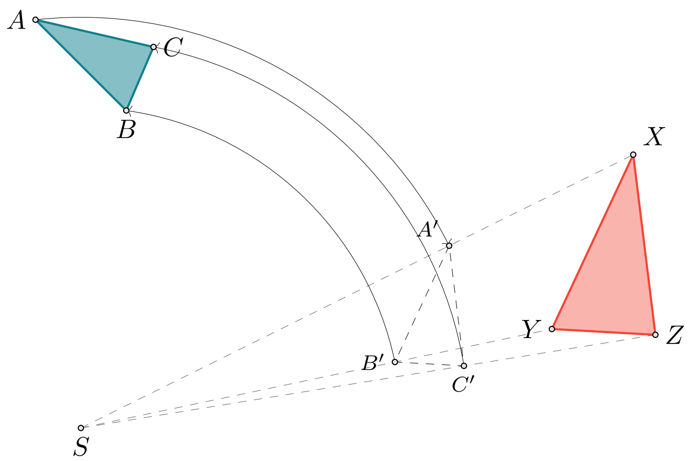
Definicja (Środek podobieństwa spiralnego)

Środek podobieństwa spiralnego jest to punkt będący wspólnym środkiem jednokładności i obrotu.

Definicja (Figury podobne spiralnie)

Figura X jest *podobna spiralnie* do figury Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie podobieństwo spiralne f, że $f(X) = Y$. Łatwo zauważyć, że jest to równoważne z istnieniem podobieństwa spiralnego g takiego, że $g(Y) = X$ (wykonujemy jednokładność o odwrotnej skali oraz obrót o kąt przeciwny do tego z podobieństwa f).

Trójkąty ABC i XYZ poniżej są spiralnie podobne.



Własności

Lemat 1

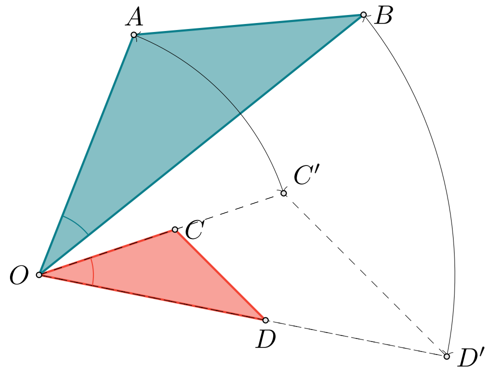
Złożenie dwóch spiralnych podobieństw o tym samym środku również jest spiralnym podobieństwem w tym środku.

Dowód. Wynika to wprost z własności izometrii. □

Lemat 2

Punkt O jest środkiem spiralnego podobieństwa odcinków AB oraz CD wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty OAB i OCD są podobne.

Dowód. Na początek pokażemy implikację w prawo. Niech I będzie jednokładnością o skali AB/CD i o środku w punkcie O. Nazwijmy $C' = I(C)$ oraz $D' = I(D)$. Zatem $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, to $\triangle OAB \equiv \triangle OC'D'$. Te trójkąty mają jednak wspólny punkt O, więc obrót o środku w punkcie O i kącie $\sphericalangle C'OA = \sphericalangle D'OB$ przekształca punkty C' i D' odpowiednio w A i B.



Teraz pokażemy implikację w lewo. Przypuśćmy nie wprost, że trójkąty OAB i OCD nie są podobne. Wtedy co najmniej dwa kąty tych trójkątów nie są równe swoim odpowiednikom.

1° Jeśli tymi kątami są AOB i COD, to żaden obrót o środku w punkcie O nie przekształci tych punktów tak, by O, A i C', oraz O, B i D' były współliniowe, więc również żadna jednokładność ich na siebie później nie przekształci.

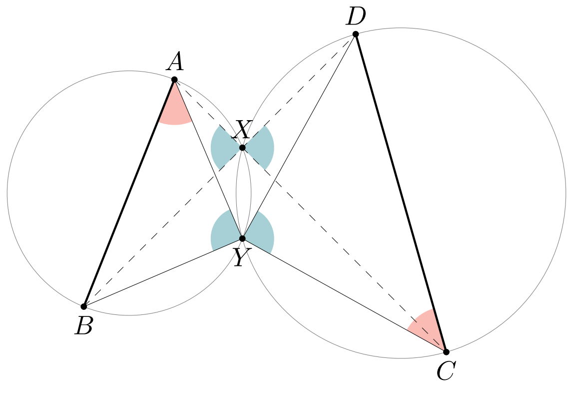
2° Jeśli jednak $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$, to nawet, jeśli wykonamy taki obrót, by O, A i C', oraz O, B i D' były współliniowe, to $\sphericalangle OAB \neq \sphericalangle OC'D'$, więc żadna jednokładność nie przekształci $C'D'$ na AB.

Otrzymana sprzeczność daje tezę. □

Lemat 3

Każde dwa odcinki (nieleżące na jednej prostej) mają dokładnie jeden środek podobieństwa spiralnego.

Dowód. By wykazać ten fakt, przedstawimy konstrukcję środka podobieństwa spiralnego. Rozważmy odcinki AB oraz CD. Nazwijmy X jako przecięcie prostych AC oraz BD. Niech Y będzie drugim przecięciem okręgów opisanych na trójkątach ABX oraz CDX. Pokażemy teraz, że Y jest środkiem pewnego podobieństwa spiralnego przekształcającego odcinek AB na CD, oraz że jest on jedynym punktem z tą własnością.



Zauważmy, że czworokąty $ABXY$ oraz $CDXY$ są cykliczne. Jest to równoważne z

$$\sphericalangle AYB = \sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD = \sphericalangle CYD$$

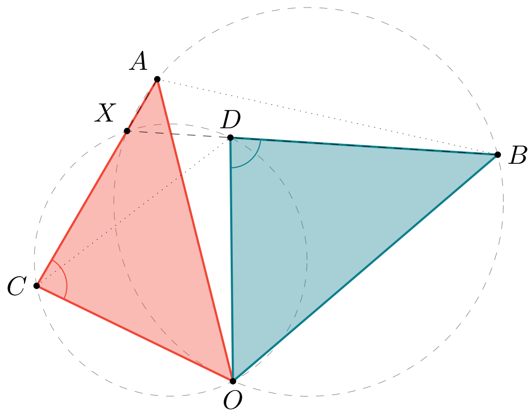
oraz

$$\sphericalangle BAY = \sphericalangle BXY = 180° - \sphericalangle YXD = \sphericalangle YCD.$$

To z kolei jest równoważne z faktem, że trójkąty YCD i YAB są podobne. Teraz, na mocy Lematu 1, dostajemy równoważność istnienia punktu Y z podobieństwem spiralnym odcinków AB i CD. Łatwo zauważyć, że punkt Y zawsze istnieje. Możemy jednak wykonać rozumowanie w drugą stronę – załóżmy, że odcinki AB i CD są podobne spiralnie w punkcie Y. Wykonanie konstrukcji od tyłu, i powyższa równoważność dowodzi, że Y musi spełniać konstrukcję. Łatwo również zauważyć, że zawsze istnieje dokładnie jeden punkt Y, co kończy dowód □

Lemat 4

Jeśli istnieje podobieństwo spiralne f o środku w punkcie O przekształcające odcinek AB w odcinek CD, to istnieje również podobieństwo spiralne g o środku w punkcie O przekształcające odcinek AC w odcinek BD.



Dowód. na mocy Lematu 1 wiemy, że $\triangle OAB \sim \triangle OCD$. Lemat 2 implikuje, że jeśli X oznaczymy drugie przecięcie okręgów $\odot(ABY)$ i $\odot(CDY)$, to punkty A, X i C oraz B, X i D będą współliniowe. Możemy więc analogicznie przenieść kąty

$$\sphericalangle ACY = \sphericalangle XCY = \sphericalangle XDY = \sphericalangle BDY$$

oraz

$$\sphericalangle CAY = \sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY = \sphericalangle DBY.$$

Wtedy $\triangle ACY \sim \triangle BDY$. Lemat 1 daje koniec dowodu. □

Zadanie 1. (Punkt Miquela dla czworoboku zupełnego)
Proste AB i CD przecinają się w punkcie Q, a proste AD i BC w punkcie P. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach PAB, PCD, QAD oraz QCB mają wspólny punkt.

Zadanie 2.
Trójkąty ABC i $A'B'C$ są podobne i zgodnie zorientowane, przy czym

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'CB' = 90°.$$

Wykazać, że $AA' \perp BB'$.

Zadanie 3.
Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach M oraz N. Punkty A i B różne od M i N leżą odpowiednio na okręgach ω_1 i ω_2. Punkty O_1 i O_2 to środki okręgów ω_1 i ω_2. Wykazać, że trójkąty MAB i MO_1O_2 są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B i N są współliniowe.

Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC, przy czym zachodzi $AC = BC$ oraz $\sphericalangle ACB = 90°$. Punkt S leży na okręgu o średnicy BC. Prosta symetryczna do prostej SC względem prostej AB przecina prostą BC w punkcie D. Wykazać, że $\sphericalangle DSA = 90°$.

Zadanie 5.
Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt P jest rzutem punktu D na przekątną AC. Punkty X oraz Y są środkami odcinków odpowiednio AP oraz BC. Udowodnić, że $\sphericalangle YXD = 90°$.

Zadanie 6.
Trójkąty ABF, BCD i CAE są podobne i zgodnie zorientowane, przy czym punkty D, E i F leżą na zewnątrz trójkąta ABC. Wykazać, że punkt przecięcia środkowych trójkąta ABC pokrywa się z punktem przecięcia środkowych trójkąta DEF.

Zadanie 7.
Dany jest trójkąt ABC oraz punkty A', B' oraz C' odpowiednio na bokach CA, AB i BC, przy czym trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne. Niech T będzie środkiem spiralnego podobieństwa przekształcającego trójkąt ABC w trójkąt $A'B'C'$. Wykazać, że

$$\sphericalangle TAC = \sphericalangle TA'C' = \sphericalangle TCB = \sphericalangle TC'B' = \sphericalangle TBA = \sphericalangle TB'A'.$$

Zadanie 8. (Japan MO 2018)
Dany jest różnoboczny trójkąt ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AB i AC, przy czym spełnione jest $AC = CD$ oraz $AB = BE$. Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ADE, a P odbiciem punktu A przez prostą BC. Proste PD i PE przecinają okrąg ω ponownie w punktach X i Y. Wykazać, że proste BX i CY przecinają się na okręgu ω.

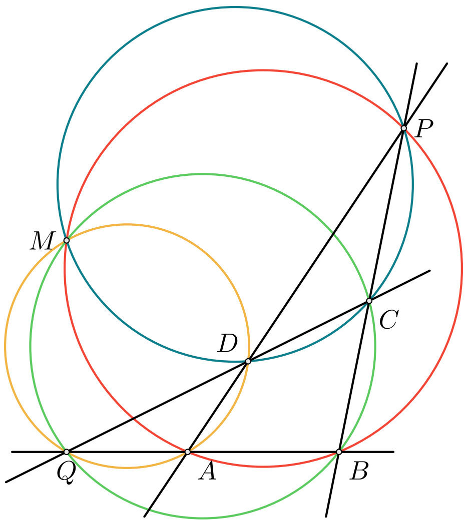
Zadanie 9.
Punkty A', B' oraz C' leżą odpowiednio na bokach BC, CA oraz AB trójkąta ABC, przy czym $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (zgodnie zorientowane). Niech $D = BB' \cap CC'$, $E = CC' \cap AA'$, $F = AA' \cap BB'$. Wykazać, że okręgi $\odot(ABF)$, $\odot(A'B'F)$, $\odot(BCD)$, $\odot(B'C'D)$, $\odot(ACE)$ oraz $\odot(A'C'E)$ mają punkt wspólny.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Mariia Kulyk*, Adam Tutkowski, Stanisław Jółkowski.

Zadanie 1. (Punkt Miquela dla czworoboku zupełnego)
Proste AB i CD przecinają się w punkcie Q, a proste AD i BC w punkcie P. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach PAB, PCD, QAD oraz QCB mają wspólny punkt.

Rozwiązanie:
Rozważmy środek spiralnego podobieństwa odcinków AB i DC – oznaczmy ten punkt jako M. Według konstrukcji, okręgi $\odot(PAB)$ i $\odot(PDC)$ tną się w punktach P oraz M. Lemat 3 implikuje jednak, że M jest również środkiem podobieństwa spiralnego dla odcinków DA i BC, więc analogicznie okręgi $\odot(QDA)$ i $\odot(QBC)$ tną się w Q i M. Tak więc wszystkie cztery okręgi zawierają punkt wspólny M.



Zadanie 2.
Trójkąty ABC i $A'B'C$ są podobne i zgodnie zorientowane, przy czym

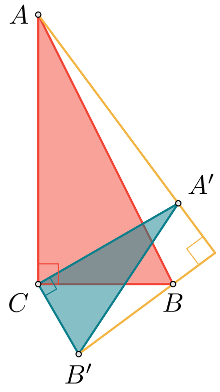
$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'CB' = 90^\circ.$$

Wykazać, że $AA' \perp BB'$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że skoro trójkąty ABC i $A'B'C$ są podobne i zgodnie zorientowane, a C jest ich punktem wspólnym, to punkt C jest środkiem podobieństwa spiralnego trójkątów ABC, $A'B'C$. Stąd punkt C jest środkiem podobieństwa odcinków BC oraz $B'C'$.

z lematu 4, skoro punkt C jest środkiem podobieństwa spiralnego przekształcającego odcinek AB w odcinek $A'B'$, to punkt C też jest środkiem podobieństwa spiralnego przekształcającego odcinek AA' w odcinek BB'. Stąd trójkąty CAA' i CBB' są podobne spiralnie w punkcie C.

Wtedy kąt między odcinkami AA' i BB' jest równy kątowi obrotu w tym podobieństwie spiralnym. Stąd kąt między odcinkami AA' oraz BB' jest równy $\sphericalangle BCA = 90^\circ$.



Zadanie 3.
Okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach M oraz N. Punkty A i B różne od M i N leżą odpowiednio na okręgach ω_1 i ω_2. Punkty O_1 i O_2 to środki okręgów ω_1 i ω_2. Wykazać, że trójkąty MAB i MO_1O_2 są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B i N są współliniowe.

Rozwiązanie:
Na początek pokażemy implikację w lewą stronę, czyli jeśli punkty A, B, N są współliniowe, to trójkąty MAB i MO_1O_2 są podobne.

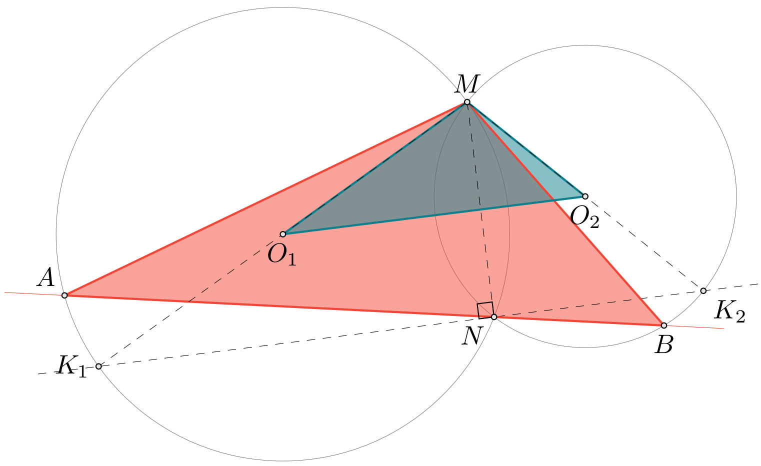
Niech K_1, K_2 będą antypodami punktu M w okręgach ω_1 i ω_2. Wówczas

$$\sphericalangle MNK_1 + \sphericalangle MNK_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

czyli punkty K_1, M, K_2 są współliniowe. Skoro punkty A oraz K_1 leżą na okręgu ω_1, to

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MAN = \sphericalangle MK_1N = \sphericalangle MK_1K_2.$$

Analogicznie $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MK_2K_1$, więc $\triangle MAB \sim MK_1K_2$, czyli te trójkąty są podobnie spiralnie w punkcie M. Ponieważ punkty O_1, O_2 są środkami odcinków MK_1 oraz MK_2 (jako środki okręgów), to $\triangle MK_1K_2 \sim \triangle MO_1O_2$ z twierdzenia Talesa. Wobec tego zachodzi podobieństwo $\triangle MAB \sim \triangle MO_1O_2$.



Teraz pokażemy implikację w prawą stronę, czyli jeśli trójkąty MAB i MO_1O_2 są podobne, to punkt N leży na prostej AB.

Niech K_1, K_2 będą antypodami punktu M odpowiednio w okręgach ω_1 i ω_2. Z poprzedniej części dowodu wiemy, że $\triangle MK_1K_2 \sim \triangle MO_1O_2$, czyli $\triangle MAB \sim \triangle MO_1O_2$. W takim razie $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MK_1K_2$. Oznacza to, że punkty M, A, K_1 oraz punkt przecięcia prostych AB i K_1K_2 leżą na jednym okręgu. Ponieważ punkty M, A, K_1 leżą na okręgu ω_1, to wspomniany punkt przecięcia również musi należeć do okręgu ω_1.

Jedynymi punktami przecięcia prostej K_1K_2 z okręgiem ω_1 są punkty K_1 oraz N. Punktem przecięcia prostych AB i K_1K_2 nie może być K_1, ponieważ w przeciwnym razie okręgi ω_1 i ω_2 byłyby tożsame. Zatem musi to być punkt N. Skoro punkt N jest punktem przecięcia prostej AB z inną prostą, to w szczególności leży on na prostej AB, co kończy dowód.

Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC, przy czym zachodzi $AC = BC$ oraz $\sphericalangle ACB = 90°$. Punkt S leży na okręgu o średnicy BC. Prosta symetryczna do prostej SC względem prostej AB przecina prostą BC w punkcie D. Wykazać, że $\sphericalangle DSA = 90°$.

Rozwiązanie:
Niech S' będzie przecięciem okręgu opisanego na ACD z okręgiem opisanym na BCS. Niech E będzie odbiciem punktu C względem prostej AB. Czytelnik zechce zauważyć, że $\sphericalangle EDB = \sphericalangle ACS$. Wobec tego wystarczy pokazać, że $\sphericalangle EDB = \sphericalangle ACS'$. Niech F będzie przecięciem prostej BS' z prostą AE. Z podobieństwa spiralnego o środku w S' przekształcającego okrąg opisany na ACS' na okrąg opisany na DBS' mamy $\sphericalangle FBC = \sphericalangle ACS'$. Zauważmy, że

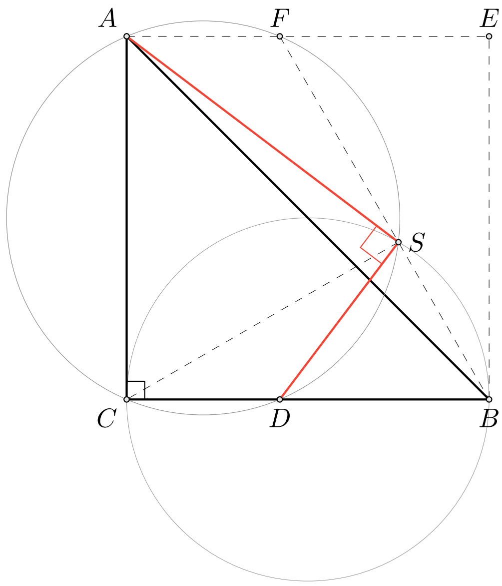
$$\sphericalangle FSC = 180° - \sphericalangle BS'C = 90°$$

i $\sphericalangle FAC = 90°$. W taki sposób na czworokącie $AFS'C$ da się opisać okrąg. Jest to ten sam okrąg, co opisany na czworokącie $ACDS'$, z czego wynika, że odcinki AD i FC są jego średnicami. Wtedy $ACDF$ to prostokąt, a to nam daje przystawanie $\triangle FDB \equiv \triangle DFE$ z cechy bok-kąt-bok. Zauważmy, że

$$\sphericalangle ACS' = \sphericalangle FBC = \sphericalangle AED = \sphericalangle EDB,$$

gdzie ostatnia równość zachodzi z faktu, że $AE \parallel BC$. Pokazaliśmy, że $S = S'$ oraz, że $\sphericalangle DSA = 90°$. W takim razie

$$\sphericalangle ASD = \sphericalangle AS'D = 180° - \sphericalangle ACD = 90°.$$



Zadanie 5.
Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt P jest rzutem punktu D na przekątną AC. Punkty X oraz Y są środkami odcinków odpowiednio AP oraz BC. Udowodnić, że $\sphericalangle YXD = 90°$.

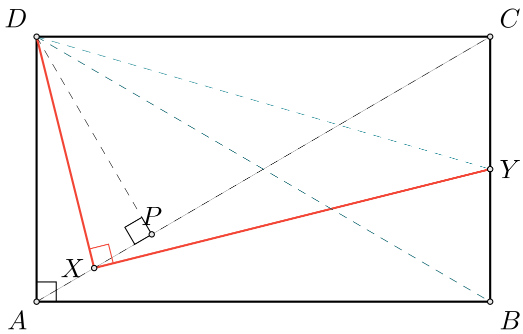
Rozwiązanie:
Najpierw pokażemy, że środkiem podobieństwa spiralnego przekształcającego odcinek AX na BY jest punkt D. Wtedy wystarczy pokazać, że trójkąty DAX i DBY są podobne. Wiemy, że $ABCD$ jest prostokątem, więc

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC.$$

Z treści też wiemy, że

$$\sphericalangle DPA = 90° = \sphericalangle DCB.$$

Z tych dwóch równości kątów wiemy, że $\triangle DAP \sim \triangle DBC$. Punkty X, Y są środkami boków odpowiednio AP, BY, więc skoro trójkąty DAP i DBC są podobne, to trójkąty DAX i DBY są też podobne. Wtedy punkt D jest środkiem podobieństwa spiralnego odcinków AX i BY. Z tej zależności otrzymujemy, że $\triangle DAB \sim \triangle DXY$. Stąd skoro $\sphericalangle DAB = 90°$, to $\sphericalangle DXY = 90°$.



Zadanie 6.
Trójkąty ABF, BCD i CAE są podobne i zgodnie zorientowane, przy czym punkty D, E i F leżą na zewnątrz trójkąta ABC. Wykazać, że punkt przecięcia środkowych trójkąta ABC pokrywa się z punktem przecięcia środkowych trójkąta DEF.

Rozwiązanie:
Niech G będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC, niech M będzie środkiem odcinka BC, zaś N – środkiem odcinka EF. Niech D' będzie odbiciem punktu D względem punktu M. Udowodnimy, że czworokąt $AED'F$ jest równoległobokiem.

Z definicji punktu D' wynika, że $\triangle CD'B \sim \triangle BDC$ oraz z założenia wiemy, że $\triangle BDC \sim \triangle CEA$. Zatem mamy $\triangle CD'B \sim \triangle CEA$, przy czym te trójkąty są zgodnie zorientowane. Oznacza to, że istnieje podobieństwo spiralne o środku w punkcie C przekształcające odcinek AE na odcinek BD'. Z Lematu 4 wynika, że również istnieje spiralne podobieństwo o środku w punkcie C przekształcające odcinek $D'E$ na odcinek BA, co oznacza, że $\triangle CED' \sim \triangle CAB$. Niech T będzie punktem przecięcia prostych $D'E$ i AB. Wtedy mamy

$$\sphericalangle TAC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle D'EC = \sphericalangle TEC,$$

zatem na czworokącie $TAEC$ można opisać okrąg. To daje nam

$$\sphericalangle ATE = \sphericalangle ACE,$$

jednak skoro $\triangle ACE \sim \triangle BAF$, więc

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle BAF,$$

zatem proste $D'E$ i AF są równoległe.

Analogicznie dowodzimy, że proste AE i $D'F$ są równoległe, zatem czworokąt $AED'F$ rzeczywiście jest równoległobokiem.

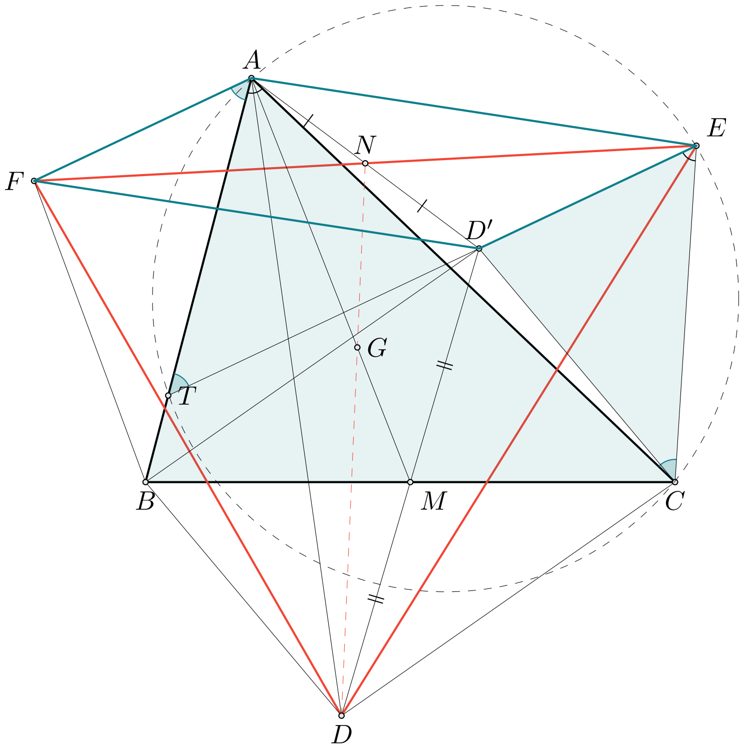
Niech G' będzie punktem przecięcia odcinków DN i AM. Skoro N jest środkiem odcinka EF, to N jest również środkiem odcinka AD'. Z definicji M jest środkiem odcinka DD', więc G' jest środkiem ciężkości trójkąta $AD'D$. Wynika stąd, że

$$\frac{AG'}{G'M} = 2,$$

zatem skoro M to środek BC, to G' jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, czyli $G' = G$. Mamy również

$$\frac{DG}{GN} = 2,$$

zatem G jest środkiem ciężkości trójkąta DEF, co było do udowodnienia.



Zadanie 7.
Dany jest trójkąt ABC oraz punkty A', B' oraz C' odpowiednio na bokach CA, AB i BC, przy czym trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne. Niech T będzie środkiem spiralnego podobieństwa przekształcającego trójkąt ABC w trójkąt $A'B'C'$. Wykazać, że

$$\sphericalangle TAC = \sphericalangle TA'C' = \sphericalangle TCB = \sphericalangle TC'B' = \sphericalangle TBA = \sphericalangle TB'A'.$$

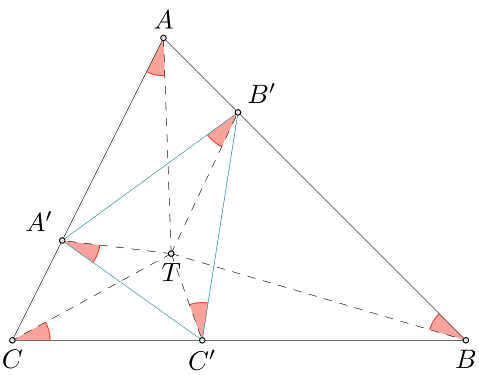
Rozwiązanie:
Odcinki AC i $A'C'$, BC i $B'C'$ oraz AB i $A'B'$ są podobne spiralnie, więc z Lematu 4 również AA' i CC', AA' i BB' oraz BB' i CC' są podobne spiralnie w tym samym środku T. Wobec tego z Lematu 2 zachodzi

$$\sphericalangle TAC = \sphericalangle TAA' = \sphericalangle TBB' = \sphericalangle TBA.$$

Analogicznie otrzymujemy, że $\sphericalangle TBA = \sphericalangle TCB$. Dodatkowo stosujemy Lemat 2 dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ i dostajemy, że

$$\sphericalangle TAC = \sphericalangle TA'C', \quad \sphericalangle TCB = \sphericalangle TC'B', \quad \sphericalangle TBA = \sphericalangle TB'A'.$$

Po połączeniu wszystkich równości otrzymujemy tezę.



Zadanie 8. (Japan MO 2018)
Dany jest różnoboczny trójkąt ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AB i AC, przy czym spełnione jest $AC = CD$ oraz $AB = BE$. Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ADE, a P odbiciem punktu A przez prostą BC. Proste PD i PE przecinają okrąg ω ponownie w punktach X i Y. Wykazać, że proste BX i CY przecinają się na okręgu ω.

Rozwiązanie:
Najpierw pokażmy, że odcinki XY i BC są podobne spiralnie w punkcie A. Wystarczy pokazać, że trójkąty AXY i ABC są podobne. Zauważmy, że skoro $AC = CD$, to

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BPC.$$

Stąd $\sphericalangle BPC = 180° - \sphericalangle BDC$, więc czworokąt $BPCD$ jest cykliczny. Analogicznie czworokąt $BPCE$ jest cykliczny, więc punkty B, P, C, D, E leżą na jednym okręgu. Ten okrąg oznaczmy jako Ω. Popatrzmy na kąt AXY. Punkty A, X, Y, E leżą na jednym okręgu, więc

$$\sphericalangle AXY = 180° - \sphericalangle AEY = \sphericalangle CEY.$$

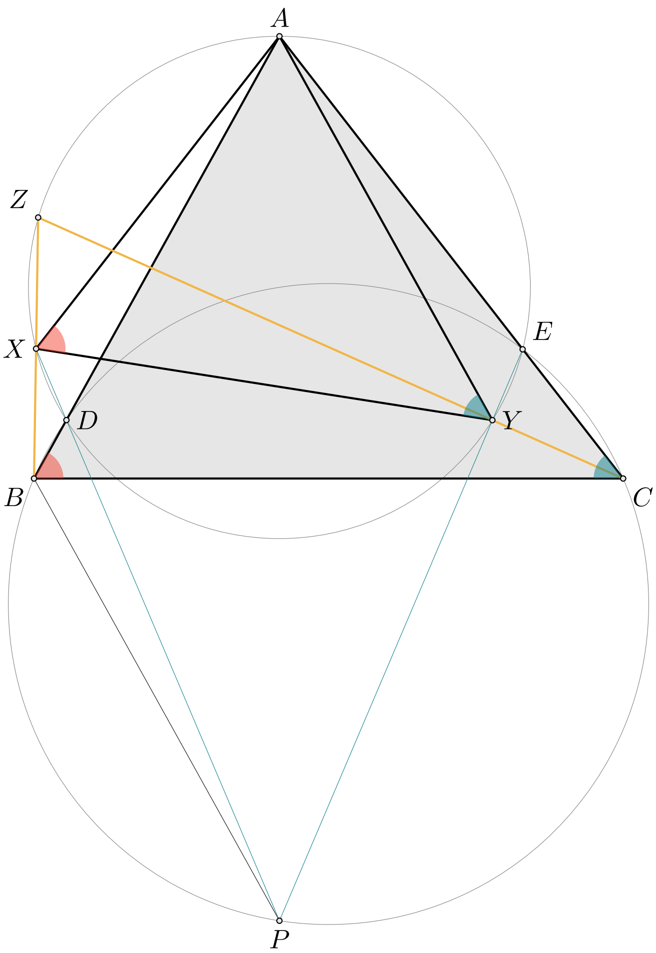
Skoro punkt Y leży na odcinku EP, to

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle CEP = \sphericalangle CBP,$$

ponieważ punkty C, E, B, P leżą na jednym okręgu. Skoro $\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBA$, ponieważ punkt P jest odbiciem A względem BC, to

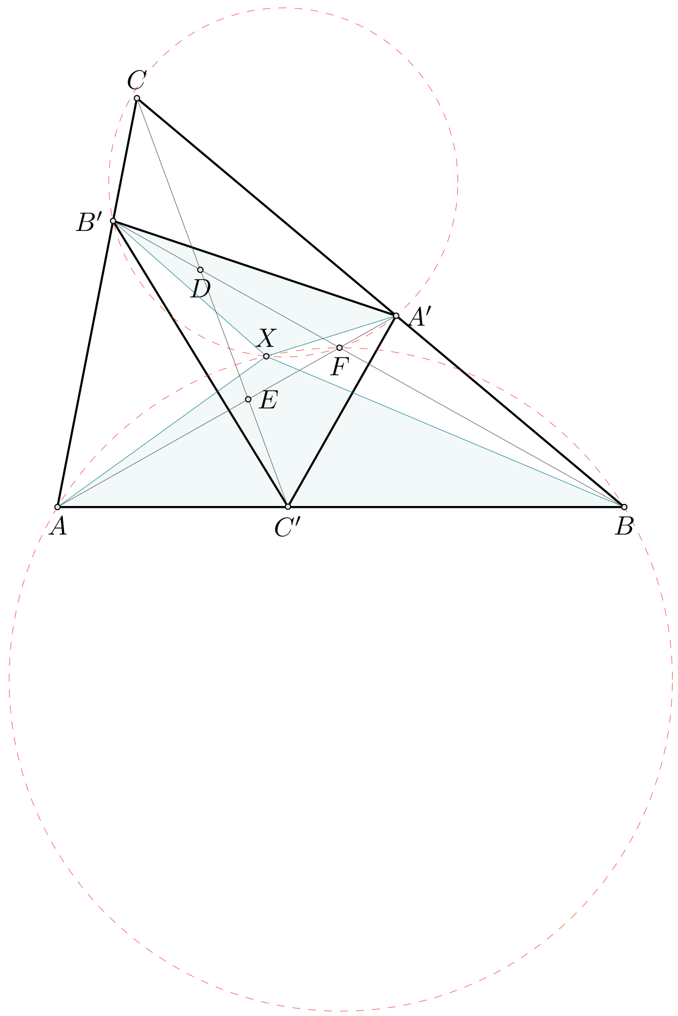
$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle CBP = \sphericalangle CEP = \sphericalangle AXY.$$

Analogicznie pokazujemy, że $\sphericalangle AYX = \sphericalangle BCA$. W takim razie trójkąty AXY i ABC są podobne, więc odcinki XY i BC są podobne spiralnie w A. Wiemy, że punkt A jest przecięciem okręgów opisanych na $\triangle AXY$ i na $\triangle ABC$ oraz trójkąty AXY i ABC są podobne spiralnie w punkcie A. W takim razie zgodnie z Zadaniem 2 drugie przecięcie tych okręgów leży na przecięciu prostych BX i CY. Oznacza to, że przecięcie BX i CY leży na okręgu opisanym na $\triangle AXY$, który jest okręgiem ω.



Zadanie 9.
Punkty A', B' oraz C' leżą odpowiednio na bokach BC, CA oraz AB trójkąta ABC, przy czym $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (zgodnie zorientowane). Niech $D = BB' \cap CC'$, $E = CC' \cap AA'$, $F = AA' \cap BB'$. Wykazać, że okręgi $\odot(ABF)$, $\odot(A'B'F)$, $\odot(BCD)$, $\odot(B'C'D)$, $\odot(ACE)$ oraz $\odot(A'C'E)$ mają punkt wspólny.

Rozwiązanie:
Niech X będzie środkiem podobieństwa spiralnego przekształcającego trójkąt ABC na trójkąt $A'B'C'$. To podobieństwo przekształca odcinek AA' na odcinek BB'. Skoro punkt F jest przecięciem prostych AA' i BB', to z Lematu 3 punkt X jest drugim przecięciem okręgów $\odot(ABF)$ oraz $\odot(A'B'F)$. Analogicznie dowodzimy, że X jest punktem wspólnym wszystkich okręgów.



Kolorowanie

Paweł Kosek

Kolorowanie tablic

W zadaniach z planszami, które na przykład wypełniamy klockami, technika kolorowania jest szczególnie przydatna, jeśli chcemy dowiedzieć się czegoś o liczbie klocków potrzebnych do wypełnienia tablicy lub czy da się ją nimi wypełnić.

Zadanie 1.
Rozstrzygnąć, czy tablicę 8×8 bez dwóch przeciwległych rogów można pokryć klockami 1×2.

Zadanie 2.
Tablica 8×8 jest pokryta przy użyciu 21 płytek 1×3 oraz jednej płytki 1×1. Wyznaczyć wszystkie możliwe położenia płytki 1×1.

Zadanie 3.
Rozstrzygnąć, czy szachownicę 9×9 da się pokryć klockami 5×1 i 6×1.

Zadanie 4. (IMO Shortlist 2017 C1)
Prostokąt R o bokach nieparzystej długości został podzielony na mniejsze prostokąty o bokach całkowitej długości i równoległych do odpowiednich boków prostokąta R. Udowodnić, że istnieje wśród nich taki prostokąt, którego odległości od boków prostokąta R są wszystkie nieparzyste albo wszystkie parzyste.

Zadanie 5. (Mszana 2023, zadanie 9)
Udowodnić, że planszy 5×7 nie można pokryć pewną dodatnią liczbą warstw L-klocków (które można obracać) w taki sposób, aby na każdym polu znajdowało się tyle samo warstw klocków.
Uwaga: L-*klocek* to kwadrat 2×2 z usuniętym kwadratem 1×1.

Zadanie 6. (IMO Shortlist 2014 C4)
Załóżmy, że figura F może być pokryta przy użyciu wyłącznie S-tetromin. Wykazać, że w każdym pokryciu F przy użyciu S-tetromin oraz Z-tetromin liczba Z-tetromin jest parzysta. W tym zadaniu nie dopuszczamy odwracania płytek na drugą stronę (czyli S i Z-tetromina to różne klocki).

Zadanie 7. (IMO Shortlist 2022 C3)
W każdym polu ogrodu w kształcie planszy 2022×2022 rośnie początkowo drzewo o wysokości 0. Ogrodnik i drwal wykonują ruchy na zmianę, ogrodnik wykonuje pierwszy ruch.

(1) Ogrodnik wybiera pewne pole. Drzewa na tym polu oraz na wszystkich polach mających z nim wspólną krawędź lub róg stają się o 1 jednostkę wyższe.
(2) Drwal wybiera 4 dowolne różne pola na planszy. Drzewa na każdym z tych pól stają się 1 jednostkę niższe.

Powiemy, że drzewo jest *majestatyczne*, jeśli jego wysokość jest nie mniejsza od 10^6. Wyznaczyć największą taką liczbę K, że ogrodnik może zapewnić, że w pewnym momencie jest K majestatycznych drzew na planszy, nieważne jak drwal będzie grał.

Kolorowanie grafów

Definicja (Kolorowanie wierzchołkowe)

Kolorowaniem wierzchołkowym grafu nazywamy takie przyporządkowanie jego wierzchołkom kolorów, że każde dwa sąsiednie wierzchołki mają różne kolory.

Definicja (Liczba chromatyczna)

Liczba chromatyczna grafu to najmniejsza liczba kolorów, dla której istnieje kolorowanie wierzchołkowe tego grafu.

Definicja (Kolorowanie krawędziowe)

Kolorowaniem krawędziowym grafu nazywamy takie przyporządkowanie jego krawędziom kolorów, że każde dwie krawędzie mające wspólny koniec mają różne kolory. Najmniejszą liczbę kolorów, dla której to możliwe, nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu.

Zadanie 8.
Wykazać, że k to największy ze stopni wierzchołków grafu G, to graf G można wierzchołkowo pokolorować na $k+1$ kolorów. Czy liczbę kolorów można poprawić?

Zadanie 9.
Rozstrzygnąć, czy każdy graf bez trójkątów (cykli długości 3) można pokolorować co najwyżej trzema kolorami.

Zadanie 10.
Krawędzie grafu pełnego (kliki) o 17 wierzchołkach pokolorowano trzema kolorami. Wykazać, że istnieje jednokolorowy trójkąt.

Zadanie 11. (Mszana 2021, zadanie 27)
Dany jest graf, którego wierzchołki kolorujemy na biało lub czarno. Na początku wszystkie wierzchołki grafu są białe. W jednym ruchu wybieramy dowolny wierzchołek i zmieniamy jego kolor oraz kolory wszystkich jego sąsiadów. Rozstrzygnąć, czy dla każdego grafu w skończonej liczbie ruchów można pokolorować wszystkie jego wierzchołki na czarno.

Zadanie 12. (Mszana 2022, zadanie 27)
Niech G będzie grafem nieskierowanym bez trójkątów, o n wierzchołkach. Wykazać, że wierzchołki grafu G można tak pokolorować co najwyżej $2\sqrt{n}$ kolorami, aby żadne dwa wierzchołki tego samego koloru nie sąsiadowały ze sobą.

Zadanie 13.
Na płaszczyźnie narysowano n czerwonych prostych, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Punkt nazwiemy *interesującym*, jeżeli przecinają się w nim pewne dwie czerwone proste. Interesujące punkty sąsiadują ze sobą, jeżeli leżą one na jednej czerwonej prostej i na odcinku między nimi nie ma innych interesujących punktów. Wykazać, że możemy pokolorować interesujące punkty na trzy kolory w taki sposób, by punkty w tym samym kolorze nie sąsiadowały ze sobą.

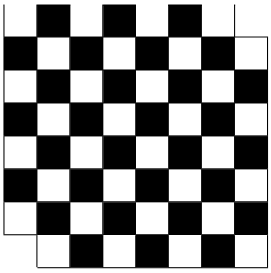
Zadanie 14. (Mszana 2018, zadanie 14)
Dana jest plansza o wymiarach 2018×2018. *Kwadraciskiem* nazwiemy cztery pola tej planszy o wspólnym wierzchołku. Każde pole planszy pomalowano na biało lub czarno w taki sposób, że każde pole posiadające krawędź leżącą na brzegu planszy ma kolor czarny oraz żadne kwadracisko nie jest jednokolorowe. Dowieść, że istnieje takie kwadracisko, że każde dwa jego pola sąsiadujące krawędzią mają różne kolory.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Bartosz Kotwicki*, Julian Kuryłłowicz-Kaźmierczak, Oskar Kuźmik, Karol Musieliński, Michał Oprocha.

Zadanie 1.
Rozstrzygnąć, czy tablicę 8×8 bez dwóch przeciwległych rogów można pokryć klockami 1×2.

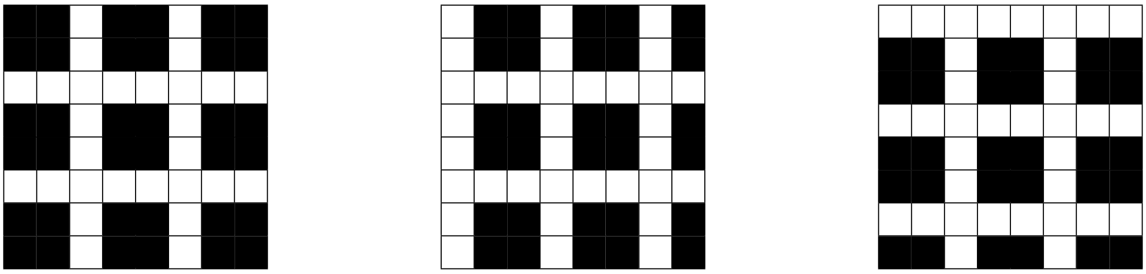
Rozwiązanie:



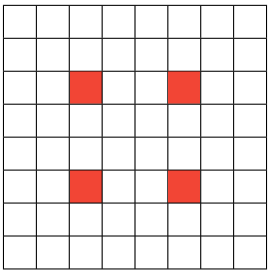
Każdy klocek 1×2 przykrywa dokładnie jedno pole białe i jedno pole czarne. Gdyby dało się pokryć taką planszę, to liczby białych i czarnych pól musiałyby być równe, co jest oczywiście niemożliwe.

Zadanie 2.
Tablica 8×8 jest pokryta przy użyciu 21 płytek 1×3 oraz jednej płytki 1×1. Wyznaczyć wszystkie możliwe położenia płytki 1×1.

Rozwiązanie:

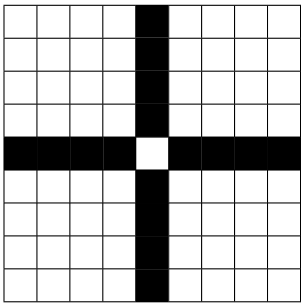


Zauważmy, że każdy klocek 3×1 zakrywa 0 lub 2 czarne pola. Ponadto w każdym z trzech przedstawionych kolorowań jest parzysta liczba czarnych pól. Jeśli chcemy ułożyć klocki 3×1 i jeden klocek 1×1, to taki klocek nie może leżeć na czarnym polu. Na poniższym rysunku przedstawiono pola, które nie zostały zamalowane w żadnym z kolorowań. Czytelnik zechce sprawdzić, że istnieje konstrukcja dla każdego położenia klocka 1×1 w zaznaczonych polach.



Zadanie 3.
Rozstrzygnąć, czy szachownicę 9×9 da się pokryć klockami 5×1 i 6×1.

Rozwiązanie:
Pokolorujmy szachownicę jak na rysunku. Przypuśćmy, że istnieje pokrycie tej szachownicy rozważanymi klockami. Zauważmy, że w szczególności środkowe pole byłoby zakryte, a klocek, który je zakrywa, zakrywałby również 4 lub 5 czarnych pól. Zauważmy ponadto, że każdy z klocków 5×1 i 6×1, poza klockiem przykrywającym pole środkowe, przykrywałby wtedy dokładnie jedno czarne pole.

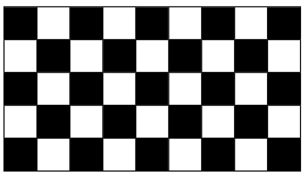


Zauważmy, że jeżeli środkowe pole byłoby zakryte przez klocek 5×1, to zostałoby 12 czarnych pól, przez co można wykorzystać jeszcze dokładnie 12 klocków. Łatwo zobaczyć, że wówczas co najwyżej $6 \cdot 12 + 5 = 77 < 81$ pól może być przykrytych. Zatem szachownicy nie da się w ten sposób przykryć.

Jeżeli natomiast środkowe pole byłoby zakryte przez klocek 6×1, to zostałoby 11 czarnych pól. Analogicznie, co najwyżej $6 \cdot 11 + 6 = 72 < 81$ pól może być przykrytych i ponownie nie da się pokryć całej szachownicy.

Zadanie 4. (IMO Shortlist 2017 C1)
Prostokąt R o bokach nieparzystej długości został podzielony na mniejsze prostokąty o bokach całkowitej długości i równoległych do odpowiednich boków prostokąta R. Udowodnić, że istnieje wśród nich taki prostokąt, którego odległości od boków prostokąta R są wszystkie nieparzyste albo wszystkie parzyste.

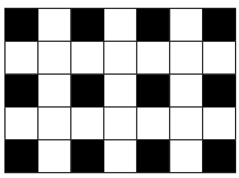
Rozwiązanie:
Zauważmy, że w prostokącie R liczba czarnych pól jest o jeden większa od liczby białych pól. Zauważmy ponadto, że stąd musi istnieć mały prostokąt zawierający więcej czarnych pól niż białych.



Łatwo zobaczyć, że taki prostokąt musi mieć boki o nieparzystych długościach oraz rogi w zamalowanych polach, z czego bezpośrednio wynika teza.

Zadanie 5. (Mszana 2023, zadanie 9)
Udowodnić, że planszy 5×7 nie można pokryć pewną dodatnią liczbą warstw L-klocków (które można obracać) w taki sposób, aby na każdym polu znajdowało się tyle samo warstw klocków.
Uwaga: *L-klocek* to kwadrat 2×2 z usuniętym kwadratem 1×1.

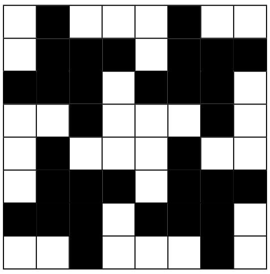
Rozwiązanie:
Przypuśćmy nie wprost, że każde pole przykryte jest dokładnie k razy. Zauważmy, że klocki musiałyby wtedy łącznie przykrywać dokładnie $35k$ pól.



Zauważmy ponadto, że jest dwanaście zamalowanych pól, a każdy klocek może zakrywać co najwyżej jedno takie pole. Zatem klocki, które je zakrywają, muszą zakrywać w sumie $3 \cdot 12 \cdot k = 36k$ pól. Wobec uzyskanej sprzeczności, pokrycie zgodne z warunkami zadania nie jest możliwe.

Zadanie 6. (IMO Shortlist 2014 C4)
Załóżmy, że figura F może być pokryta przy użyciu wyłącznie S-tetromin. Wykazać, że w każdym pokryciu F przy użyciu S-tetromin oraz Z-tetromin liczba Z-tetromin jest parzysta. W tym zadaniu nie dopuszczamy odwracania płytek na drugą stronę (czyli S i Z-tetromina to różne klocki).

Rozwiązanie:
Rozważmy następujące kolorowanie tablicy.



Zauważmy, że każde S-tetromino zakrywa parzyście wiele czarnych pól, natomiast każde Z-tetromino zakrywa nieparzyście wiele czarnych pól. Z początkowych warunków zadania wiadomo, że liczba czarnych pól wewnątrz figury F jest parzysta, więc również liczba Z-tetromin w każdym pokryciu musi również taka być.

Zadanie 7. (IMO Shortlist 2022 C3)
W każdym polu ogrodu w kształcie planszy 2022×2022 rośnie początkowo drzewo o wysokości 0. Ogrodnik i drwal wykonują ruchy na zmianę, ogrodnik wykonuje pierwszy ruch.

(1) Ogrodnik wybiera pewne pole. Drzewa na tym polu oraz na wszystkich polach mających z nim wspólną krawędź lub róg stają się o 1 jednostkę wyższe.

(2) Drwal wybiera 4 dowolne różne pola na planszy. Drzewa na każdym z tych pól stają się 1 jednostkę niższe.

Powiemy, że drzewo jest *majestatyczne*, jeśli jego wysokość jest nie mniejsza od 10^6. Wyznaczyć największą taką liczbę K, że ogrodnik może zapewnić, że w pewnym momencie jest K majestatycznych drzew na planszy, nieważne jak drwal będzie grał.

Rozwiązanie:
Uogólnijmy zadanie do planszy $3k \times 3k$. Udowodnimy, że ogrodnik nie może wyhodować więcej niż $5k^2$ majestatycznych drzew.

1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9

Zauważmy, że przy kolorowaniu jak na rysunku, ogrodnik zawsze zwiększa wysokość drzew z każdego koloru o co najwyżej 1. Drwal może więc zawsze utrzymywać kolory $1, 2, 3, 4$ na wysokości 0, ścinając je za każdym razem, kiedy ogrodnik coś na nich posadzi.

Teraz indukcyjnie udowodnimy, że ogrodnik zawsze może uzyskać $5k^2$ majestatycznych drzew. Przyjmijmy, że plansza $3k \times 3k$ została podzielona na kwadraty 3×3 jak na rysunku. Niech $f(n, m)$ będzie najmniejszą liczbą o tej własności, że po $f(n, m)$ ruchach ogrodnik potrafi doprowadzić do sytuacji, w której w każdym z początkowych n kwadratów 3×3 znajduje się co najmniej 5 drzew o wysokości nie mniejszej niż m (niezależnie od gry drwala).

Zauważmy, że jeśli ogrodnik wykona w pierwszym kwadracie $5m$ ruchów na polu o kolorze 5, to doda do wysokości drzew w tym kwadracie $45m$ jednostek. W tym czasie drwal zetnie co najwyżej $20m$ jednostek wysokości, więc nie może z co najmniej 5 drzew ściąć $4m$ jednostek lub więcej. Zatem $f(1,m) \leqslant 5m$, w szczególności $f(1,m)$ istnieje.

Załóżmy więc, że $f(n-1,m)$ istnieje. Pokażemy, jak zbudować strategię dla n kwadratów. Ogrodnik najpierw wykonuje $f(1, m+f(n-1,m))$ ruchów wyłącznie w n-tym kwadracie. Następnie, ignorując już ostatni kwadrat, rozgrywa na początkowych $n-1$ kwadratach strategię złożoną z $f(n-1,m)$ ruchów.

Wówczas w każdym z początkowych $n-1$ kwadratów znajduje się przynajmniej 5 drzew wysokości nie mniejszej niż m. Jednocześnie z każdego drzewa w n-tym kwadracie drwal ściął co najwyżej $f(n-1,m)$ jednostek wysokości, zatem drzewa, które miały wcześniej wysokość co najmniej $m + f(n-1,m)$, mają teraz wysokość nie mniejszą od m. Wobec tego $f(n,m) \leqslant f(1, m+f(n-1,m)) + f(n-1,m)$. To kończy dowód.

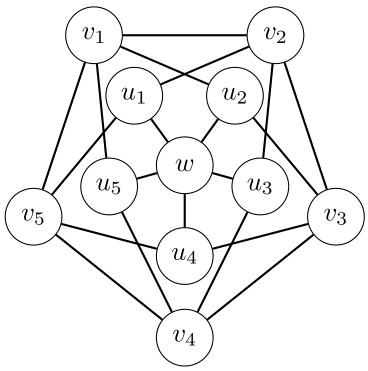
Zadanie 8.
Wykazać, że k to największy ze stopni wierzchołków grafu G, to graf G można wierzchołkowo pokolorować na $k+1$ kolorów. Czy liczbę kolorów można poprawić?

Rozwiązanie:
Uporządkujmy wierzchołki grafu w pewnej kolejności $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Rozważmy wierzchołek v_i oraz wszystkie jego sąsiednie wierzchołki o indeksach mniejszych od i. Skoro v_i ma co najwyżej k krawędzi, to użytych kolorów w sąsiednich wierzchołkach jest co najwyżej k. Stąd istnieje kolor, który nie został jeszcze tam użyty – kolorujemy nim wierzchołek v_i. W taki sposób mamy pewność, że nie istnieje krawędź grafu (v_i, v_j), która jest jednokolorowa.

Liczby $k+1$ kolorów nie da się zmniejszyć. Kontrprzykład stanowi klika o $k+1$ wierzchołkach. Wówczas każdą parę wierzchołków łączy krawędź, a z zasady szufladkowej Dirichleta istnieją dwa wierzchołki w tym samym kolorze.

Zadanie 9.
Rozstrzygnąć, czy każdy graf bez trójkątów (cykli długości 3) można pokolorować co najwyżej trzema kolorami.

Rozwiązanie:
$\boxed{\text{NIE.}}$ Graf przedstawiony na rysunku spełnia założenia zadania, ale jego liczba chromatyczna wynosi 4.



Przypuśćmy, że powyższy graf da się pokolorować trzema kolorami: a – alabastrowym, b – błękitem paryskim, c – cynobrowym. Bez straty ogólności niech wierzchołek w będzie koloru a. Każdy z wierzchołków $u_1, \ldots, u_5$ musi zatem być koloru b lub c. Załóżmy, że więcej jest takich koloru b, czyli liczba wierzchołków w kolorze b to 3, 4 lub 5.

Zauważmy, że jeżeli wierzchołek u_k jest koloru b, to wierzchołki v_{k-1} oraz v_{k+1} nie mogą być koloru b (przyjmujemy $v_6 = v_1$). Z tego wynika, że mogą być co najwyżej 3 wierzchołki wewnętrzne koloru b. Istotnie, w przeciwnym razie wierzchołki $v_1, \ldots, v_5$ musiałyby być pokolorowane dwoma kolorami a i c, jednak nie da się pokolorować cyklu nieparzystej długości dwoma kolorami. Zatem liczba wierzchołków koloru b wynosi 3.

Zauważmy, że indeksy tych wierzchołków nie mogą tworzyć spójnego ciągu liczb całkowitych. Bez straty ogólności niech tymi punktami będą u_1, u_2, u_4. Łatwo zobaczyć, że w takiej konfiguracji dalsze kolorowanie jest niemożliwe.

Zadanie 10.
Krawędzie grafu pełnego (kliki) o 17 wierzchołkach pokolorowano trzema kolorami. Wykazać, że istnieje jednokolorowy trójkąt.

Rozwiązanie:
Z każdego wierzchołka wychodzi dokładnie 16 krawędzi. Na mocy zasady szufladkowej Dirichleta wśród sąsiadów wierzchołka A_0 istnieją takie wierzchołki $A_1, A_2, \ldots, A_6$, że krawędzie

$$A_0 - A_1,\ A_0 - A_2,\ \ldots,\ A_0 - A_6$$

są tego samego koloru. Dla ustalenia uwagi, niech tym kolorem będzie czerwony. Zauważmy, że gdyby pewna krawędź $A_i - A_j$ była czerwona dla $1 \leqslant i < j \leqslant 6$, to natychmiast otrzymujemy czerwony trójkąt. Załóżmy więc, że tak nie jest. Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy, że spośród krawędzi

$$A_1 - A_2,\ A_1 - A_3,\ \ldots,\ A_1 - A_6,$$

co najmniej 3 są w tym samym kolorze. Niech będą to krawędzie dla wierzchołków A_2, A_3, A_4. Niech tym kolorem będzie kolor niebieski. Zauważmy, że jeśli którakolwiek z krawędzi

$$A_2 - A_3,\ A_2 - A_4,\ A_3 - A_4$$

jest niebieska, to otrzymujemy niebieski trójkąt. W przeciwnym wypadku żadna z tych krawędzi nie jest czerwona ani niebieska, więc wszystkie zostały pokolorowane trzecim kolorem, co także daje jednokolorowy trójkąt.

Zadanie 11. (Mszana 2021, zadanie 27)
Dany jest graf, którego wierzchołki kolorujemy na biało lub czarno. Na początku wszystkie wierzchołki grafu są białe. W jednym ruchu wybieramy dowolny wierzchołek i zmieniamy jego kolor oraz kolory wszystkich jego sąsiadów. Rozstrzygnąć, czy dla każdego grafu w skończonej liczbie ruchów można pokolorować wszystkie jego wierzchołki na czarno.

Rozwiązanie:
Udowodnimy, że dla każdego grafu jest to możliwe. Niech n będzie liczbą wierzchołków grafu. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na n. Dla $n = 1$ teza zadania jest oczywista – wystarczy zmienić kolor jedynego wierzchołka. Załóżmy teraz, że teza jest prawdziwa dla pewnego $n \geqslant 1$ i rozważmy dowolny graf, który ma $n + 1$ wierzchołków. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ będą wierzchołkami tego grafu. Dla każdego wierzchołka v_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n + 1$ z założenia indukcyjnego istnieje ciąg operacji na wierzchołkach

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{i-1},\ v_{i+1},\ v_{i+2},\ \ldots,\ v_{n+1},$$

który zmienia kolor każdego z nich na przeciwny. Taki ciąg ruchów będziemy nazywać *kolorowaniem dopełniającym* wierzchołka v_i. Jeśli dla pewnego v_i w wyniku tego procesu wierzchołek v_i również zmieni kolor, to znaleźliśmy odpowiedni ciąg ruchów. Załóżmy zatem, że każde kolorowanie dopełniające wierzchołka nie zmienia jego koloru.

Załóżmy, że pewien wierzchołek ma parzystą liczbę sąsiadów. Dla ustalenia uwagi niech tym wierzchołkiem będzie v_1, a jego sąsiadami wierzchołki $v_2, v_3, \ldots, v_{m+1}$. Kolejno wykonujemy kolorowania dopełniające wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$. Wówczas każdy z tych wierzchołków zmieni kolor m razy, czyli na końcu pozostanie biały. Pozostałe wierzchołki zmienią kolor na czarny. Wystarczy teraz wykonać pojedynczy ruch w wierzchołku v_1, aby każdy wierzchołek był pokolorowany na czarno.

Pozostał do rozważenia przypadek, gdy każdy wierzchołek ma nieparzystą liczbę sąsiadów. Na mocy lematu o uściskach dłoni graf ten ma parzyście wiele wierzchołków, czyli liczba n jest nieparzysta. Kolejno wykonujemy kolorowania dopełniające wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$. Zauważmy, że wtedy każdy wierzchołek zmieni kolor n razy, czyli jest na końcu czarny. To kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 12. (Mszana 2022, zadanie 27)
Niech G będzie grafem nieskierowanym bez trójkątów, o n wierzchołkach. Wykazać, że wierzchołki grafu G można tak pokolorować co najwyżej $2\sqrt{n}$ kolorami, aby żadne dwa wierzchołki tego samego koloru nie sąsiadowały ze sobą.

Rozwiązanie:
Pokażemy nieco silniejsze twierdzenie. Każdy graf bez trójkątów o n wierzchołkach można pokolorować za

pomocą co najwyżej $\lceil 2\sqrt{n}\rceil - 1$ kolorów. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy teraz, że liczba całkowita $n \geqslant 2$ ma tę własność, że teza zachodzi dla wszystkich grafów bez trójkątów o mniej niż n wierzchołkach. Niech $k = \lceil 2\sqrt{n}\rceil - 1 \in \mathbb{Z}$.

Jeśli każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej $k-1$, to możemy zachłannie pokolorować każdy z wierzchołków kolorem różnym od kolorów jego sąsiadów. Pozostał więc przypadek, gdy istnieje wierzchołek A stopnia co najmniej k. Pokolorujmy wówczas wierzchołek A kolorem 1. Żadna para jego sąsiadów nie sąsiaduje ze sobą, więc możemy pokolorować każdy z tych wierzchołków kolorem 2. Usuńmy teraz z grafu wszystkie pokolorowane wierzchołki. Otrzymujemy wówczas graf bez trójkątów mający

$$m \leqslant n - (k+1) = n - \lceil 2\sqrt{n}\rceil$$

wierzchołków. Z założenia indukcyjnego można go pokolorować za pomocą co najwyżej $\lceil 2\sqrt{m}\rceil - 1$ nowych kolorów. Łącznie zużyjemy więc co najwyżej

$$2 + (\lceil 2\sqrt{m}\rceil - 1) = \lceil 2\sqrt{m}\rceil + 1$$

kolorów. Zauważmy, że $m < n - 2\sqrt{n} + 1 = (\sqrt{n} - 1)^2$, więc

$$\lceil 2\sqrt{m}\rceil + 1 \leqslant 2\sqrt{m} + 2 < 2\sqrt{n} \leqslant k + 1.$$

Ponieważ liczba kolorów jest całkowita, musi być nie większa od k. To kończy dowód.

Zadanie 13.
Na płaszczyźnie narysowano n czerwonych prostych, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Punkt nazwiemy *interesującym*, jeżeli przecinają się w nim pewne dwie czerwone proste. Interesujące punkty sąsiadują ze sobą, jeżeli leżą one na jednej czerwonej prostej i na odcinku między nimi nie ma innych interesujących punktów. Wykazać, że możemy pokolorować interesujące punkty na trzy kolory w taki sposób, by punkty w tym samym kolorze nie sąsiadowały ze sobą.

Rozwiązanie:
Weźmy dowolną prostą l (niekoniecznie czerwoną), taką że wszystkie interesujące punkty leżą po jednej stronie l i mają parami różną odległość od l. Istnienie takiej prostej można uzasadnić chociażby następująco.

Weźmy dowolną prostą k, taką że wszystkie interesujące punkty leżą po tej samej stronie prostej k. Ponadto niech P będzie punktem na tej prostej. Niech zbiór S zawiera wszystkie proste powstające z k poprzez obrót o kąt z przedziału $[0, \alpha]$ wokół punktu P, przy czym $180^\circ > \alpha > 0^\circ$ jest dostatecznie małym kątem. Zauważmy, że zbiór S zawiera nieskończenie wiele różnych prostych. Dodatkowo dla różnych $a, b \in S$ mamy $a \nparallel b$. Niech zbiór R zawiera wszystkie proste wyznaczone przez dwa czerwone punkty. Oczywiście zbiór R zawiera maksymalnie $n(n-1)/2$ elementów. Zatem istnieje taka prosta $a \in S$, że dla każdego $b \in R$ mamy $a \nparallel b$. Wówczas prosta a jest szukaną prostą.

Kolorujemy interesujące punkty w kolejności od punktu o największej odległości do punktu o najmniejszej odległości od prostej l. Wtedy każdy z punktów w momencie kolorowania będzie miał najwyżej dwóch pokolorowanych sąsiadów. Istotnie, przez każdy punkt przechodzą co najwyżej dwie czerwone proste. Zatem można pokolorować ten punkt kolorem różnym od kolorów jego pokolorowanych sąsiadów, co kończy dowód.

Zadanie 14. (Mszana 2018, zadanie 14)
Dana jest plansza o wymiarach 2018×2018. *Kwadraciskiem* nazwiemy cztery pola tej planszy o wspólnym wierzchołku. Każde pole planszy pomalowano na biało lub czarno w taki sposób, że każde pole posiadające krawędź leżącą na brzegu planszy ma kolor czarny oraz żadne kwadracisko nie jest jednokolorowe. Dowieść, że istnieje takie kwadracisko, że każde dwa jego pola sąsiadujące krawędzią mają różne kolory.

Rozwiązanie:
Kwadraciskiem *pokolorowanym w szachownicę* będziemy nazywać takie kwadracisko, którego każde dwa pola sąsiadujące krawędzią mają różne kolory. Przypuśćmy, że istnieje kolorowanie bez kwadracisk jednokolorowych oraz kwadracisk pokolorowanych w szachownicę.

Nazwijmy krawędź dwóch sąsiadujących kwadratów o różnym kolorze *granicą*. Zauważmy, że każde kwadracisko zawierać we wnętrzu dokładnie dwie granice. Ponadto każda granica należy do wnętrz dokładnie dwóch kwadracisk. Granic zatem jest tyle samo co kwadracisk, czyli 2017^2.

Zauważmy jednak, że każda kolumna zawiera parzystą liczbę granic. Istotnie, ponieważ pierwszy i ostatni kwadrat mają taki sam kolor, każdy pokolorowany kwadrat wprowadza 0 albo 2 nowe granice w tej kolumnie. Zatem 2017^2 jest sumą liczb parzystych, co oczywiście jest niemożliwe. Wobec tego nie może istnieć takie kolorowanie.

Grupa Finał++

Moving points

Konstanty Smolira

Teoria

Na początku przypomnimy dwa pojęcia, których znajomość będzie ważna dla zrozumienia tego skryptu. Poniżej znajduje się bardzo krótkie przypomnienie najważniejszych faktów ich dotyczących.

Płaszczyzna rzutowa

Można ją zdefiniować jako płaszczyznę euklidesową z dodanymi punktami przecięć prostych równoległych, *punktami w nieskończoności*, oraz z nową prostą obejmującą wszystkie punkty w nieskończoności, *prostą w nieskończoności*. Na płaszczyźnie rzutowej każda para różnych prostych przecina się w jednym punkcie.

Krzywe stożkowe

Są to krzywe na płaszczyźnie, które da się opisać wielomianem dwóch zmiennych stopnia drugiego (w kartezjańskim układzie współrzędnych jedną zmienną jest zmienna x, a drugą zmienna y). Krzywe stożkowe możemy też rozważać na płaszczyźnie rzutowej, pamiętając o dodaniu odpowiednich punktów w nieskończoności. Możemy też rozważyć obiekt dualny do krzywej stożkowej – jej obwiednię, czyli zbiór wszystkich prostych stycznych.

1. Przez każde 5 punktów da się przeprowadzić stożkową; jeśli żadne 4 z tych punktów nie są współliniowe, to jest dokładnie jedna taka stożkowa.
2. Dana jest prosta oraz krzywa stożkowa. Wówczas prosta przecina krzywą stożkową dokładnie dwa razy albo ani razu, przy czym styczność liczymy jako przecięcie dwukrotne.
3. Twierdzenie Pascala.
4. Względem krzywych stożkowych definiujemy biegunowe analogicznie jak dla okręgu; wszystkie podstawowe twierdzenia dotyczące biegunowych również dla nich działają.
5. Rozważmy dwie krzywe stożkowe; poddajmy obwiednię drugiej z rozważanych krzywych stożkowych przekształceniu biegunowemu względem pierwszej z tych krzywych stożkowych. Dostaniemy zbiór punktów – będzie on tworzył stożkową.

Kluczowe dla naszych rozważań będzie pojęcie *mapy rzutowej.*

Mapy rzutowe

Będziemy badać pewne bijekcje pomiędzy *obiektami geometrycznymi* (nazwa robocza); przez obiekt geometryczny będziemy rozumieć:

1. Prostą jako zbiór punktów.
2. Punkt jako zbiór przechodzących przez niego prostych – tzw. *pęk prostych* (ang. *pencil of lines*). Dla rozróżnienia punktu od pęku prostych, pęk prostych punktu A będziemy oznaczać jako $\mathcal{C}_A$.
3. Krzywą stożkową jako zbiór punktów. Na potrzeby tego referatu dwóch prostych nie uznajemy za krzywą stożkową.
4. Krzywą stożkową jako jej obwiednię.

Nie każda bijekcja pomiędzy obiektami geometrycznymi będzie nas interesować. Mapy rzutowe okazują się być klasą bijekcji o ciekawych własnościach. Znaczna większość obecnych w zadaniach korespondencji pomiędzy obiektami geometrycznymi jest mapami rzutowymi. Są to dokładnie te bijekcje, które zachowują dwustosunek każdej czwórki punktów. Wystarczy jednak znać o nich następujące fakty, które zapewne kojarzą już Czytelnicy sprawnie operujący dwustosunkiem.

Map rzutowych jest całkiem dużo...

Następujące przekształcenia są mapami rzutowymi, ale to nie jedyne przykłady.

1. Identyczność jako mapa z obiektu geometrycznego na siebie.

2. Złożenie dwóch map rzutowych.
3. Odwrotność mapy rzutowej.
4. Izometrie, jednokładności.
5. Przekształcenie biegunowe.
6. Rozważmy prostą p oraz punkt A poza tą prostą, a także punkt X ruszający się po prostej p. Bijekcja przerzucająca punkt X na prostą AX jest mapą rzutową pomiędzy p a $\mathcal{C}_A$.
7. Dana jest stożkowa α oraz punkt A ruszający się po niej. Niech l będzie styczną do stożkowej α w punkcie A. Bijekcja przerzucająca punkt A na styczną l jest mapą rzutową z krzywej stożkowej α na obwiednię krzywej stożkowej α. Jest to szczególny przypadek przekształcenia biegunowego.
8. Dana jest stożkowa α oraz punkt A poza nią. Po stożkowej rusza się punkt X. Punkt Y jest drugim przecięciem prostej AX z stożkową α. Jeśli AX jest styczną, to $Y = X$. Bijekcja przerzucająca punkt X na punkt Y jest mapą rzutową ze stożkowej α na siebie.
9. Rozważmy stożkową α oraz punkt A leżący na niej, a także punkt X ruszający się po stożkowej α. Bijekcja przerzucająca punkt X na prostą AX jest mapą rzutową ze stożkowej α na pęk prostych $\mathcal{C}_A$. Jeśli $X = A$, to za prostą AX uznajemy styczną w punkcie A.
10. Dana jest stożkowa α, styczna do niej prosta l oraz punkt A ruszający się po tej stycznej. Niech p będzie drugą prostą styczną z punkt A do stożkowej α. Jeśli punkt A jest punktem styczności do prostej l to za prostą p bierzemy prostą l. Bijekcja przerzucająca punkt A na prostą p jest mapą rzutową z prostej l na obwiednię stożkowej α.
11. (Inwolucyjne twierdzenie Desargues'a) Rozważmy prostą p oraz cztery różne punkty A, B, C, D, nieleżące na p, z czego żadne trzy z nich nie są współliniowe. Rozważmy też punkt X ruszający się po stożkowej p. Niech punkt Y będzie drugim przecięciem krzywej stożkowej przechodzącej przez punkty X, A, B, C, D z prostą p. Wtedy bijekcja przerzucająca punkt X na punkt Y jest mapą rzutową z prostej p na prostą p. *Uwaga: Można pokazać, że jedynymi inwolucjami rzutowymi na prostej jest inwersja, identyczność, odbicie i złożenie inwersji z odbiciem.*

... ale są zaskakująco miłe

Na wszystkich wymienionych wcześniej obiektach geometrycznych można zdefiniować dwustosunek; mapy rzutowe go zachowują, to znaczy

$$(A, B; C, D) = (\phi(A), \phi(B); \phi(C), \phi(D)),$$

gdzie ϕ jest mapą rzutową $\alpha \to \beta$, a A, B, C, D to punkty należące do stożkowej α.

Będziemy bardzo polegać na następującej własności. Każda mapa rzutowa ϕ z obiektu na siebie niebędąca identycznością ma co najwyżej dwa punkty stałe, czyli takie punkty X, że $\phi(X) = X$.

Innymi słowy, jeśli mapa rzutowa ma trzy punkty stałe, to jest to identyczność. Wynika z tego następujący fakt

Lemat 1

Dane są obiekty geometryczne α, β oraz dwie mapy rzutowe $\phi, \psi : \alpha \to \beta$. Jeśli istnieją takie różne punkty X, Y, Z, że

$$\phi(X) = \psi(X), \quad \phi(Y) = \psi(Y), \quad \phi(Z) = \psi(Z),$$

to $\phi = \psi$.

Innymi słowy, jeżeli dwie mapy rzutowe pomiędzy tą samą parą obiektów pokrywają się w trzech miejscach, to są one tą samą mapą rzutową. Dowód lematu jest nietrudny – wiemy, że ϕ^{-1} jest mapą rzutową $\beta \to \alpha$, a zatem $\phi^{-1}\psi$ jest mapą rzutową $\alpha \to \alpha$. Punkty X, Y, Z są jej punktami stałymi, a zatem jest ona identycznością.

Powyższy lemat będzie dla nas fundamentalny. Rozwiązując zadania będziemy konstruować własne mapy rzutowe, pokazywać, że pewne dwie mapy pokrywają się w trzech przypadkach, a następnie z tego dedukować, że pokrywają się wszędzie.

Jak to wygląda w praktyce?

Na początku przydałoby się mieć obiekty geometryczne, pomiędzy którymi nasze mapy rzutowe będą operować. Ten krok to wybranie części rysunku, która będzie „ustalona w miejscu". Następnie weźmiemy jeden z pozostałych punktów (czy też prostych) i zaczniemy nim „ruszać". Można to sobie wyobrazić jako przesuwanie tego punktu w GeoGebrze. Z tego pojedynczego punktu próbujemy skonstruować resztę rysunku, używając map rzutowych. Tezę przedstawiamy na przykład w postaci „punkt X to punkt Y". Jeśli wiemy, że $X = \phi(P)$ oraz $Y = \psi(P)$, przym czym ϕ i ψ są mapami rzutowymi, to wystarczy pokazać, że ϕ i ψ pokrywają się w trzech przypadkach – czyli w praktyce często rozwiązać zadanie dla trzech różnych konfiguracji. Dokończenie zadania rozwiązywanego metodą animacji polega na pokazaniu trzech przypadków, w których teza wyrażona językiem map rzutowych zachodzi.

Jasne jest, że szukamy przypadków możliwie najprostszych. Należą do nich przypadki, gdzie pewne dwa punkty się pokrywają, ale też na przykład przypadki, gdzie jeden z punktów jest punktem w nieskończoności.

Ćwiczenie 1.
Dany jest trójkąt ABC oraz okręgi ω_A, ω_B, ω_C dopisane odpowiednio do boków BC, AC, AB trójkąta ABC. Prosta l_A jest wspólną zewnętrzną styczną do okręgów ω_B i ω_C różną od prostej BC. Analogicznie definiujemy styczne l_B oraz l_C. Dany jest punkt D na prostej l_A. Z punktu D narysowano drugą styczną do okręgu ω_C, która przecięła prostą l_B w punkcie E. Analogicznie definiujemy punkt F. Pokazać, że prosta EF jest styczna do okręgu ω_A.

Twierdzenie Steinera

Twierdzenie (Steinera)

Dane są dwa pęki prostych $\mathcal{C}_A$ i $\mathcal{C}_B$ oraz mapa rzutowa $\phi : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_B$ między nimi. Wówczas

- Jeśli $\phi(AB) = AB$, to istnieje taka prosta l nieprzechodząca przez punkty A ani B, że dla dowolnego punktu X na prostej l mamy $\phi(AX) = \phi(BX)$.
- W przeciwnym przypadku istnieje taka stożkowa α przechodząca przez punkty A i B, że dla dowolnego punktu X na stożkowej α mamy $\phi(AX) = \phi(BX)$. Jeśli $X = A$, to za prostą AX uznajemy styczną w punkcie A do stożkowej α; analogicznie jeśli $X = B$.

Twierdzenie to pomoże nam w sytuacjach, gdy przecinamy ze sobą dwie ruszające się proste. Nie tylko mówi nam ono o miejscu geometrycznym tego przecięcia, ale też pozwala skonstruować je, używając samych map rzutowych! Istotnie, jeśli chcemy skonstruować przecięcie prostych $k \in \mathcal{C}_A$ oraz $\phi(l)$, to wystarczy nam przeciąć prostą k z prostą l (w pierwszym przypadku) lub prostej k ze stożkową α (w drugim, co jest możliwe dzięki $A \in \alpha$). Warto zauważyć, że jeśli $k = \phi(k) = AB$, to dostaniemy jednoznacznie punkt X, mimo że proste k i $\phi(k)$ „przecinają się w nieskończenie wielu punktach".

Zachodzi też twierdzenie dualne do twierdzenia Steinera, czyli takie, gdzie role punktów i prostych są odwrócone. Wystarczy zaaplikować dowolne przekształcenie biegunowe do całej konfiguracji z twierdzenia Steinera.

Nieco notacji... Strzałki $A \to B$ oznaczają, że funkcja prowadzi z jednego obiektu A w drugi obiekt B. Strzałki $a \mapsto b$ oznaczają, że przesyła ona element $a \in A$ na element $b \in B$. Jeśli $f : A \to B$, $g : B \to C$ są funkcjami, to przez $g \circ f$ będziemy oznaczać funkcję $x \mapsto g(f(x))$ (najpierw aplikowane jest f, potem g).

Ćwiczenie 2. (Twierdzenie Kariyi)
Dany jest trójkąt ABC, w którym punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Punkty D, E, F to rzuty punktu I odpowiednio na proste BC, CA, AB. Dane są punkty X, Y, Z na półprostych ID, IE, IF takie, że $IX = IY = IZ$. Pokazać, że proste AX, BY, CZ są współpękowe.

Zadania

Zadanie 3. (RMM 2016)
Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F odpowiednio na bokach BC, AC, AB takie, że czworokąty $ABDE$ oraz $ACDF$ są cykliczne. Punkt A' jest odbiciem punkty A względem prostej BC. Prosta $A'C$ przecina prostą DE w punkcie P, a prosta $A'B$ przecina prostą DF w punkcie Q. Pokazać, że proste AD, BP, CQ są współpękowe.

Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC, punkt D na jego boku AB, a także punkt I na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ACB$. Okręgi ω i δ są okręgami opisanymi na trójkątach ACD i BCD. Punkt P jest drugim przecięciem okręgu ω z prostą AI, punkt Q jest drugim przecięciem okręgu ω z prostą CI, punkt R jest drugim przecięciem okręgu δ z prostą BI, a punkt S jest drugim punktem przecięcia okręgu δ z prostą CI. Pokazać, że proste AB, PQ, RS są współpękowe.

Zadanie 5.
Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg Ω o środku w punkcie O. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC, punkt P jest dowolnym punktem na prostej BC. Punkt S leży na okręgu Ω, przy czym $\sphericalangle ASP = 90°$. Prosta SH przecina okrąg opisany na trójkącie APS po raz drugi w punkcie X. Prosta OP przecina proste CA i AB odpowiednio w punktach Q i R. Odcinki QY i RZ są wysokościami w trójkącie AQR. Pokazać, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

Zadanie 6.
Dany jest trójkąt ABC, w którym punkty P i Q są sprzężone izogonalnie. Punkty D, E, F są przecięciami prostych AP, BP, CP odpowiednio z bokami BC, AC, AB. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech X będzie przecięciem prostej prostopadłej do prostej EF przez punkt A z prostą OD. Pokazać, że prosta QX jest prostopadła do prostej BC.

Zadanie 7.
Dany jest trójkąt ABC, w którym punkty P i Q są sprzężone izogonalnie. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego ω na tym trójkącie. Punkt H jest ortocentrum trójkąta QBC, natomiast punkt H' jest odbiciem punktu H przez prostą BC. Punkt D jest punktem na okręgu ω takim, że $AD \perp OP$. Punkt E jest drugim przecięciem prostej $H'D$ z okręgiem ω. Pokazać współliniowość punktów A, H, E.

Rozwiązania

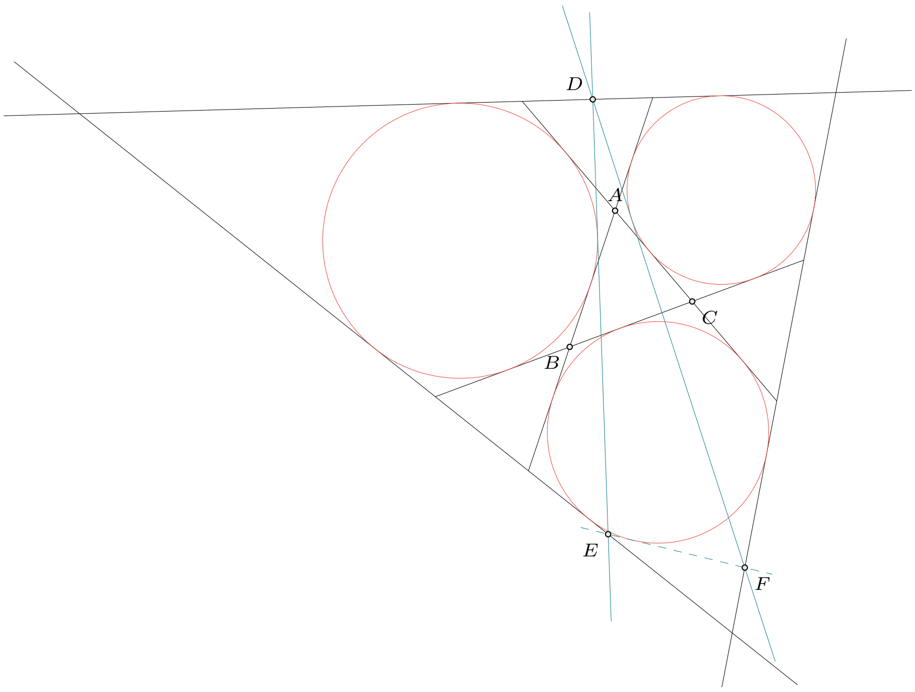
Autor rozwiązań: Konstanty Smolira.

Ćwiczenie 1.
Dany jest trójkąt ABC oraz okręgi ω_A, ω_B, ω_C dopisane odpowiednio do boków BC, AC, AB trójkąta ABC. Prosta l_A jest wspólną zewnętrzną styczną do okręgów ω_B i ω_C różną od prostej BC. Analogicznie definiujemy styczne l_B oraz l_C. Dany jest punkt D na prostej l_A. Z punktu D narysowano drugą styczną do okręgu ω_C, która przecięła prostą l_B w punkcie E. Analogicznie definiujemy punkt F. Pokazać, że prosta EF jest styczna do okręgu ω_A.

Rozwiązanie:
Podążając za wyłożonym schematem rozwiązywania zadań dość intuicyjne jest tutaj „ustalenie” trójkąta ABC. Faktycznie, „ruszają” nam się wtedy tylko punkty D, E, F. Niech $\pi_{l_A\omega_B}$ to mapa rzutowa z prostej l_A na obwiednię okręgu ω_B, która każdemu punktowi na prostej l_A przyporządkowuje jego drugą styczną do okręgu ω_B. Analogicznie zdefiniujmy $\pi_{l_C\omega_B}$, $\pi_{l_A\omega_C}$, $\pi_{l_B\omega_C}$, $\pi_{l_B\omega_A}$ oraz $\pi_{l_C\omega_A}$. Wprowadźmy też $\pi_{\omega_B l_A} = \pi^{-1}_{l_A\omega_B}$ i podobnie $\pi_{\omega_B l_C}$, $\pi_{\omega_C l_A}$, $\pi_{\omega_C l_B}$, $\pi_{\omega_A l_B}$ oraz $\pi_{\omega_A l_C}$. Widzimy, że wtedy $E = \pi_{\omega_C l_B}(\pi_{l_A\omega_C}(D))$ oraz $F = \pi_{\omega_B l_C}(\pi_{l_A\omega_B}(D))$. Naszą tezę z kolei możemy przedstawić jako $\pi_{l_B\omega_A}(E) = \pi_{l_C\omega_A}(F)$. Chcemy więc pokazać, że zachodzi

$$\pi_{l_B\omega_A}(\pi_{\omega_C l_B}(\pi_{l_A\omega_C}(D))) = \pi_{l_C\omega_A}(\pi_{\omega_B l_C}(\pi_{l_A\omega_B}(D))).$$

Po obu stronach mamy jednak mapę rzutową od punktu D – w takim razie wystarczą nam „trzy przypadki”, aby skończyć zadanie.



Teraz powinniśmy spojrzeć na nasz rysunek do zadania i zastanowić się, kiedy obecna w nim konfiguracja się upraszcza. W tym przypadku widzimy, że punkty D, E i F mogłyby być współliniowe, gdyby leżały na wspólnej stycznej wszystkich trzech okręgów. Całe szczęście takich stycznych mamy trzy – są to boki naszego trójkąta. Zatem na prostej l_A interesują nas punkty: $D_A = l_A \cap BC$, $D_B = l_A \cap AC$, $D_C = l_A \cap AB$. Są one parami różne, gdyż $A, B, C \notin l_A$. Dalej

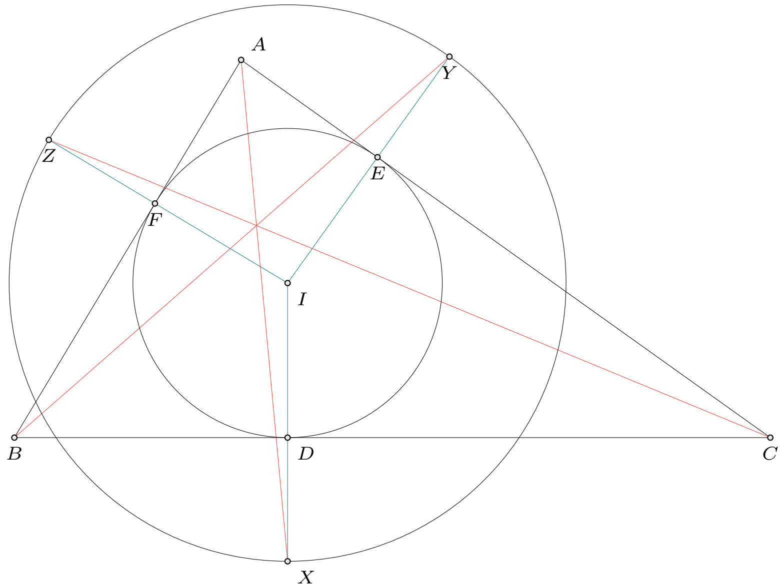
$$\pi_{l_B\omega_A}(\pi_{\omega_C l_B}(\pi_{l_A\omega_C}(D_A))) = \pi_{l_B\omega_A}(\pi_{\omega_C l_B}(BC)) = \pi_{l_B\omega_A}(BC \cap l_B) = BC.$$

Analogicznie rozwijamy prawą stronę naszej tezy i dostajemy, że zachodzi ona dla punktu D_A. Przypadki dla punktów D_B i D_C są w pełni analogiczne – Czytelnik zechce sprawdzić, że te przypadki w istocie zachodzą. Skoro punkty D_A, D_B, D_C są parami różne, to właśnie pokazaliśmy tezę dla dowolnego wyboru punktu $D \in l_A$.

Pozornie skomplikowana konfiguracja okazała się wyrażalna za pomocą kilku map rzutowych. Oczywiście nie zawsze wybór stałej i ruchomej części rysunku będzie trywialny, czasami musieli użyć klasycznych technik geometrycznych żeby wyrazić treść zadania za pomocą map rzutowych, a czasami zadanie po prostu będzie bardzo trudno wyrazić za pomocą samych map rzutowych.

Ćwiczenie 2. (Twierdzenie Kariyi)
Dany jest trójkąt ABC, w którym punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Punkty D, E, F to rzuty punktu I odpowiednio na proste BC, CA, AB. Dane są punkty X, Y, Z na półprostych ID, IE, IF takie, że $IX = IY = IZ$. Pokazać, że proste AX, BY, CZ są współpękowe.

Rozwiązanie:
Ponownie dość intuicyjną myślą jest tutaj ustalenie trójkąta ABC oraz ruszanie punktami X, Y, Z. Wraz z trójkątem ABC znamy wtedy punkt I oraz proste ID, IE, IF po których będą się ślizgać punkty X, Y, Z. Rozważmy obrót w punkcie I, który przekształca półprostą ID na IE. Możemy go rozważać jako mapę rzutową z prostej ID na prostą IE – nazwijmy ją ϕ_{DE}. Analogicznie definiujemy ϕ_{DF}. Widzimy już, że $Y = \phi_{DE}(X)$ oraz $Z = \phi_{DF}(X)$. Niech $\pi_{DA} : ID \to \mathcal{C}_A$ jest mapą rzutową przypisującą każdemu punktowi P na ID prostą PA. Podobnie definiujemy π_{EB} oraz π_{FC}. Mapy te są dobrze zdefiniowane tylko gdy $A \notin ID$, $B \notin IE$, $C \notin IF$; jednak w przeciwnym przypadku trójkąt ABC jest równoramienny, a teza staje się oczywista.



Rozważmy mapę $\psi_{BC} = \pi_{FC} \circ \phi_{EF} \circ \pi_{EB}^{-1} : \mathcal{C}_B \to \mathcal{C}_C$. Mamy $\psi_{BC}(BY) = CZ$. Skoro interesuje nas przecięcie BY oraz CZ, to niech α będzie stożkową lub prostą, którą daje nam twierdzenie Steinera dla ψ_{BC}. Niech $\pi_{\alpha B}$ będzie mapą rzutową, która każdemu punktowi $P \in \alpha$ przyporządkowywuje prostą PB. Jeśli α jest prostą, to taka mapa nie istnieje gdyż wtedy $B \notin \alpha$; jeśli α jest stożkową, to taka mapa istnieje gdyż wtedy $B \in \alpha$. Tak samo oznaczamy $\pi_{\alpha C}$.

Dostaliśmy już, że przecięcie prostych BY oraz CZ leży na stożkowa α oraz $B, C \in \alpha$. Skoro miałoby to też być przecięcie z prostą AX, to punkt A też zapewne powinien leżeć na stożkowej α; nie różni się przecież niczym w oryginalnym zadaniu od punktów B i C. Pokażemy, że $A \in \alpha$ w następujący sposób:

Niech $A_B = \pi_{\alpha B}^{-1}(AB)$. Wykażemy, że $A_B = A$. Z twierdzenia Steinera wiemy, że $\pi_{\alpha C}(A_B) = \psi_{BC}(AB)$. Gdybyśmy wiedzieli, że $\psi_{BC}(AB) = AC$, $\pi_{\alpha C}(A_B) = AC$, czyli $A_B \in AC$, to $A_B = A$. Przekształćmy to równoważnie:

$$\psi_{BC}(AB) = AC \iff \phi_{EF}(E') = F',$$

gdzie E' jest przecięciem prostej IE z prostą AB, a F' jest przecięciem prostej IF z prostą AC. Ale teraz $IE' = IF'$ oraz punkt E' leży po przeciwnej stronie punktu I niż punktu E, a F' leży po przeciwnej stronie punktu I niż punkt F. Zatem $F' = \phi_{EF}(E')$ jak żądaliśmy. W takim razie rzeczywiście $A_B = A$, czyli $A \in \alpha$.

Powyższe rozumowanie rozpisałem „na strzałkach”, ale jego istota jest następująca: wiemy, że punkty na stożkowej α to przecięcia prostej BY z prostą CZ. By pokazać, że punkt A jest na stożkowej α, wskazałem taki dobór punktów Y, Z (E', F'), że punkt A staje się przecięciem prostych BY i CZ. Polecam upewnić się, że jest ono jasne, gdyż często pojawia się w zadaniach, gdzie chcemy pokazać współpękowość trzech prostych. Zdefiniujmy ψ_{BA} analogicznie jak poprzednio ψ_{BC}. Chcielibyśmy zdefiniować też mapę $\pi_{\alpha A}$ w analogii do poprzednich $\pi_{\alpha B}$, $\pi_{\alpha C}$, ale by to zrobić musimy wiedzieć, że stożkowa α nie jest prostą. Zacznijmy rozważać przypadki i liczmy na to, że ten mankament sam się rozwiąże:

- $\psi_{BC}(BI) = CI$, a więc $\pi_{\alpha B}^{-1}(BI) = I$.
- $\psi_{BC}(BE) = CE$, a więc $\pi_{\alpha B}^{-1}(BE) = CF \cap BE$.

- Aby znaleźć odpowiedni trzeci przypadek musimy się zastanowić nad możliwymi specjalnymi położeniami punktów Y i Z. Odhaczyliśmy już punkt I oraz punkty styczności okręgu wpisanego. Nadal jest jednak jeden naturalny kandydat, którym są punkty w nieskończoności na prostych IE oraz IF. Niech h_B będzie wysokością z punktu B. Wówczas

$$\psi_{BC}(h_B) = \pi_{FC}\phi_{EF}(h_B\infty) = \pi_{FC}(h_C\infty),$$

gdzie h_C to wysokość z punktu C, a $h_B\infty$ i $h_C\infty$ to punkty w nieskończoności na prostych h_B i h_C. Wobec tego $\pi_{\alpha B}^{-1}(h_B) = h_B \cap h_C$.

Gdyby stożkowa α była prostą, to przechodziłaby przez punkty A, I, $h_B \cap h_C$; a zatem trójkąt ABC byłby równoramienny, co już rozważyliśmy. Możemy więc mówić o $\pi_{\alpha A}$. Nasza teza to

$$\pi_{\alpha B}^{-1} \circ (BY) = \pi_{\alpha A}^{-1} \circ \psi_{BA}(BY),$$

gdyż $\psi_{BA}(BY) = AX$, więc wtedy proste BY i AX ciętyby się wspólnie na stożkowej α – a wiemy już, że prosta BY, stożkowa α oraz prosta CZ tną się w jednym punkcie. Wracając do rozważonych przez nas przypadków:

- $\pi_{\alpha A}^{-1} \circ \psi_{BA}(BI) = AI \cap \alpha$. Mamy $I \in AI, I \in \alpha$, co zgadza się z tym co policzyliśmy poprzednio!
- $\pi_{\alpha A}^{-1} \circ \psi_{BA}(BE) = AD \cap \alpha$. Proste AD, BE, CF tną się w jednym punkcie – jest to znany fakt. Jak już wiemy, proste BE i CF przecinają się na stożkowej α, a zatem tam też tną się z prostą AD.
- $\pi_{\alpha A}^{-1} \circ \psi_{BA}(BE) = h_A \cap \alpha$. Analogicznym rozumowaniem dochodzimy do wniosku, że i ten przypadek się zgadza.

To kończy właściwie rozwiązanie tego zadania. Warto zauważyć, że jeśli nieco przymrużymy oczy, to tak naprawdę wskazaliśmy trzy przypadki w których teza działa i pomachaliśmy rękami, ale pojawiły się techniczne niuanse związane z równoramiennością oraz musieliśmy użyć twierdzenia Steinera. Z powodów takich niuansów zachęcam by jednak zadania spisywać rzetelnie – w przeciwnym wypadku ryzykujemy utratę jednego punktu na olimpiadzie, ale najważniejsze jest zrozumienie tego, co się tutaj naprawdę dzieje.

Zadanie 3. (RMM 2016)
Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F odpowiednio na bokach BC, AC, AB takie, że czworokąty $ABDE$ oraz $ACDF$ są cykliczne. Punkt A' jest odbiciem punkty A względem prostej BC. Prosta $A'C$ przecina prostą DE w punkcie P, a prosta $A'B$ przecina prostą DF w punkcie Q. Pokazać, że proste AD, BP, CQ są współpękowe.

Rozwiązanie:
Ustalmy w miejscu trójkąt ABC i ruszajmy punktem D. Korzystając z potęgi punktu dostajemy $CD \cdot CB = CE \cdot CA$, czyli $CE/CD = CB/CA$. Wtedy na mocy twierdzenia Talesa prosta DE ma zawsze taki sam kierunek. Wobec tego prosta ta zawsze przechodzi przez pewien stały punkt w nieskończoności – nazwijmy go E^*. Gdyby $E^* \in A'C$, to proste $A'C$ oraz DE nie przecinałyby się na płaszczyźnie euklidesowej bądź pokrywałyby się, zatem $E^* \notin A'C$. Wtedy mamy ciąg map rzutowych

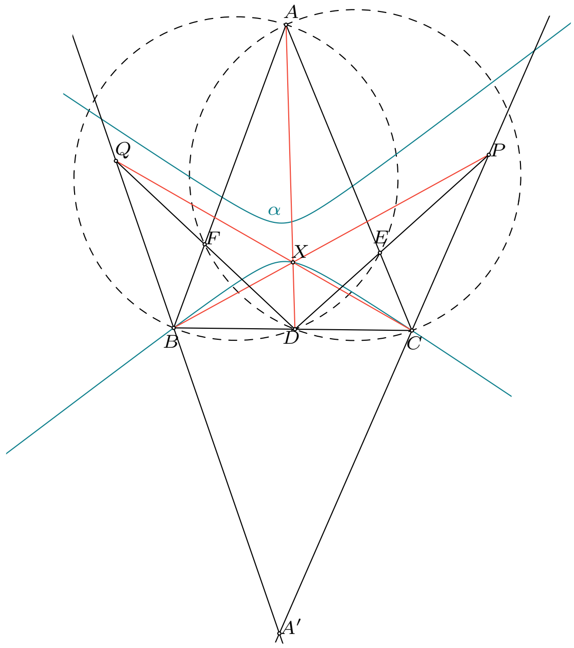
$$\begin{aligned} BC \to \mathcal{C}_{E^*} \to A'C \to \mathcal{C}_B, \\ D \mapsto DE \mapsto P \mapsto BP. \end{aligned}$$

Analogicznie $BC \ni D \mapsto CQ \in \mathcal{C}_C$. Wobec tego mamy mapę $\mathcal{C}_B \ni BP \mapsto CQ \in \mathcal{C}_C$ – zauważmy, że prosta BC nie przechodzi w niej na prostą BC, a zatem na mocy twierdzenia Steinera proste CQ oraz BP przecinają się w pewnym punkcie X, który porusza się po krzywej stożkowej, którą nazwijmy α. Rozważmy przypadek, gdy punkt P leży na przecięciu prostej $A'C$ z prostą AB. Możemy tak zrobić, gdyż istnieje mapowanie rzutowe $A'C \ni P \mapsto D \in BC$, więc wystarczy wziąć odpowiedni punkt D. Wówczas

$$\sphericalangle FDB = \sphericalangle BAC = \sphericalangle EDC,$$

czyli prosta FD jest symetryczna do prostej DE względem prostej BC. Zatem skoro proste AB, $A'C$, DE przecinają się w jednym punkcie, to ich odbicia symetryczne, $A'B$, AC, DF również. Jest to jednak punkt Q, czyli wtedy punkt A jest punktem przecięcia prostych BP i CQ. Zatem punkt A leży na stożkowej α. Niech punkt D' będzie przecięciem prostej AD ze stożkową α. Wtedy $AD(\mathcal{A}) \to X'(\alpha)$. Zatem istnieje mapa rzutowa pomiędzy punktami X a X'. Jest tak, ponieważ odwrotności oraz złożenia map rzutowych są mapami rzutowymi. Wystarczy teraz pokazać, że ta mapa jest identycznością.

Zauważmy, że teza staje się trywialna, gdy $D = B$ lub $D = C$. Pozostaje jeszcze jeden przypadek, którym może być punkt D w nieskończoności - wówczas prosta AD jest równoległa do prostej BC, prosta BP jest równoległa do prostej $A'C$, a prosta CQ do prostej $A'B$; te trzy proste przecinają się w odbiciu A' przez środek BC, co kończy dowód.



Zadanie 4.

Dany jest trójkąt ABC, punkt D na jego boku AB, a także punkt I na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ACB$. Okręgi ω i δ są okręgami opisanymi na trójkątach ACD i BCD. Punkt P jest drugim przecięciem okręgu ω z prostą AI, punkt Q jest drugim przecięciem okręgu ω z prostą CI, punkt R jest drugim przecięciem okręgu δ z prostą BI, a punkt S jest drugim punktem przecięcia okręgu δ z prostą CI. Pokazać, że proste AB, PQ, RS są współpękowe.

Rozwiązanie:

Ponownie narzuca się ustalenie trójkąta ABC. Dalej możemy ruszać punktami D lub I – punkt I wydaje się łatwiejszy do opanowania, gdyż w treści mamy dwa okręgi przechodzące przez punkt D.

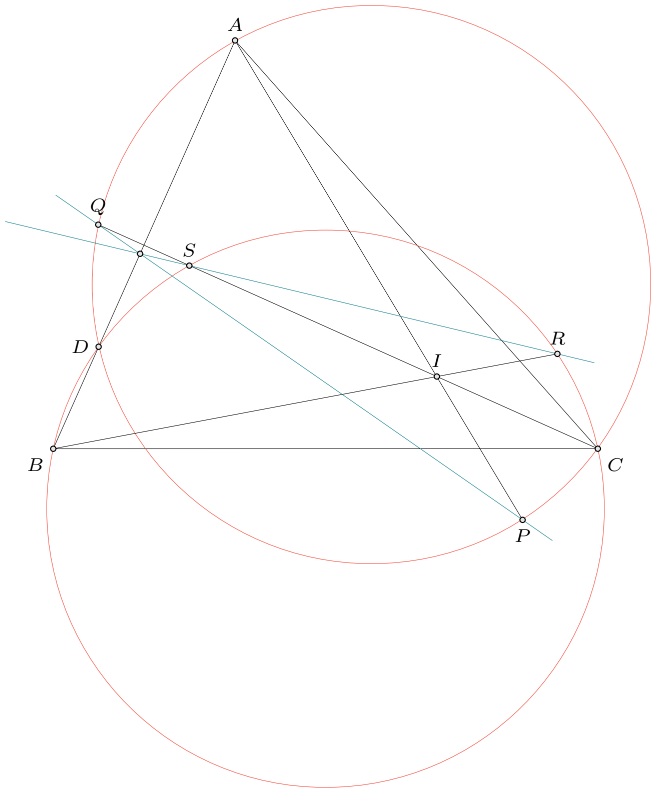
Ruszajmy zatem punktem I po dwusiecznej, którą oznaczmy jako l. Rozpatrzmy następujący ciąg map rzutowych

$$\begin{gathered} l \to \mathcal{C}_A \to \omega \to \mathcal{C}_Q, \\ I \mapsto AI \mapsto P \mapsto PQ, \end{gathered}$$

w którym punkt na prostej l rzutujemy przez punkt $A \in \omega$ na okrąg ω, a następnie kreślimy prostą od otrzymanego punktu do punktu $Q \in \omega$. Analogicznie znajdujemy mapę rzutową $l \ni I \mapsto RS \in \mathcal{C}_S$. Jeśli punkt $Q \in AB$, to $Q = A$ (niemożliwe) lub $Q = D$; w drugim przypadku mamy $S = D$ i teza jest oczywista. Załóżmy zatem, że $Q \notin AB$ i analogicznie $S \notin AB$. Niech punkt X będzie przecięciem prostej PQ z prostą AB, a Y przecięciem prostej RS z prostą AB. Wiemy, że mamy mapę $X \mapsto Y$; zatem aby pokazać, że ta mapa to identyczność, wystarczy rozważyć trzy przypadki.

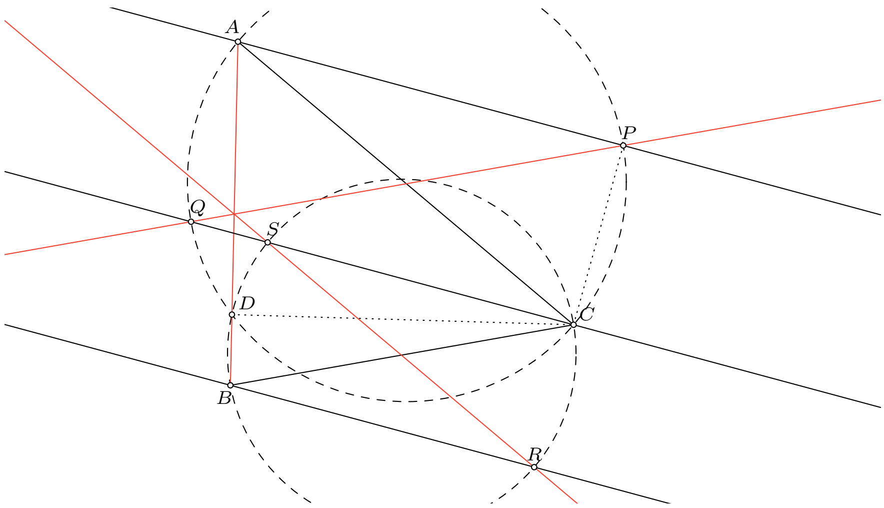
Przypadki $I = C$ oraz $I \in AB$ są trywialne. Jako trzeci przypadek obierzemy punkt I w nieskończoności. Wówczas P jest zdefiniowane jako punkt na okręgu ω taki, że prosta AP jest równoległa do prostej l. Analogicznie zdefiniowany jest punkt Q. Teza już nie jest tak trywialna; wykażemy ją ruszając punktem D.

Niech a będzie prostą przez wierzchołek A równoległą do prostej l; analogicznie b. Zauważmy, że $\sphericalangle PCD = 180° - \sphericalangle PAB$, co jest niezależnie od punktu D. Rozważmy następującą mapę rzutową z prostej AB na prostą a; obieramy punkt na AB, kreślimy z niego prostą do punktu C, obracamy ją w punkcie C o kąt $180° - \sphericalangle PAB$ i przecinamy z prostą a; jest to mapa $AB \ni D \mapsto P \in a$. Zauważmy, że $\sphericalangle APQ = \sphericalangle ACQ$, czyli nachylenie prostej PQ nie zależy od położenia punktu D – przechodzi zatem ona przez stały punkt w nieskończoności P_∞. Co więcej, mamy mapę rzutową $AB \ni D \mapsto PQ \in \mathcal{C}_{P_\infty}$. Analogicznie dla prostej RS, czyli istnieje mapa



rzutowa z prostej PQ na prostą RS. Niech punkt X będzie przecięciem prostej PQ z prostą AB, a punkt Y przecięciem prostej RS z prostą AB. Zauważmy, że $PQ \parallel BC$, czyli $P_\infty \in BC \Rightarrow P_\infty \notin AB$. Wobec tego istnieje mapa rzutowa z punktu X na prostą PQ, z prostej PQ na prostą RS oraz z prostej RS na punkt Y, czyli aby pokazać $X = Y$ wystarczy to zrobić w trzech przypadkach.

Oczywisty jest przypadek, gdy punkt D leży na prostej l. Rozpatrzmy teraz taki punkt D na prostej AB, że $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ACL$, gdzie L jest przecięciem prostych l i AB. Wtedy okrąg ω jest styczny do prostej a, a okrąg δ styczny do prostej l. Teza staje się trywialna, ponieważ $X = Y = A$. Trzeci przypadek wybieramy analogicznie do drugiego.



Zadanie 5.
Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg Ω o środku w punkcie O. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC, punkt P jest dowolnym punktem na prostej BC. Punkt S leży na okręgu Ω, przy czym $\sphericalangle ASP = 90°$. Prosta SH przecina okrąg opisany na trójkącie APS po raz drugi w punkcie X. Prosta OP przecina proste CA i AB odpowiednio w punktach Q i R. Odcinki QY i RZ są wysokościami w trójkącie AQR. Pokazać, że punkty X, Y, Z są współliniowe.

Rozwiązanie:
Zdefiniujmy punkt D jako przecięcie prostej AH z prostą BC. Wtedy punkty D, A, P, S leżą na jednym okręgu. Zdefiniujmy też punkt A' jako antypodę A na okręgu Ω – wówczas wierzchołki S, P, A' są współliniowe.

Niech punkty X' i H' będą odpowiednio drugimi przecięciami prostych SH i AH z okręgiem Ω. Skoro

$$HH' \cdot HA = HX' \cdot HS \quad \text{oraz} \quad HD \cdot HA = HX \cdot HS,$$

a $HD = HH'/2$, to $HX = HX'/2$. W takim razie po jednokładności w punkcie H o skali $1/2$ punkt X' przechodzi na punkt X, czyli punkt X leży na okręgu dziewięciu punktów trójkąta ABC – oznaczmy go jako δ.

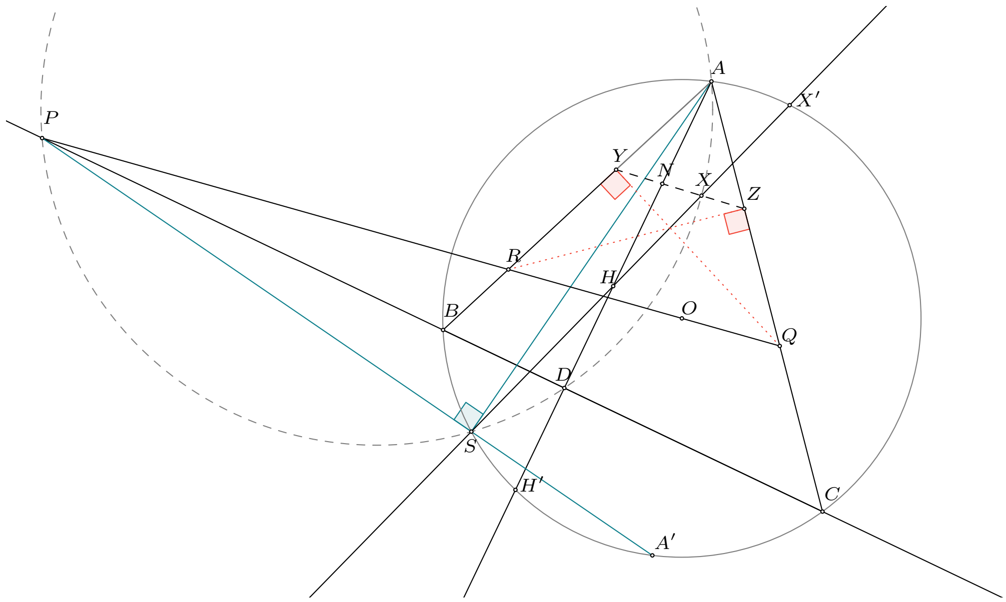
Rozważmy złożenie jednokładności w punkcie A o skali AY/AQ z odbiciem przez dwusieczną kąta BAC. W tym przekształceniu punkty Q i R przechodzą odpowiednio na punkty Y i Z, a punkty B i C odpowiednio na rzut punktu B na prostą AC oraz na rzut punktu C na prostą AB. Wobec tego prosta QR przechodzi na prostą YZ, a okrąg Ω na okrąg o średnicy AH; niech punkt N będzie obrazem punktu O w tym przekształceniu. Wtedy prosta YZ przechodzi przez punkt N. Ustalmy w miejscu trójkąt ABC i ruszajmy punktem P. Gdyby trójkąt ABC był prostokątny, to $S = H$ i sformułowanie „prosta SH" nie ma sensu; wobec tego $O \notin AC$, $O \notin AB$, $N \notin AB$, $N \notin AC$. Mamy następujący ciąg map rzutowych

$$\begin{aligned} BC \to \mathcal{C}_O \to AC \to AB \to \mathcal{C}_N, \\ P \mapsto OP \mapsto Q \mapsto Y \mapsto NY. \end{aligned}$$

Analogicznie mamy mapę rzutową $P \mapsto NX$. Widzimy też, że punkt N jest środkiem odcinka AH, czyli leży na okręgu δ. Wobec tego mamy również

$$\begin{aligned} BC \to \mathcal{C}_{A'} \to \Omega \to \Omega \to \delta \to \mathcal{C}_N, \\ P \mapsto PA' \mapsto S \mapsto X' \mapsto X \mapsto NX, \end{aligned}$$

gdzie przedostatnia mapa jest jednokładnością o skali $1/2$ w punkcie H, a ostatnią zawdzięczamy $N \in \delta$. Wystarczy teraz pokazać, że mapa rzutowa z prostej NX na prostą NY jest identycznością, czyli rozważyć trzy przypadki. Wtedy będziemy wiedzieć, że prosta NX jest tą samą prostą co NY, a analogicznie wykażemy, że pokrywa się z nimi prosta NZ. Jeśli $N = X$, to za prostą NX uznajemy styczną do okręgu δ. Obierzmy taki punkt P, że $X' = B$. Wtedy $HS \parallel A'C$, czyli czworokąt $BSCA'$ jest trapezem równoramiennym i punkt P leży na symetralnej odcinka $A'C$. Jest to prosta prostopadła do prostej $A'C$, czyli równoległa do prostej AC; przechodzi ona również przez punkt O, a zatem jest to prosta OP. W takim razie punkt Q w tym przypadku jest punktem w nieskończoności, podobnie punkt Y. Punkt X jest wtedy środkiem odcinka HB, czyli prosta NX jest równoległa do prostej AB, czyli przechodzi przez punkt Y. Przypadek dla $X' = C$ jest analogiczny. Jako trzeci przypadek wybieramy taki punkt P, żeby $X' = A'$ i tym samym $S = A$. Można zauważyć, że wtedy $Y = Z = A$, oraz punkt X leży na prostej AH, więc $NX = NY = AH$. Łatwo zweryfikować że wybrane przypadki są parami różne niezależnie od konfiguracji; to kończy dowód zadania.



Zadanie 6.
Dany jest trójkąt ABC, w którym punkty P i Q są sprzężone izogonalnie. Punkty D, E, F są przecięciami prostych AP, BP, CP odpowiednio z bokami BC, AC, AB. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech X będzie przecięciem prostej prostopadłej do prostej EF przez punkt A z prostą OD. Pokazać, że prosta QX jest prostopadła do prostej BC.

Rozwiązanie:

> Lemat 2
>
> Dany jest trójkąt ABC oraz stożkowa α przez A, B, C. Wówczas istnieje taka prosta nieprzechodząca przez punkty A, B, C, że każdy punkt na stożkowej α posiadający sprzężenie izogonalne ma swoje sprzężenie izogonalne na obranej prostej.

Dowód. Rozważmy dwa punkty na stożkowej α nieleżące na prostych AB, BC, CA, a konkretniej prostą tworzoną przez ich obrazy w sprzężeniu. Gdyby przechodziła ona przez na przykład punkt A, to na stożkowej α znajdowałyby się trzy punkty współliniowe (A oraz dwa wcześniej wybrane punkty); zatem nie przechodzi ona przez punkty A, B ani C. Ruszajmy teraz punktem po tej prostej; na mocy twierdzenia Steinera jego sprzężenie izogonalne w trójkącie ABC będzie ruszać się po stożkowej (prosto konstruujemy odpowiednie mapy rzutowe przez relacje kątowe). Ta stożkowa ma jednak pięć punktów wspólnych ze stożkową α, czyli jest to stożkowa α. Przejdźmy do dowodu tezy zadania. □

Jeżeli prosta EF jest równoległa do prostej BC, to punkt X nie istnieje (leży w nieskończoności). Dalej zakładamy, że prosta EF nie jest równoległa do prostej BC.
Niech punkt K będzie punktem w nieskończoności na prostej EF. Ustalmy trójkąt ABC oraz punkt K. Będziemy teraz ruszać prostą EF po pęku prostych przez punkt K. Mamy $K \notin AC$, więc mamy ciąg map rzutowych

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_K \to AC \to \mathcal{C}_B,\\ EF \mapsto E \mapsto BE.\end{gathered}$$

Analogicznie dla prostej CF. Prosta BC nie przechodzi na prostą BC w mapie $BE \mapsto CF$, gdyż prosta EF nie jest równoległa do prostej AB. Na mocy twierdzenia Steinera teraz punkt P rusza się po stożkowej. Stożkowa ta, którą nazwijmy α, przechodzi przez punkty B, C, oraz A, co wynika z przypadku, gdy $E = F = A$. Wtedy na mocy lematu punkt Q rusza się po pewnej prostej l. Co więcej, istnieje mapa rzutowa

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_B \to \mathcal{C}_B \to l,\\ BE \mapsto BQ \mapsto Q.\end{gathered}$$

Załóżmy, że $O \notin BC$. Wówczas, jeśli oznaczymy prostą przechodzącą przez punkt A prostopadłą do prostej EF jako k, to mamy ciąg map rzutowych

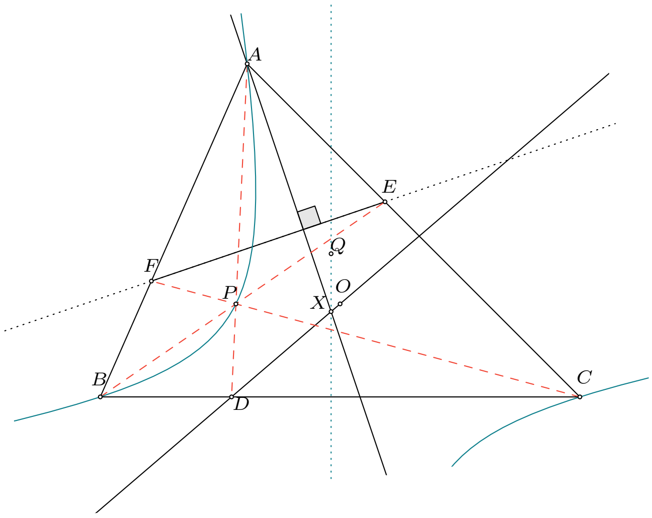
$$\begin{gathered}\mathcal{C}_K \to AB \to \mathcal{C}_C \to k \to \mathcal{C}_A \to BC \to \mathcal{C}_O \to k,\\ EF \mapsto F \mapsto CF \mapsto P \mapsto AP \mapsto D \mapsto OD \mapsto X.\end{gathered}$$

Rozważmy punkt w nieskończoności na prostej prostopadłej do BC, nazwijmy go Y. Chcemy pokazać współliniowość punktów X, Y, Q. Niech Q' jest przecięciem prostych XY oraz l; istnieje mapa rzutowa z punktu Q na punkt Q'. Aby pokazać, że jest ona identycznością, wystarczy rozważyć trzy przypadki.

Najpierw rozważmy $B = P$. Wtedy punkt Q leży na prostej AC i jest izogonalnie sprzężone z punktem E w kącie $\sphericalangle ABC$. W takim razie ruszajmy teraz E po prostej AC; łatwo zauważyć, że wtedy istnieje mapa rzutowa przerzucająca punkt E na prostą BE, potem na prostą BQ, następnie na punkt Q, ale też mapa rzutowa przerzucająca punkt E na prostą AX (prostopadłą do prostej BE przechodzącą przez punkt A) i dalej na punkt X (przecięcie prostej AX z prostą OB) oraz punkt Q'. Znowu wystarczą nam trzy przypadki do pokazania, gdy $Q = Q'$. Rozważmy $E = A$, wtedy punkt X staje się antypodą punktu B na okręgu opisanym na trójkącie ABC, a punkt Q staje się punktem C, więc teza zachodzi. Przypadek $E = C$, wtedy $Q = A$ i punkt X jest spodkiem wysokości z punktu A na prostą BC, teza jest trywialna. Jako ostatni przypadek obierzmy punkt E jako spodek wysokości z punktu B na prostą AC. Wówczas punkty B, O, Q są współliniowe oraz $Q = X$. Zatem rzeczywiście teza zachodzi zawsze, gdy $B = P$. Analogicznie dla $C = P$.

Jako trzeci przypadek rozważmy, gdy punkt E leży w nieskończoności. Wtedy punkt F też jest w nieskończoności. Natomiast punkt P jest taki, że czworokąt $ABPC$ jest równoległobokiem, a zatem punkt D jest środkiem odcinka BC. Prosta DO jest prostopadła do prostej BC, czyli chcemy pokazać współliniowość punktów D, O, Q. Prosta DO jest symetralną odcinka BC, czyli chcemy $BQ = QC$. Jest to prawda, ponieważ kąty $\sphericalangle CBQ$ oraz $\sphericalangle BCQ$ mają równe miary, gdyż kąty $\sphericalangle ABP$ oraz $\sphericalangle ACP$ mają równe miary. Zatem teza zachodzi też w tym przypadku. To kończy dowód.

Pozostał przypadek, gdy $O \in BC$. Wtedy punkt X jest stały. Chcemy wobec tego pokazać, że prosta l jest prostopadłą do prostej BC przechodzącą przez X, do czego wystarczą dwa przypadki. Analogicznie jak wcześniej dowodzimy tezę dla przypadków $B = P$ oraz $C = P$.



Zadanie 7.
Dany jest trójkąt ABC, w którym punkty P i Q są sprzężone izogonalnie. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego ω na tym trójkącie. Punkt H jest ortocentrum trójkąta QBC, natomiast punkt H' jest odbiciem punktu H przez prostą BC. Punkt D jest punktem na okręgu ω takim, że $AD \perp OP$. Punkt E jest drugim przecięciem prostej $H'D$ z okręgiem ω. Pokazać współliniowość punktów A, H, E.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli punkty O, P, A są współliniowe, to punkt Q leży na wysokości poprowadzonej z wierzchołka A w trójkącie ABC, a co za tym idzie leżą tam też punkty H, H'. Mamy też $D = E$, a zatem punkt E też leży na wysokości – teza zachodzi.

Jeśli punkty O, P, B są współliniowe, to punkt Q leży na wysokości poprowadzonej z punktu B, co oznacza, że punkt H leży na prostej AC. Zauważmy

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BCH',$$

czyli punkty D, C, H' są współliniowe. W takim razie $E = C$, przy czym jeśli $E = C$ to prosta EC jest styczną, więc teza zachodzi. Analogicznie radzimy sobie z przypadkiem współliniowości punktów O, P, C.

Oznaczmy jako Γ stożkową, która jest sprzężeniem izogonalnym prostej OP w trójkącie ABC (patrz: lemat na początku rozwiązania poprzedniego zadania, ale trzeba przeprowadzić dowód w drugą stronę).

Przywołajmy następujący Lemat.

Lemat 3

Dana jest krzywa stożkowa, której punkty w nieskończoności są prostopadłe, oraz trzy punkty na niej A, B, C. Wówczas ich ortocentrum również leży na tej stożkowej.

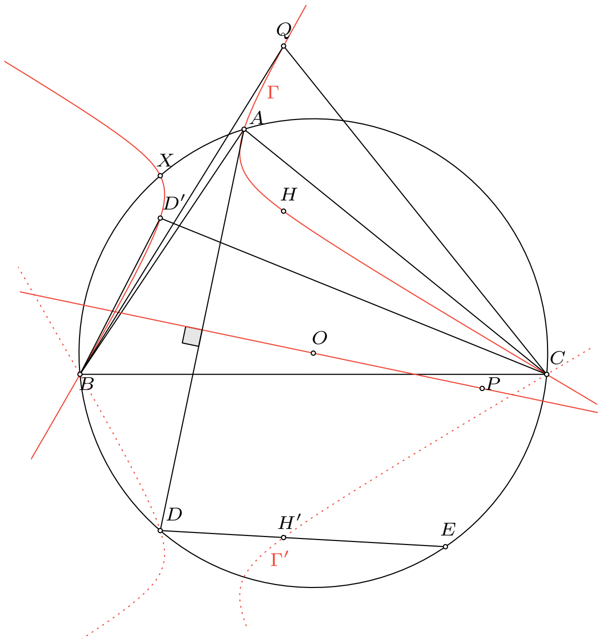
Lemat jest znanym faktem odnośnie hiperbol prostokątnych, który można wykazać na przykład używając inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a dla punktów A, B, C oraz ortocentrum (zakładamy, że teza lematu nie zachodzi, a wtedy punkty te są parami różne). Czytelnik zechce sprawdzić, że można go wykazać za pomocą metody Moving Points, lecz pominiemy to w tym rozwiązaniu.

Zauważmy, że jeśli punkt P leży na okręgu opisanym, to punkt Q jest punktem w nieskończoności. Dwa wybory takiego punktu P odpowiadają dwóm prostopadłym położeniom punktu Q na prostej w nieskończoności – wynika to z prostych przeliczeń kątowych. W takim razie stożkowa Γ jest hiperbolą prostokątną, a zatem leży na niej też punkt H. Mamy mapę rzutową z punktu Q na punkt H – ponowne rzutowanie na stożkową Γ przez punkt w nieskończoności prostopadły do prostej BC. Niech stożkowa Γ' będzie odbiciem stożkowej Γ przez prostą BC. Wówczas punkt H' rusza się po stożkowej Γ'. Chcielibyśmy narysować prostą DH', lecz by to zrobić musimy wiedzieć, że $D \in \Gamma'$ lub alternatywnie $D' \in \Gamma$, gdzie punkt D' jest odbiciem punktu D przez prostą BC. Niech punkt X to ortocentrum trójkąta BCD' – skoro punkt D leży na okręgu opisanym, to punkt X również, ponieważ $\sphericalangle BXC + \sphericalangle BDC = 180°$. Gdyby punkt X leżał na stożkowej Γ, to punkt D' jako ortocentrum BCX również; ale X leży na stożkowej Γ, gdyż jest sprzężeniem punktu w nieskończoności na prostej OP (elementarne przeliczenie kątowe). Wobec tego $D \in \Gamma'$ i mamy mapę rzutową przerzucającą punkt P na prostą DH; punkt D

leży na okręgu opisanym, więc mamy też mapę rzutową na punkt E i dalej na prostą AE. Mamy $A \in \Gamma$, więc mamy też mapę rzutową na prostą AH. Teraz wystarczy pokazać, że mapa z prostej AE na prostą AH jest identycznością.

Istnieje taki punkt P, że $H = B$. Wtedy $H' = B$ i $E = B$. Druga równość może wydawać się nieoczywista w absolutnie denerwującym przypadku $D = B$, ale wtedy – bez wdawania się w szczegóły – stożkowa Γ' jest styczna w punkcie B do okręgu opisanego, a prosta DH' to styczna do stożkowej Γ'); teza jest oczywista. Podobnie w przypadku $H = C$. To samo jednak też się dzieje w przypadku $H = X$.

Skończyliśmy dowód zadania, gdy punkty B, C, X są parami różne. Jednak tak nie musi być, gdy trójkąt ABC jest prostokątny! Na pocieszenie dla tego Czytelnika, którego podobnie jak mnie zalewa krew na sam widok kolejnego „głupiego” przypadku, powiem, że – z własnego doświadczenia – większość rozwiązań syntetycznych te niuanse po prostu ignoruje, a ma ich równie wiele. Przecież nikt przed napisaniem kąta nie sprawdza, czy prosta od której go mierzy istnieje! Nasza metoda po prostu uwidacznia te problemy. W każdym razie przypadek trójkąta prostokątnego można rozwiązać, rozważając $H = A$ – teza nie trywializuje się, ale można jej dowieść, ruszając prostą OP, co już sobie odpuszczę.



Inwolucje

Antoni Łuczak

Teoria

Definicja (Inwolucja)

Inwolucją nazywamy przekształcenie rzutowe, którego złożenie z samym sobą jest identycznością. W tym kontekście nie uznajemy identyczności za inwolucję.

Lemat 1

Inwolucja ma co najwyżej dwa punkty stałe.

Lemat 2 (Inwolucja na prostej)

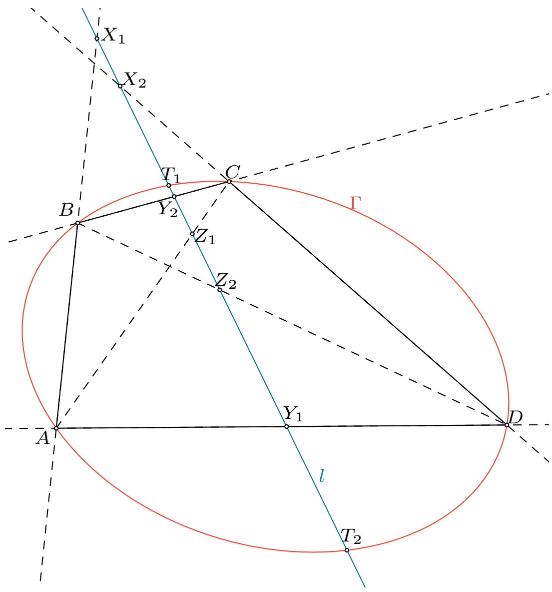
Każda inwolucja na prostej jest sprzężeniem harmonicznym względem pewnej ustalonej pary punktów. W szczególności jest to inwersja albo symetria względem pewnego punktu tej prostej.

Lemat 3 (Inwolucja na stożkowej)

Każda inwolucja na stożkowej jest rzutowaniem z pewnego punktu leżącego poza tą stożkową.

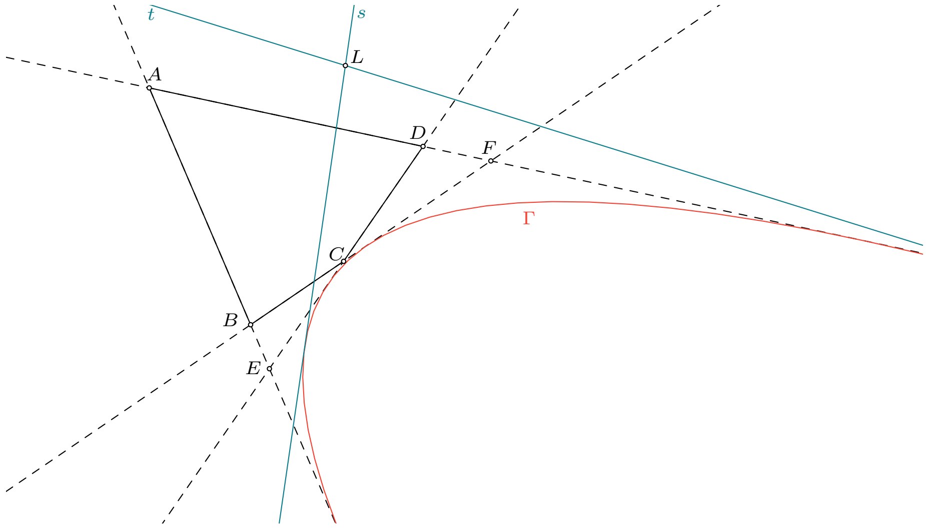
Twierdzenie (DIT - inwolucyjne twierdzenie Desargues'a)

Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w stożkową Γ oraz prosta l, która nie przechodzi przez żadne dwa wierzchołki tego czworokąta. Niech l przecina proste AB, CD, AD, BC, AC, BD oraz stożkową Γ odpowiednio w punktach X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, T_1, T_2. Wtedy pary (X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2), (T_1, T_2) są parami punktów odpowiadających sobie w pewnej inwolucji na prostej l.



Twierdzenie (DDIT – dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a)

Dany jest czworokąt $ABCD$ opisany na stożkowej Γ. Proste AB oraz CD przecinają się w punkcie E, natomiast proste AD oraz BC przecinają się w punkcie F. Niech L będzie dowolnym punktem różnym od A, B, C, D, E, F. Niech s, t będą stycznymi do stożkowej Γ przechodzącymi przez punkt L. Wtedy pary (LA, LC), (LB, LD), (LE, LF), (s, t) tworzą pary prostych odpowiadających sobie w pewnej inwolucji na pęku prostych o środku L.



Zadania

Zadanie 1. (Lemat izogonalny)
Dane są parami różne punkty A, B, C, D, O, przy czym proste OC i OD są izogonalne w kącie AOB. Udowodnić, że proste łączące punkt O z punktami przecięcia prostych AC i BD oraz AD i BC również są izogonalne w tym kącie.

Zadanie 2.
Udowodnić, że punkty styczności okręgu wpisanego oraz okręgu A-dopisanego z bokiem BC są symetryczne względem środka odcinka BC.

Zadanie 3.
Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B oraz C przecinają się w punkcie X. Udowodnić, że prosta AX jest symedianą.

Zadanie 4.
Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. W trójkącie ABC niech I oraz J oznaczają odpowiednio środki okręgu wpisanego i A-dopisanego. W trójkącie ACD niech K oraz L oznaczają odpowiednio środki okręgu wpisanego i A-dopisanego. Udowodnić, że proste IL, JK oraz dwusieczna kąta BCD są współpękowe.

Zadanie 5. (Serbia MO 2017)
Niech k oznacza okrąg opisany na trójkącie ABC, a k_a okrąg A-dopisany do trójkąta ABC. Niech wspólne styczne zewnętrzne okręgów k i k_a przecinają prostą BC w punktach P oraz Q. Udowodnić, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$.

Zadanie 6.
Niech ABC będzie trójkątem, a M środkiem boku BC. Niech γ będzie okręgiem wpisanym w ten trójkąt. Środkowa AM przecina okrąg γ w punktach X oraz Y. Niech proste przechodzące przez punkty X i Y, równoległe do prostej BC, przecinają okrąg γ po raz drugi odpowiednio w punktach X_1 oraz Y_1. Proste AX_1 oraz AY_1 przecinają prostą BC odpowiednio w punktach P oraz Q. Udowodnić, że $BP = CQ$.

Zadanie 7.
Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC, w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD oraz AC w punktach K oraz L. Proste styczne do okręgu ω przechodzące przez punkt M przecinają prostą KL w punktach X oraz Y, przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL. Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

Zadanie 8. (Taiwan TST3 2014)
Niech M będzie dowolnym punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Załóżmy, że styczne poprowadzone z punktu M do okręgu wpisanego w trójkąt ABC przecinają prostą BC w punktach X_1 oraz X_2. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie MX_1X_2 przecina okrąg opisany na trójkącie ABC po raz drugi w punkcie styczności okręgu A-dowpisanego z tym okręgiem.

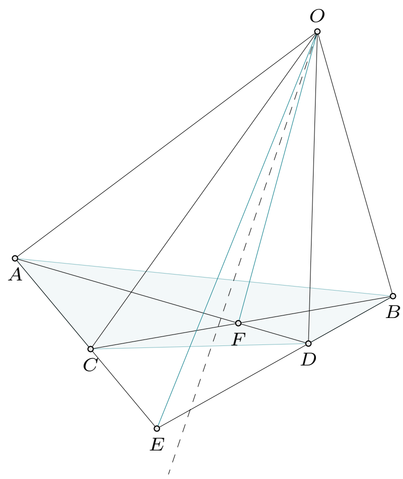
Rozwiązania

Autor rozwiązań: Antoni Łuczak.

Zadanie 1. (Lemat izogonalny)
Dane są parami różne punkty A, B, C, D, O, przy czym proste OC i OD są izogonalne w kącie AOB. Udowodnić, że proste łączące punkt O z punktami przecięcia prostych AC i BD oraz AD i BC również są izogonalne w tym kącie.

Rozwiązanie:
Niech E oraz F będą punktami przecięcia prostej AC z prostą BD oraz prostej AC z prostą BD. Na mocy dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a istnieje inwolucja na pęku prostych o środku O, która zamienia proste OA z OB, OC z OD oraz OE z OF.

Złóżmy tę inwolucję z symetrią względem dwusiecznej kąta AOB. Otrzymujemy inwolucję ustalającą proste OA, OB, OC, OD. Taka inwolucja jest identycznością, gdyż inwolucja ma co najwyżej dwa punkty stałe. Zatem wyjściowa inwolucja jest właśnie tą symetrią, a więc proste OE i OF są izogonalne w kącie AOB.

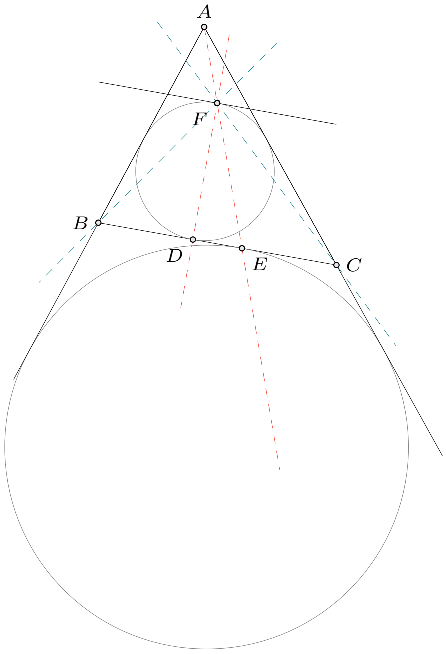


Zadanie 2.
Udowodnić, że punkty styczności okręgu wpisanego oraz okręgu A-dopisanego z bokiem BC są symetryczne względem środka odcinka BC.

Rozwiązanie:
Niech D oznacza punkt styczności okręgu wpisanego z bokiem BC, a E punkt styczności okręgu A-dopisanego z prostą BC. Niech dodatkowo F oznacza odbicie punktu D względem środka okręgu wpisanego. Znanym faktem jest, że punkty A, E, F leżą na jednej prostej.

Zastosujmy dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a do zdegenerowanego czworokąta $ABDC$, punktu F oraz stożkowej będącej okręgiem wpisanym. Otrzymujemy inwolucję zamieniającą proste FB z FC, FA z FD oraz ustalającą prostą przechodzącą przez punkt F, równoległą do prostej BC. Rzutujemy tę inwolucję z punktu F na prostą BC i otrzymujemy inwolucję zamieniającą punkty B z C, D z E oraz ustalającą punkt w nieskończoności prostej BC.

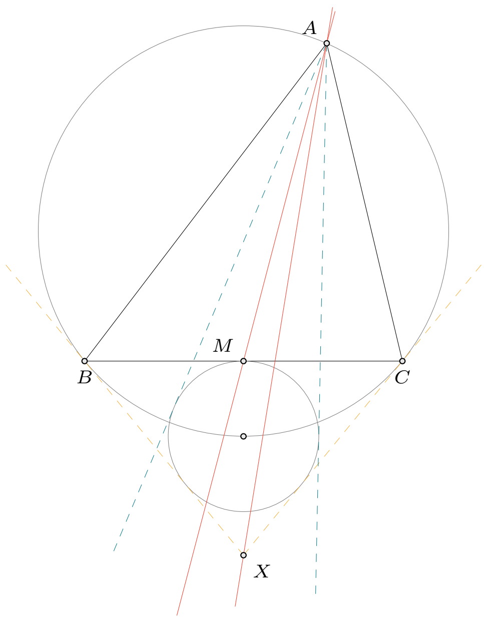
Jeżeli złożymy tę inwolucję z symetrią względem środka odcinka BC, to otrzymamy inwolucję ustalającą punkty B, C oraz punkt w nieskończoności prostej BC. Zatem nasza inwolucja jest właśnie tą symetrią, skąd wynika teza.



Zadanie 3.
Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B oraz C przecinają się w punkcie X. Udowodnić, że prosta AX jest symedianą.

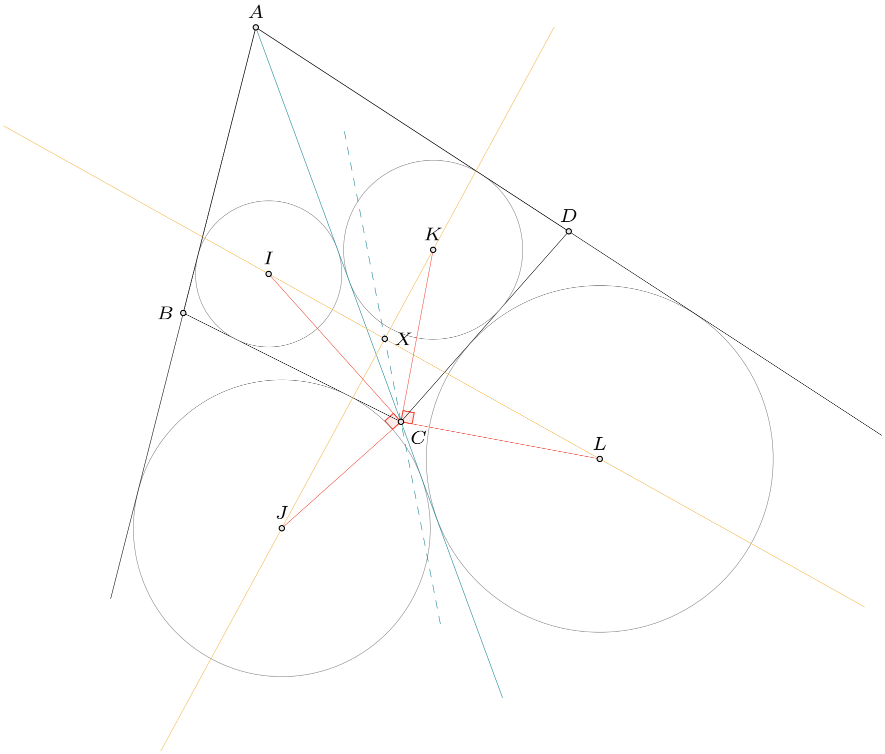
Rozwiązanie:
Niech ω oznacza okrąg wpisany w trójkąt BCX. Łatwo sprawdzić na kątach, że środek tego okręgu jest środkiem łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który nie zawiera punktu A. Niech M oznacza środek boku BC.

Zastosujmy dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a do zdegenerowanego czworokąta $BMCX$, punktu A oraz stożkowej ω. Otrzymujemy inwolucję zamieniającą proste AB z AC, AM z AX oraz styczne z punktu A do okręgu ω. Skoro środek okręgu ω leży na dwusiecznej kąta BAC, to styczne z punktu A do okręgu ω są symetryczne względem tej dwusiecznej. Postępujemy analogicznie jak w rozwiązaniu pierwszego zadania i otrzymujemy, że nasza inwolucja jest symetrią względem dwusiecznej kąta BAC. Stąd wynika, że prosta AX jest symedianą.



Zadanie 4.
Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. W trójkącie ABC niech I oraz J oznaczają odpowiednio środki okręgu wpisanego i A-dopisanego. W trójkącie ACD niech K oraz L oznaczają odpowiednio środki okręgu wpisanego i A-dopisanego. Udowodnić, że proste IL, JK oraz dwusieczna kąta BCD są współpękowe.

Rozwiązanie:
Mamy $\sphericalangle ICJ = \sphericalangle LCK = 90°$, więc proste CJ i CL są izogonalne w kącie ICK. Na mocy dualnego inwolucyjne twierdzenie Desargues'a dostajemy, że proste CA oraz CX również są izogonalne w tym kącie, gdzie X jest punktem przecięcia prostych IL oraz JK. Wystarczy teraz sprawdzić na kątach, że prosta CA oraz dwusieczna kąta BCD są symetryczne względem dwusiecznej kąta ICK.

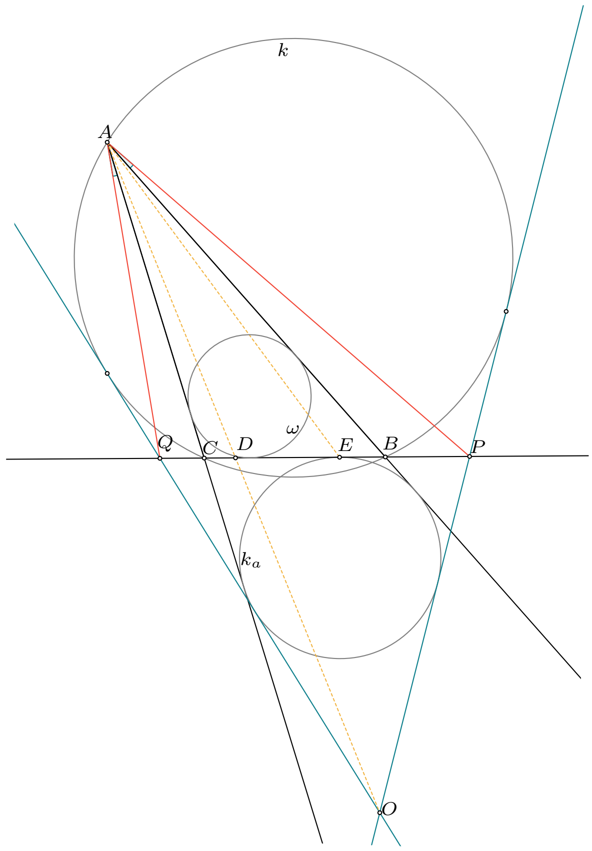


Zadanie 5. (Serbia MO 2017)
Niech k oznacza okrąg opisany na trójkącie ABC, a k_a okrąg A-dopisany do trójkąta ABC. Niech wspólne styczne zewnętrzne okręgów k i k_a przecinają prostą BC w punktach P oraz Q. Udowodnić, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAQ$.

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez O punkt przecięcia tych stycznych, a przez E punkt styczności okręgu k_a z prostą BC. Stosujemy dualne inwolucyjne twierdzenie Desargues'a do czworokąta $ABEC$, punktu O oraz stożkowej k_a i otrzymujemy inwolucję zamieniającą proste OB z OC, OA z OE oraz OP z OQ.

Niech D oznacza punkt przecięcia prostych OA i BC. Rzutując tę inwolucję na prostą BC, otrzymujemy inwolucję zamieniającą punkty B z C, D z E oraz P z Q. Wystarczy zatem wykazać, że proste AD oraz AE są izogonalne w kącie BAC.

Niech ω oznacza okrąg wpisany w trójkąt ABC. Zauważmy, że O jest środkiem dodatniej jednokładności przeprowadzającej okrąg k na okrąg k_a, a punkt A jest środkiem dodatniej jednokładności przeprowadzającej okrąg k_a na okrąg ω. Wobec tego środek dodatniej jednokładności przeprowadzającej okrąg ω na okrąg k, czyli sprzężenie izogonalne punktu Nagela, leży na prostej AO. Stąd prosta AO jest sprzężona izogonalnie z prostą AE, co kończy dowód.



Zadanie 6.
Niech ABC będzie trójkątem, a M środkiem boku BC. Niech γ będzie okręgiem wpisanym w ten trójkąt. Środkowa AM przecina okrąg γ w punktach X oraz Y. Niech proste przechodzące przez punkty X i Y, równoległe do prostej BC, przecinają okrąg γ po raz drugi odpowiednio w punktach X_1 oraz Y_1. Proste AX_1 oraz AY_1 przecinają prostą BC odpowiednio w punktach P oraz Q. Udowodnić, że $BP = CQ$.

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez R punkt przecięcia prostych XY_1 oraz YX_1. Z dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a otrzymujemy inwolucję ustalającą prostą AM oraz zamieniającą proste AX_1 z AY_1, $A\infty_{BC}$ z AR.

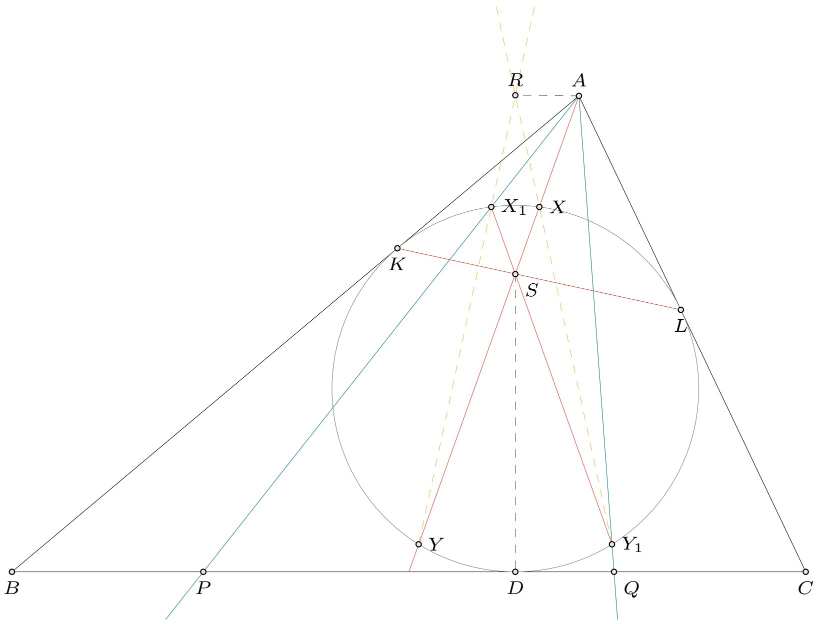
Pokażemy teraz, że $AR \parallel BC$. Niech K, L, D oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego odpowiednio z prostymi AB, AC, BC. Niech dodatkowo S oznacza punkt przecięcia prostych AM i KL. Wtedy $SD \perp BC$, co można wykazać, obliczając stosunek KS/SL za pomocą twierdzenia sinusów w trójkątach AKS, ALS, DKS, DLS. W takim razie prosta X_1Y_1 również przechodzi przez punkt S, a prosta RS jest dwusieczną kąta XRX_1.

Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{RX}{RY} = \frac{XS}{SY} = \frac{XA}{AY},$$

gdyż $(A, X; S, Y) = -1$, ponieważ prosta KL to biegunowa punktu A. Z drugiej strony mamy $RX/RY = RX/RX_1$, zatem na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy $AR \parallel BC$.

Teraz nasza inwolucja ustala kierunek AM, kierunek BC oraz zamienia punkt P z punktem Q. Rzutując ją na prostą BC, otrzymujemy przekształcenie ustalające punkt M oraz punkt w nieskończoności prostej BC, a więc symetrię względem punktu M. Stąd $BP = CQ$.

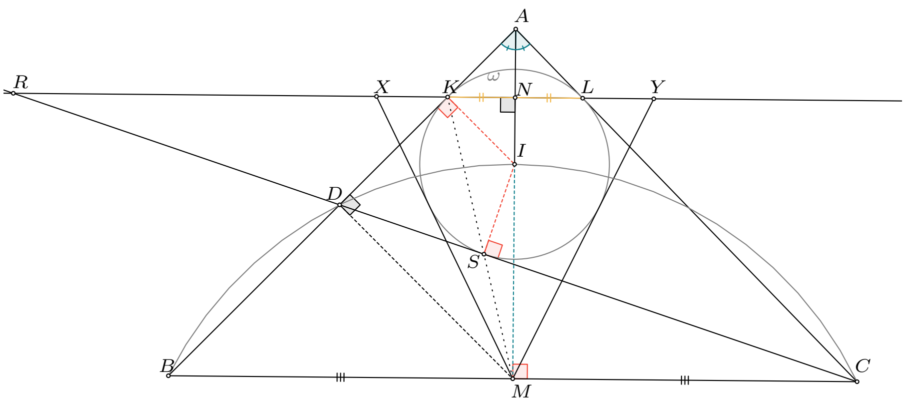


Zadanie 7.
Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC, w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB. Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD oraz AC w punktach K oraz L. Proste styczne do okręgu ω przechodzące przez punkt M przecinają prostą KL w punktach X oraz Y, przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL. Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez S punkt styczności okręgu ω z prostą CD, przez N środek odcinka KL oraz przez R punkt przecięcia prostych CD i KL. Teza jest równoważna równości $RX \cdot RY = RD \cdot RS$, lecz prawa strona jest równa $RK \cdot RN$, gdyż $\sphericalangle MDK = \sphericalangle KNM = 90°$.

W takim razie teza jest równoważna istnieniu inwolucji na prostej KL, która zamienia punkty R z punktem w nieskończoności, K z N oraz X z Y. Na mocy dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a otrzymujemy inwolucję zamieniającą proste MX z MY, MA z MS oraz MR z MC. Rzutując ją z punktu M na prostą KL, otrzymujemy prawie szukaną inwolucję.

Aby dokończyć rozwiązanie, wystarczy wykazać, że punkty M, S, K są współliniowe. Zauważmy jednak, że są to rzuty środka okręgu wpisanego na boki trójkąta BCD. Skoro punkt B jest odbiciem punktu C względem dwusiecznej kąta DAC, środek tego okręgu leży na okręgu opisanym na trójkącie BCD, a szukana współliniowość wynika z twierdzenia o prostej Simsona.

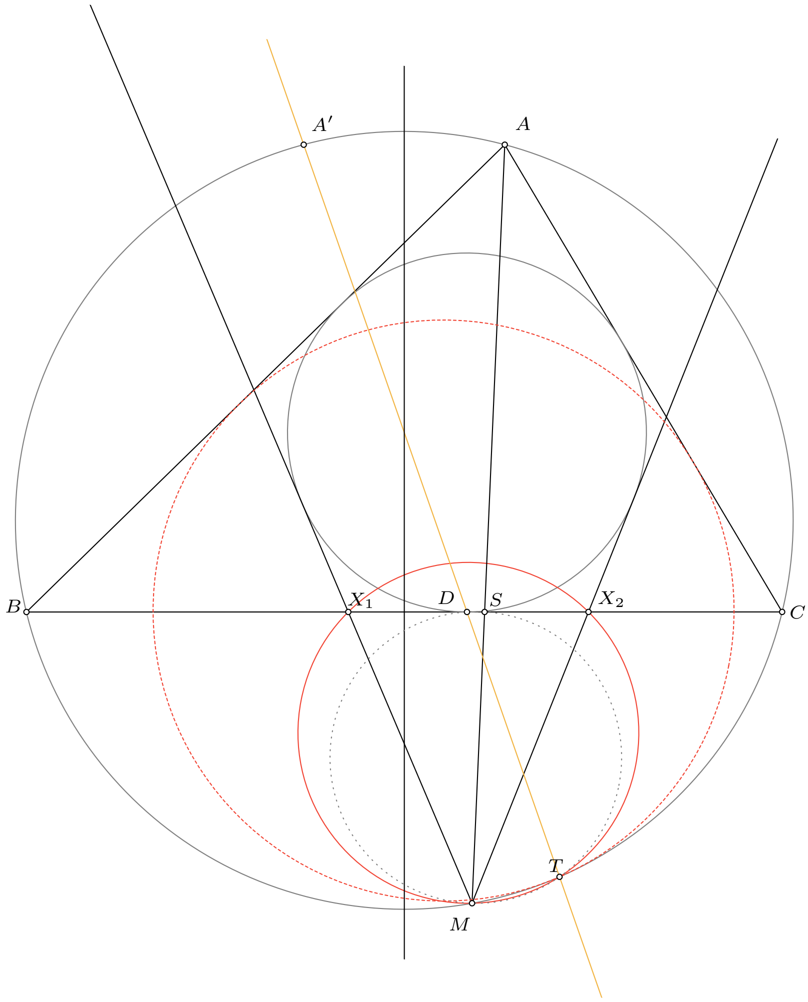


Zadanie 8. (Taiwan TST3 2014)
Niech M będzie dowolnym punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Załóżmy, że styczne poprowadzone z punktu M do okręgu wpisanego w trójkąt ABC przecinają prostą BC w punktach X_1 oraz X_2. Udowodnić,

że okrąg opisany na trójkącie MX_1X_2 przecina okrąg opisany na trójkącie ABC po raz drugi w punkcie styczności okręgu A-dowpisanego z tym okręgiem.

Rozwiązanie:
Niech D oznacza punkt styczności okręgu wpisanego z prostą BC, a T punkt styczności okręgu A-dowpisanego z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech ponadto S oznacza punkt przecięcia prostych AM i BC.

Z dualnego inwolucyjnego twierdzenia Desargues'a otrzymujemy inwolucję, która po zrzutowaniu na prostą BC zamienia punkty B z C, D z S oraz X_1 z X_2. Korzystając z faktu, że prosta TD przechodzi przez odbicie punktu A względem symetralnej odcinka BC, łatwo sprawdzić na kątach, że punkty M, T, S, D leżą na jednym okręgu. W takim razie otrzymana inwolucja jest inwersją o środku w punkcie przecięcia prostych MT i BC. Zatem również punkty M, T, X_1, X_2 leżą na jednym okręgu.



Skoki Viete'a

Filip Manijak

Teoria

Celem zajęć jest praktyczne poznanie metody skoków Viete'a (ang. *Vieta jumping*).

Na czym polega ta technika?

Jeśli mamy dane równanie diofantyczne $a^2+b^2=kab+k$, to załóżmy że $a \geqslant b$. Wtedy możemy rozpatrywać to równanie jako równanie kwadratowe zmiennej a. Zamieńmy a na zmienną x:

$$x^2-kbx+b^2-k=0.$$

Oznaczmy drugi pierwiastek tego równania przez c. Z wzorów Viete'a wiemy, że $a+c=kb$, czyli $c=kb-a$ oraz $c=\frac{b^2-k}{a}$. Następnie możemy udowodnić, że:

(1) c to liczba całkowita,

(2) $c<b$, więc w szczególności c i a są różne,

(3) $c \geqslant 0$.

Kiedy używać?

- W zadaniach na poziomie olimpiad międzynarodowych (na finale OM jeszcze nie znalazło się takie zadanie, ale też nie jest to wykluczone).
- Gdy rozwiązania mają rekurencyjną strukturę – jeśli (a,b) jest rozwiązaniem, to pewna para (b,c) też.
- Kiedy dane jest równanie stopnia 2, szczególnie zapisane w formie ładnego ułamka.

Zadania

Zadanie 1. (IMO 1988 P6)
Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $ab+1$ dzieli a^2+b^2. Pokazać, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2. (Putnam 1978 B4)
Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej N równanie

$$a^2+b^2+c^2+d^2=abc+bcd+cda+dab$$

ma rozwiązanie, w którym najmniejsza z liczb a, b, c, d jest większa niż N.

Zadanie 3.
Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że ab dzieli a^2+b^2+1. Pokazać, że

$$a^2+b^2+1=3ab.$$

Zadanie 4.
Niech $a,b,c \in \mathbb{Z}_+$ oraz $0<a^2+b^2-abc<c$. Udowodnić, że a^2+b^2-abc jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5. (IMO 2007 P5)
Liczby $a,b \in \mathbb{Z}^+$ spełniają podzielność $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$. Udowodnić, że $a=b$.

Zadanie 6.
Znaleźć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite m i n, że wyrażenie $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 7.
Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają podzielność $abc+1 \mid a^2+b^2+c^2$. Udowodnić, że $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc+1}$ jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Zadanie 8.
Dodatnie liczby całkowite a, b, c, m spełniają równanie $m \cdot abc = 1 + a^2 + b^2 + c^2$. Udowodnić, że $m = 4$.

Zadanie 9. (Vietnam MO 2002)
Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o tej własności, że równanie

$$a + b + c + d = n\sqrt{abcd}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Karol Musieliński, Michał Oprocha.

Zadanie 1. (IMO 1988 P6)
Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $ab+1$ dzieli a^2+b^2. Pokazać, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Weźmy całkowite k, dla którego istnieją takie całkowite $a, b > 0$, że

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k.$$

oraz załóżmy, że k nie jest kwadratem liczby całkowitej. Dodatkowo weźmy taką parę (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że suma $a+b$ jest minimalna. Bez straty ogólności $a \geqslant b$ (równanie jest symetryczne). Zamieńmy a na zmienną x. Z wyjściowego równania po równoważnych przekształceniach otrzymujemy

$$x^2 - (kb)x + (b^2 - k) = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe zmiennej x. Niech x_1, x_2 będą rozwiązaniami tego równania. Wiemy, że jednym pierwiastkiem jest $x_1 = a$. Ze wzorów Viete'a mamy

$$x_2 = kb - x_1 \qquad \text{oraz} \qquad x_2 = \frac{b^2-k}{x_1}.$$

Pierwsze równanie pokazuje, że x_2 jest całkowite, a drugie równanie, że $x_2 \neq 0$, jeśli k nie jest kwadratem liczby całkowitej. Skoro $a, b > 0$, to

$$\frac{x_2^2+b^2}{x_2b+1} = k = \frac{a^2+b^2}{ab+1} > 0,$$

więc $x_2b + 1 > 0$. Oznacza to w szczególności, że $x_2 > 0$. Wobec tego otrzymujemy

$$x_2 = \frac{b^2-k}{a} < \frac{b^2}{a} \leqslant a,$$

czyli $x_2 < a$. Stąd $x_2 + b < a + b$, co jest sprzeczne z minimalnością $a + b$. Oznacza to, że początkowe założenie, że k jest nie jest kwadratem liczby całkowitej nie może być spełnione.

Zadanie 2. (Putnam 1978 B4)
Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej N równanie

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab$$

ma rozwiązanie, w którym najmniejsza z liczb a, b, c, d jest większa niż N.

Rozwiązanie:
Weźmy dowolną czwórkę (a, b, c, d) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają wyjściowe równanie. Bez straty ogólności $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ (równanie jest symetryczne). Zamieńmy a na zmienną x. Wówczas

$$x^2 - (bc + cd + db)x + b^2 + c^2 + d^2 - bcd = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe zmiennej x. Niech x_1, x_2 będą rozwiązaniami tego równania. Wiemy, że jednym pierwiastkiem jest $x_1 = a$. Ze wzorów Viete'a mamy

$$x_2 = bc + cd + db - x_1 > d + d - x_1 \geqslant d.$$

Daje to, że rozwiązanie x_2 jest również całkowite oraz $x_2 > d$. W taki sposób otrzymujemy rozwiązanie (b, c, d, a'). W takim razie, postępując analogicznie kolejno dla zmiennych a, b, c, d, otrzymujemy

$$(a, b, c, d) \to (b, c, d, a') \to (c, d, a', b') \to (d, a', b', c') \to (a', b', c', d').$$

W taki sposób $a', b', c', d' > d$, czyli najmniejsza z liczb z otrzymanej czwórki zwiększyła się co najmniej o 1 w porównaniu do początkowej czwórki. Jeśli $N \leqslant 0$, to oczywiście początkowa czwórka spełniała postulowaną własność. Na mocy powyższej operacji dla $N > 0$ powtarzając ten proces maksymalnie $\lfloor N \rfloor$ razy otrzymujemy czwórkę liczb, która spełnia postulowaną własność.

Pozostaje zauważyć, że czwórka $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ spełnia warunki zadania. Z tej czwórki w opisany powyżej sposób jesteśmy w stanie wygenerować czwórkę spełniającą warunki zadania.

Zadanie 3.
Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że ab dzieli $a^2 + b^2 + 1$. Pokazać, że

$$a^2 + b^2 + 1 = 3ab.$$

Rozwiązanie:
Weźmy dodatnią liczbę całkowitą $k \neq 3$ oraz załóżmy, że istnieją takie całkowite $a, b > 0$, że

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k.$$

Dodatkowo weźmy taką parę (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że suma $a+b$ jest minimalna. Załóżmy również, że $ab > 1$. Bez straty ogólności $a > b$ (gdy $a = b$, to równanie spełnia tylko para liczb $(a, b) = (1, 1)$), na mocy tych założeń $a > 1$. Zamieńmy a na zmienną x. Z wyjściowego równania po równoważnych przekształceniach otrzymujemy

$$x^2 - (kb)x + (b^2 + 1) = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe zmiennej x. Niech x_1, x_2 będą rozwiązaniami tego równania. Wiemy, że jednym pierwiastkiem jest $x_1 = a$. Ze wzorów Viete'a mamy

$$x_2 = kb - x_1 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{b^2 + 1}{x_1}.$$

Pierwsze równanie pokazuje, że x_2 jest całkowite, a drugie równanie, że $x_2 > 0$, ponieważ $a, b > 0$. Łącząc drugie równanie z założeniem, że $a > b$ (co w szczególności daje nam, że $a \geqslant b + 1$), otrzymujemy

$$x_2 = \frac{b^2 + 1}{x_1} = \frac{b^2 + 1}{a} \leqslant \frac{b^2 + 1}{b + 1} < a,$$

Zatem para liczb (x_2, b) także spełnia to równanie oraz z uwagi na to, że $x_2 < a$, również $x_2 + b < a + b$, co jest sprzeczne z założeniem o minimalności sumy $a + b$. W związku z tym, jeśli dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a, b, k zachodzi równość

$$k = \frac{a^2 + b^2 + 1}{ab},$$

to $k = 3$, co należało udowodnić.

Zadanie 4.
Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ oraz $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 - abc$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Weźmy dodatnie liczby całkowite $0 < d < c$, dla których istnieją takie całkowite $a, b > 0$, że

$$a^2 + b^2 - abc = d$$

oraz d nie jest kwadratem liczby całkowitej. Dodatkowo weźmy taką parę (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że suma $a + b$ jest minimalna. Bez straty ogólności $a \geqslant b$ (równanie jest symetryczne). Zamieńmy a na zmienną x. Z wyjściowego równania po równoważnych przekształceniach otrzymujemy

$$x^2 - (bc)x + b^2 - d = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe zmiennej x. Drugim rozwiązaniem tego równania jest liczba e, dla której ze wzorów Viete'a mamy

$$e = bc - a \qquad \text{oraz} \qquad e = \frac{b^2 - d}{a}.$$

Pierwsze równanie pokazuje, że e jest całkowite. Gdyby $e < 0$, to podstawiając do wyjściowego równania mamy

$$0 = e^2 - (bc)e + b^2 - d > e^2 - (bc)e + b^2 - c = e^2 + b^2 + c(-be - 1) \geqslant e^2 + b^2 > 0,$$

sprzeczność. Dodatkowo $e \neq 0$, ponieważ d nie jest kwadratem liczby całkowitej. Stąd $e > 0$. Z drugiego wzoru Viete'a mamy

$$e = \frac{b^2 - d}{a} < \frac{b^2}{a} \leqslant a.$$

Jest to jednak sprzeczne z minimalnością pary (a, b), ponieważ $a + b > e + b$. Stąd początkowe założenie, że d nie jest kwadratem liczby całkowitej było błędne.

Zadanie 5. (IMO 2007 P5)
Liczby $a, b \in \mathbb{Z}^+$ spełniają podzielność $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$. Udowodnić, że $a = b$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że spełniona jest następująca tożsamość

$$b^2(4a^2 - 1)^2 - (4ab - 1)\,(4a^3b - 2ab + a^2) = (a - b)^2.$$

z założenia $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$, więc $4ab - 1$ dzieli lewą stronę powyższej tożsamości, a zatem

$$4ab - 1 \;\Big|\; (a - b)^2.$$

Weźmy całkowite k, dla którego istnieją takie całkowite $a, b > 0$, że

$$k = \frac{(a - b)^2}{4ab - 1}.$$

Dodatkowo weźmy taką parę (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla której suma $a + b$ jest najmniejsza. Załóżmy również, że $a \neq b$. Stąd $k > 0$. Bez straty ogólności $a > b$ (równanie jest symetryczne). Zamieńmy a na zmienną x. Z wyjściowego równania po równoważnych przekształceniach otrzymujemy

$$x^2 - (4bk + 2b)x + b^2 + k = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe zmiennej x. Drugim rozwiązaniem tego równania jest liczba c, dla której ze wzorów Viete'a mamy

$$c = 4bk + 2b - a \quad \text{oraz} \quad c = \frac{b^2 + k}{a}.$$

Pierwsze równanie pokazuje, że c jest całkowite. Z warunku minimalności pary (a, b) mamy, że $c \geqslant a$. Z drugiego równania otrzymujemy

$$\frac{b^2 + k}{a} \geqslant a, \quad \text{więc} \quad k \geqslant a^2 - b^2.$$

z drugiej strony z definicji liczby k dostajemy

$$\frac{(a - b)^2}{4ab - 1} \geqslant a^2 - b^2, \quad \text{więc} \quad a - b \geqslant (4ab - 1)(a + b).$$

Skoro $a, b \in \mathbb{Z}_+$, to $4ab - 1 > 1$, czyli $a - b > a + b$ – sprzeczność. Wobec tego niemożliwe jest $a \neq b$.

Zadanie 6.
Znaleźć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite m i n, że wyrażenie $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:
Weźmy całkowite k, dla którego istnieją takie całkowite $m, n > 0$, że

$$\frac{m^2 + n^2}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = k.$$

Każda para, gdzie $m = n$, spełnia warunki zadania, jednocześnie implikując $k = 2$. Weźmy taką parę (m, n) różnych dodatnich liczb całkowitych, dla której suma $m + n$ jest najmniejsza. Bez straty ogólności $m > n$. Zamieńmy m na zmienną x. Z wyjściowego równania po równoważnych przekształceniach otrzymujemy

$$x^2 - (nk)x + n^2 = 0$$

Jest to równanie kwadratowe zmiennej x. Drugim rozwiązaniem tego równania jest liczba a, dla której ze wzorów Viete'a mamy

$$a = nk - m \qquad \text{oraz} \qquad a = \frac{n^2}{m} < m,$$

ponieważ $m > n$. Pierwsze równanie pokazuje, że a jest całkowite. Z drugiego równania mamy, że $a > 0$ oraz $a + n < m + n$, co jest sprzeczne z założeniem o minimalności pary (m, n), zatem założenie, że liczby m i n są różne, prowadzi do sprzeczności, implikując jednocześnie $m = n$. Zatem warunki zadania spełniają tylko liczby

$$(m, n) = (t, t),$$

gdzie t jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Po podstawieniu ich do wyrażenia $\frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ możemy zauważyć, że $k = 2$.

Zadanie 7.
Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają podzielność $abc+1 \mid a^2+b^2+c^2$. Udowodnić, że $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc+1}$ jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc+1}=k$$

i niech (a,b,c) będzie trójką o najmniejszej sumie spośród trójek o tej własności. Bez straty ogólności niech $a \leqslant b \leqslant c$. Wówczas $x=c$ jest jednym z rozwiązań równania kwadratowego

$$x^2-(kab)x+(a^2+b^2-k)=0.$$

Ze wzorów Viete'a drugim rozwiązaniem jest $d=kab-c \in \mathbb{Z}$ i trójka (a,b,d) także spełnia podzielność z zadania, ponadto dla tego samego k. Zauważmy, że $d \geqslant 0$, ponieważ w przeciwnym wypadku mianownik ułamka definiującego k byłby ujemny ($a=b=-d=1$ należy wykluczyć osobno).

Mniejsze z rozwiązań powyższego równania kwadratowego jest równe

$$\frac{1}{2}\left(kab-\sqrt{k^2a^2b^2-4a^2-4b^2+4k}\right).$$

Chcemy pokazać, że

$$(ka-2)b<\sqrt{k^2a^2b^2-4a^2-4b^2+4k},$$

co jest równoważne temu, że rozwiązanie to jest mniejsze od b. Jeśli $ka-2<0$, powyższa nierówność trywialnie zachodzi. W przeciwnym wypadku, po podniesieniu do kwadratu dostajemy nierówność równoważną

$$a^2-k<b^2(ka-2).$$

Jeśli $ka-2>0$, to prawa strona jest równa co najmniej b^2, a lewa jest mniejsza od $a^2 \leqslant b^2$, więc nierówność zachodzi. Pozostało zatem $ka-2=0$, co jest możliwe tylko dla $(k,a)=(2,1)$ lub $(k,a)=(1,2)$. W pierwszym przypadku nierówność zachodzi, natomiast drugi wymusza

$$(c-b)^2+3=c^2-2bc+b^2+3=0,$$

co oczywiście jest niemożliwe. Wobec tego mniejsze z rozwiązań powyższego równania kwadratowego jest mniejsze od b, czyli w szczególności nie może być równe c. Stąd d jest mniejszym z rozwiązań i $d<b \leqslant c$. Ponieważ $d>0$ prowadzi do sprzeczności z minimalnością sumy $a+b+c$, musi zachodzić $d=0$. Wówczas

$$0^2-(kab)0+(a^2+b^2-k)=0,$$

czyli $k=a^2+b^2$, co było do wykazania.

Zadanie 8.
Dodatnie liczby całkowite a, b, c, m spełniają równanie $m \cdot abc = 1+a^2+b^2+c^2$. Udowodnić, że $m=4$.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że dla pewnego $m \in \mathbb{Z}_+$ istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że

$$\frac{a^2+b^2+c^2+1}{abc}=m$$

i niech (a,b,c) będzie trójką o najmniejszej sumie spośród trójek o tej własności. Bez straty ogólności niech $a \leqslant b \leqslant c$. Analizując równość z założenia modulo 4, wnioskujemy, że wszystkie liczby a, b, c są nieparzyste. Stąd $4 \mid m$, w szczególności $m \geqslant 4$.

Zauważmy, że $x = c$ jest jednym z rozwiązań równania kwadratowego

$$x^2 - (mab)x + (a^2 + b^2 + 1) = 0.$$

Ze wzorów Viete'a drugim rozwiązaniem jest $d = mab - c$ i trójka (a, b, d) także spełnia odpowiednią podzielność, ponadto dla tego samego m. Zauważmy, że

$$mab = c + \frac{a^2 + b^2 + 1}{c} > c,$$

więc $d > 0$. Mniejsze z rozwiązań powyższego równania kwadratowego jest równe

$$\frac{1}{2}\left(mab - \sqrt{m^2a^2b^2 - 4a^2 - 4b^2 - 4}\right).$$

Chcemy zbadać, kiedy rozwiązanie to jest mniejsze od b, co jest równoważne

$$(ma - 2)b < \sqrt{m^2a^2b^2 - 4a^2 - 4b^2 - 4}.$$

Ponieważ $m \geqslant 4$, po podniesieniu do kwadratu dostajemy nierówność równoważną

$$(ma - 1)b^2 > a^2 + b^2 + 1.$$

Wobec $m \geqslant 4$ mamy $ma - 1 \geqslant 3$. Jeśli tylko $b \geqslant 2$, to lewa strona jest równa co najmniej $3b^2 > 2b^2 + 1$, więc wobec założenia $a \leqslant b$ jest ściśle większa od $a^2 + b^2 + 1$ i nierówność zachodzi. Wówczas d jest mniejszym z rozwiązań powyższego równania kwadratowego i $d < b \leqslant c$. To jednak prowadzi do sprzeczności z minimalnością sumy $a + b + c$.

Wobec tego $b = 1$, co implikuje natychmiast $a = 1$. Wówczas $cm = c^2 + 3$, czyli $3 = c(m - c)$ i $c \in \{1, 3\}$. W obu przypadkach otrzymujemy $m = 4$, co było do udowodnienia.

Zadanie 9. (Vietnam MO 2002)
Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o tej własności, że równanie

$$a + b + c + d = n\sqrt{abcd}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{Z}_+$ istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że

$$a + b + c + d = n\sqrt{abcd}$$

i weźmy czwórkę (a, b, c, d) o najmniejszej sumie. Bez straty ogólności niech $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Zauważmy, że $x = d$ jest jednym z rozwiązań równania kwadratowego

$$P(x) = x^2 + (2a + 2b + 2c - n^2abc)x + (a + b + c)^2 = 0.$$

Ze wzorów Viete'a drugim rozwiązaniem jest $r = n^2abc - 2a - 2b - 2c - d \in \mathbb{Z}$ oraz $dr = (a + b + c)^2$, więc $r > 0$. Stąd czwórka (a, b, c, r) też jest poprawnym rozwiązaniem dla tego samego n. Zauważmy również, że

$$P(c) = (a + b + 2c)^2 - n^2abc^2 \leqslant 16c^2 - n^2abc^2 = (16 - n^2ab)c^2.$$

Jeśli zatem $n > 4$, to $P(c) < 0$, więc c leży pomiędzy dwoma pierwiastkami P. Wtedy $r < c < d$, co jest w sprzeczności z założeniem o minimalności $a + b + c + d$. Wobec tego $n \leqslant 4$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że liczby $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ spełniają warunki zadania.

Równania funkcyjne

Bartosz Kotwicki

Teoria

Definicja (Funkcja monotoniczna)

Jeżeli dla wszystkich $x \geqslant y$ zachodzi nierówność $f(x) \geqslant f(y)$ lub dla wszystkich $x \geqslant y$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(y)$, to funkcja f jest *monotoniczna*.

Definicja (Funkcja ściśle monotoniczna)

Jeżeli dla wszystkich $x > y$ zachodzi nierówność $f(x) > f(y)$, to funkcja f jest *ściśle rosnąca*. Jeżeli dla wszystkich $x > y$ zachodzi nierówność $f(x) < f(y)$, to funkcja f jest *ściśle malejąca*.

Lemat 1 (Niemalejąca inwolucja)

Jeżeli funkcja f jest niemalejąca i spełnia $f(f(x)) = x$, to $f(x) = x$.

Definicja (Injekcja)

Jeżeli $f(a) = f(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$, to funkcja f jest *różnowartościowa* (*injekcją*).

Definicja (Surjekcja)

Jeżeli zbiór wartości jest równy przeciwdziedzinie funkcji f, to funkcja f jest *surjekcją*.

Udowodnienie, że funkcja jest surjekcją, bywa bardzo przydatne. Wówczas między innymi istnieje takie a, że $f(a) = 0$ (jeśli dopuszcza to przeciwdziedzina), co być może pozwoli uzyskać prostszą równość.

Definicja (Bijekcja)

Jeżeli funkcja f jest injekcją oraz surjekcją, to jest *bijekcją*.

Definicja (Ciągłość funkcji)

Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

O funkcji ciągłej można myśleć jako o takiej, którą można narysować bez odrywania rysika od kartki.

Definicja (Funkcja addytywna)

Funkcja f jest *addytywna*, jeżeli dla wszystkich x, y, spełnia równość

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Twierdzenie

Każda funkcja addytywna f ma tę własność, że

$$f(qx) = qf(x)$$

dla każdego $q \in \mathbb{Q}$.

Twierdzenie (Równanie funkcyjne Cauchy'ego w $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$)

Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ spełnia równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}_+$, to f jest postaci $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}_+$.

Twierdzenie (Równanie funkcyjne Cauchy'ego w $\mathbb{R}$)

Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, to f jest postaci $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

Metody

Jest wiele metod rozwiązywania równań funkcyjnych. Niektóre z nich to:

- Podstawianie stałych, najczęściej 0 lub 1.
- Jeżeli $f(x+a)$, przy czym a jest zależne tylko od y oraz znamy $f(0)$, to podstawiamy $x = -a$.
- Jeżeli w równaniu zmienna x pojawia się zarówno w parzystej, jak i w nieparzystej potędze, to warto podstawić $-x$ w miejsce x.
- Jeżeli występuje wyrażenie typu $f(f(x))$, to warto rozważyć $t := f(x)$.
- Wykazywanie, że funkcja jest różnowartościowa lub przyjmuje wartość zero tylko dla jednej stałej, zakładając, że istnieją takie $a \neq b$, że $f(a) = f(b)$.
- Pokazywanie, że funkcja jest monotoniczna.
- Wykazywanie, że funkcja jest surjekcją/bijekcją.
- Doprowadzenie do równania funkcyjnego Cauchy'ego, np. poprzez rozważenie funkcji $g(x) = f(x) - f(0)$.

Addytywność

Zadanie 1.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$ równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - xy.$$

Zadanie 2.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$ równanie

$$f(x + f(y)) = f(x) + y.$$

Zadanie 3. (USAMO 2002 P4)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4.
Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe spełniające równanie funkcyjne Jensena

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5.
Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe spełniające równanie funkcyjne Mikołaja z Oresme

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$$

dla wszystkich $x_1 > x_2 > x_3$.

Zadanie 6. (55 OM, I etap, zadanie 3)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające warunek

$$f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y.

Zadanie 7. (Romanian MO 1998)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy).$$

Zadanie 8. (Bulgarian MO 1994)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 9. (IMO 1992 P2)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y.

Zadanie 10. (IMO Shortlist 2019 A1)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, że dla wszystkich liczb całkowitych a i b zachodzi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Zadania mieszane

Zadanie 11.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

Zadanie 12.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x + f(y + f(z))) = x + y + z + 1.$$

Zadanie 13.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadania łatwe

Zadanie 14. (Indian MO 2005)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x^2 + yf(z)) = xf(x) + zf(y).$$

Zadanie 15. (59 OM, II etap, zadanie 3)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y zachodzi

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x.$$

Zadanie 16. (53 OM, II etap, zadanie 1)
Dana jest taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Zadanie 17.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają

$$f(x+y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 18.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają

$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y.

Zadania średniej trudności

Zadanie 19. (USAMO 2023 P2)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, które dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}_+$ spełniają

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + 2.$$

Zadanie 20. (63 OM, II etap, zadanie 4)
Znaleźć wszystkie takie pary funkcyj $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x.$$

Zadanie 21. (61 OM, II etap, zadanie 5)
Znaleźć wszystkie takie funkcje monotoniczne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(f(x) - y) + f(x+y) = 0.$$

Zadanie 22. (Rabka 2019)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y).$$

Zadanie 23. (63 OM, I etap, zadanie 8)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x + f(x+y)) = f(x-y) + f(x)^2.$$

Zadanie 24. (USAJMO 2024 P5)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y).$$

Zadania trudne

Zadanie 25. (62 OM, III etap, zadanie 4)
Znaleźć wszystkie takie pary funkcyj $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y).$$

Zadanie 26. (65 OM, I etap, zadanie 5)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełniające warunek

$$f(a+b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a+b)$$

dla każdej pary liczb całkowitych a, b.

Zadanie 27. (IMO Shortlist 2002 A1)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 28. (IMO Shortlist 2018 A1)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ spełniające

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}_+$.

Zadanie 29. (69 OM, II etap, zadanie 1)
Znaleźć wszystkie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, które spełniają oba następujące warunki:

(1) $f(x) + f(y) \geqslant xy$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y,

(2) dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y, że $f(x) + f(y) = xy$.

Zadanie 30.
Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \geqslant y$ spełniona jest nierówność

$$f(x) - f(y) \geqslant \sqrt{x-y}.$$

Zadanie 31. (IMO Shortlist 2020 A8)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniające

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 32. (IMO Shortlist 2009 A3)
Dana jest taka funkcja $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x, y liczby

$$x, \quad f(y), \quad f(y + f(x) - 1)$$

są długościami boków pewnego niezdegenerowanego trójkąta. Wykazać, że $f(1) = 1$.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Bartosz Kotwicki*, Karol Musieliński, Michał Oprocha.

We wszystkich rozwiązaniach $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ będzie oznaczało podstawienie $x_1 := a_1$, $x_2 := a_2$, …, $x_n := a_n$ do wyjściowego równania. Przykładowo, jeśli w wyjściowym równaniu występują zmienne x, y, z, to bierzemy $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$. Analogicznie dla zmiennych a, b, c bierzemy $a = x_1$, $b = x_2$, $c = x_3$.

Zadanie 1.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$ równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - xy.$$

Rozwiązanie:
Po dodaniu wyrażenia

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy = \frac{(x+y)^2}{2}$$

do obu stron równania wyjściowego otrzymujemy równość

$$f(x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} = f(x) + \frac{x^2}{2} + f(y) + \frac{y^2}{2}.$$

Rozważmy funkcję $g(x) = f(x) + x^2/2$. Wtedy $g(x+y) = g(x) + g(y)$, czyli funkcja g jest addytywna. Zatem $g(x) = ax$, a więc $f(x) = ax - x^2/2$ dla pewnego $a \in \mathbb{Q}$. Bezpośrednio sprawdzamy, że każda funkcja tej postaci spełnia warunki zadania.

Zadanie 2.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$ równanie

$$f(x + f(y)) = f(x) + y.$$

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $(0, 0)$ otrzymujemy, że

$$f(f(0)) = f(0).$$

Z kolei z podstawienia $(x, f(0))$ oraz $(x, 0)$ otrzymujemy

$$f(x) + f(0) = f(x + f(f(0))) = f(x + f(0)) = f(x) + 0 = f(x),$$

więc $f(0) = 0$. Stąd dla $(0, x)$ mamy

$$f(f(x)) = f(0 + f(x)) = f(0) + x = x.$$

W końcu dla $(x, f(y))$ otrzymujemy

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

więc funkcja f jest addytywna. Z addytywności otrzymujemy, że $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{Q}$. Po wstawieniu otrzymanej postaci do wyjściowego równania wnioskujemy, że $f(x) = x$ lub $f(x) = -x$. Każda z tych funkcyj spełnia warunki zadania.

Zadanie 3. (USAMO 2002 P4)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Podstawiamy $(0,0)$ i otrzymujemy $f(0) = 0$. Dla $(x, 0)$ mamy równość

$$xf(x) = f(x^2) = -xf(-x),$$

więc $f(x) = -f(-x)$. Zatem

$$f(x^2) = f(x^2 - y^2) + f(y^2).$$

Niech $a + b := x^2$, $b := y^2$. Wówczas

$$f(a + b) = f(a) + f(b),$$

czyli funkcja f jest addytywna dla nieujemnych rzeczywistych argumentów. Zauważmy, że dla każdego $a \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ po wstawieniu $(a + 1, 0)$ otrzymujemy

$$f((a + 1)^2) = (a + 1)f(a + 1).$$

Stąd z addytywności funkcji f oraz $f(x^2) = xf(x)$ otrzymujemy

$$af(a) + 2f(a) + f(1) = (a + 1)f(a) + (a + 1)f(1).$$

Wobec powyższego $f(a) = af(1)$, o ile tylko $a \geqslant 0$. Wtedy z równości $f(x) = -f(-x)$ mamy $f(x) = xf(1)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, czyli funkcja f jest postaci $f(x) = cx$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda funkcja tej postaci spełnia warunki zadania.

Zadanie 4.
Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe spełniające równanie funkcyjne Jensena

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Niech $g(x) = f(x) - f(0)$, wtedy $g(0) = 0$. Po odjęciu wyrażenia $2f(0)$ od obu stron wyjściowego równania, otrzymujemy

$$(f(x) - f(0)) + (f(y) - f(0)) = 2\left(f\left(\frac{x + y}{2}\right) - f(0)\right),$$

$$\text{więc} \quad g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Po podstawieniu $(x + y, 0)$ mamy

$$g(x + y) = 2g\left(\frac{x + y}{2}\right),$$

więc $g(x) + g(y) = g(x + y)$.

Wówczas z równania funkcyjnego Cauchy'ego otrzymujemy $g(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, więc funkcja f jest postaci $f(x) = ax + b$, przy czym $a, b \in \mathbb{R}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda funkcja tej postaci spełnia warunki zadania.

Zadanie 5.
Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe spełniające równanie funkcyjne Mikołaja z Oresme

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$$

dla wszystkich $x_1 > x_2 > x_3$.

Rozwiązanie:
Podstawmy $(x+\varepsilon, x, x-\varepsilon)$, przy czym $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{f(x)-f(x-\varepsilon)} = \frac{(x+\varepsilon)-x}{x-(x-\varepsilon)} = 1,$$
$$\text{więc} \quad 2f(x) = f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon).$$

Rozważmy $g(x) = f(x) - f(0)$. Wówczas funkcja g jest ciągła, $g(0) = 0$ oraz g spełnia

$$g(x+\varepsilon)+g(x-\varepsilon) = 2g(x).$$

Po przyjęciu $x = 0$ otrzymujemy $g(\varepsilon) = -g(-\varepsilon)$ dla każdego $\varepsilon > 0$, czyli funkcja g jest nieparzysta. Zauważmy, że dla każdego $y \neq 0$, po przyjęciu odpowiednio $\varepsilon := y$ lub $\varepsilon := -y$, zachodzi równość

$$g(x+y)+g(x-y) = 2g(x).$$

Powyższa równość zachodzi również trywialnie dla $y = 0$. Analogicznie

$$g(y+x)+g(y-x) = 2g(y).$$

Po dodaniu powyższych i skorzystaniu z nieparzystości otrzymujemy

$$2g(x+y) = 2g(x)+2g(y).$$

Oznacza to, że funkcja g jest addytywna. Ponieważ g jest ciągła, z równania Cauchy'ego wnioskujemy, że funkcja f jest postaci $f(x) = ax+b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. O ile tylko $a \neq 0$, to funkcja tej postaci spełnia warunki zadania.

Zadanie 6. (55 OM, I etap, zadanie 3)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające warunek

$$f(x^2+y) = xf(x)+f(y)$$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y.

Rozwiązanie:
Dla $(-x, y)$ otrzymujemy

$$f(x^2+y) = -xf(-x)+f(y).$$

Stąd wnioskujemy, że $xf(x) = -xf(-x)$, więc funkcja f jest nieparzysta. Dla $(1, -1)$ mamy

$$f(0) = f(1)-f(1) = 0.$$

Z kolei dla $(x, 0)$ mamy $f(x^2) = xf(x)$. Zatem

$$f(x^2+y) = f(x^2)+f(y).$$

dla wszystkich x, y. Po przyjęciu w powyższym $(x, y-x^2)$ mamy

$$f(y-x^2) = f(y)-f(x^2).$$

Ustalmy teraz $a, r \in \mathbb{Q}$. Zauważmy, że dla $p = (r+1)/2$, $q = (r-1)/2$ zachodzi równość $r = p^2-q^2$. Stąd

$$f(a+r) = f(a)+f(p^2)-f(q^2) = f(a)+f(p^2-q^2) = f(a)+f(r).$$

Wobec dowolności a i r funkcja f jest addytywna. Zatem $f(x) = xf(1)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}$, czyli funkcja f jest postaci $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{Q}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda taka funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 7. (Romanian MO 1998)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy).$$

Rozwiązanie:
Po wstawieniu $(0, 0)$ otrzymujemy $f(0) = 0$. Natomiast dla $(0, y)$ dostajemy $f(y^2) = f(-y^2)$, czyli funkcja f jest parzysta. Niech $a := x^2 - y^2$, $b := 2xy$, przy czym $x, y \geqslant 0$ – można w ten sposób uzyskać wszystkie pary $a, b \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Wówczas

$$f\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) = f(a) + f(b).$$

Rozważmy $g(x) = f(\sqrt{x})$ i zauważmy, że $g(x + y) = g(x) + g(y)$ oraz $g\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Wówczas z równania funkcyjnego Cauchy'ego dla $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ wnioskujemy, że $g(x) = ax$ dla pewnego $a \geqslant 0$. Stąd i z parzystości $f(x) = ax^2$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda funkcja tej postaci spełnia warunki zadania.

Zadanie 8. (Bulgarian MO 1994)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Dla $(x + y, y)$ otrzymujemy

$$(x + y)f(x + y) - yf(y) = xf(x + 2y),$$

więc po dodaniu powyższego do wyjściowego mamy

$$2f(x + y) = f(x) + f(x + 2y).$$

Do powyższego wstawiamy $(x, (y - x)/2)$, co daje

$$2f\left(\frac{x + y}{2}\right) = f(x) + f(y).$$

Wówczas stosujemy podstawienie $(x + y, 0)$ i otrzymujemy

$$f(x + y) + f(0) = 2f\left(\frac{x + y}{2}\right) = f(x) + f(y).$$

Niech $c := f(0)$. Wówczas

$$\begin{gathered} xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y) = (x - y)(f(x) + f(y) - c), \\ \text{więc} \quad yf(x) - xf(y) = c(x - y) \end{gathered}$$

Po ustaleniu $y \neq 0$ wnioskujemy, że $f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda funkcja tej postaci spełnia warunki zadania.

Zadanie 9. (IMO 1992 P2)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y.

Rozwiązanie:
Niech $a := f(0)$. Wówczas z $(0, y)$ dostajemy

$$f(f(y) + a) = y + a^2.$$

Ponadto prawa strona powyższej równości przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, stąd f jest surjekcją. Zatem istnieje takie y_0, że $f(y_0) = 0$. Wówczas z powyższego

$$f(a) = y_0 + a^2.$$

Jednak podstawienie $(0, 0)$ daje $f(a) = a^2$, więc $y_0 = 0$, czyli $a = f(0) = 0$. Wobec tego

$$f(f(y)) = y$$

dla każdego $y \in \mathbb{R}$. Stąd w szczególności funkcja f jest injekcją. Bierzemy teraz $(x, 0)$ i otrzymujemy

$$f(x^2) = f(x)^2 \geqslant 0,$$

przy czym nierówność ta jest ścisła dla $x \neq 0$. Po wstawieniu $(x, f(t))$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$ do wyjściowego równania mamy

$$f(x^2 + t) = f(t) + f(x^2) = f(t) + f(x)^2.$$

Zauważmy, że wobec powyższego funkcja f jest ściśle rosnąca. Teraz z Lematu 1 wnioskujemy, że $f(x) = x$. Czytelnik zechce sprawdzić, że tak zdefiniowana funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 10. (IMO Shortlist 2019 A1)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, że dla wszystkich liczb całkowitych a i b zachodzi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Rozwiązanie:
Dla $(a, 0)$ otrzymujemy

$$f(2a) + 2f(0) = f(f(a)).$$

Z kolei dla $(0, a)$, dostajemy

$$f(0) + 2f(a) = f(f(a)).$$

Wobec powyższych zachodzi równość

$$f(2a) = 2f(a) - f(0).$$

Po przyjęciu $(0, a + b)$ w wyjściowym równaniu mamy

$$f(0) + 2f(a + b) = f(f(a + b)) = f(2a) + 2f(b) = 2f(a) - f(0) + 2f(b).$$

Stąd

$$f(a + b) = f(a) + f(b) - f(0).$$

Rozważmy $g(x) = f(x) - f(0)$, wtedy $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Wówczas z addytywności $g(x) = kx$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Stąd funkcja f jest postaci $f(x) = kx + c$ dla pewnych $k, c \in \mathbb{Z}$. Bezpośrednio wstawiając tę postać funkcji do wyjściowego równania, znajdujemy jedyne rozwiązania $f(x) = 2x + c$ dla pewnego $c \in \mathbb{Z}$ lub $f(x) = 0$.

Zadanie 11.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

Rozwiązanie:
Dla $(0, 0)$ otrzymujemy $f(0)^2 = f(0)$. Wówczas ma miejsce jeden z przypadków

(i) $f(0) = 0$. Wówczas (x, x) daje $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(0) = 1$. Wstawiamy $(0, x)$ i otrzymujemy $f(x) = f(-x)$. Wówczas

$$f(2x) = f(x - (-x)) = f(x)f(-x) = f(x)f(x) = f(x - x) = f(0) = 1.$$

Wobec powyższego $f(x) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że każda z funkcyj $f(x) = 0$ oraz $f(x) = 1$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 12.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x + f(y + f(z))) = x + y + z + 1.$$

Rozwiązanie:
Dla $(x, 0, 0)$ mamy

$$f(x + f(f(0))) = x + 1.$$

Niech $c := f(f(0))$. Wówczas po wstawieniu $(x - c, 0, 0)$ dostajemy

$$f(x) = x - c + 1.$$

Wobec tego funkcja f jest postaci $f(x) = x - a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Po podstawieniu tej postaci do wyjściowego równania wnioskujemy, że $a = 1/3$ jest jedynym rozwiązaniem.

Zadanie 13.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające

$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Dla $(0, 0)$ otrzymujemy równość $f(0) = 2f(0)$, czyli $f(0) = 0$.

Następnie dla (x, x) mamy

$$0 = f(x - x) = f(x) + f(x) - 2x^2 = 2f(x) - 2x^2,$$

czyli $f(x) = x^2$. Czytelnik zechce sprawdzić, że otrzymana funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 14. (Indian MO 2005)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x^2 + yf(z)) = xf(x) + zf(y).$$

Rozwiązanie:
Z podstawienia $(0, 0, 0)$ mamy $f(0) = 0$. Następnie dla $(x, 0, z)$ otrzymujemy

$$f(x^2) = f(x^2 + 0 \cdot f(z)) = xf(x) + zf(0) = xf(x),$$

Z kolei z (x, x, x) uzyskujemy

$$f(x^2 + xf(x)) = 2xf(x).$$

Wobec powyższych

$$2xf(x) = f(x^2 + xf(x)) = f(x^2 + f(x^2)) = xf(x) + x^2 f(1),$$

czyli $xf(x) = x^2 f(1)$, co daje $f(x) = xf(1)$ dla $x \neq 0$. Wobec tego funkcja f jest postaci $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Czytelnik zechce sprawdzić, podstawiając otrzymaną postać do wyjściowego równania, że jedynymi funkcjami, które spełniają warunki zadania, są $f(x) = x$ oraz $f(x) = 0$.

Zadanie 15. (59 OM, II etap, zadanie 3)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y zachodzi

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x.$$

Rozwiązanie:
Dla $(0, 0)$ dostajemy, że

$$f(f(0)) = f(f(0) - 0) = f(0) + f(f(0) - f(0)) = 2f(0).$$

Wstawiając $(0, f(0))$ mamy

$$f(0) = f(0) + f(f(f(0)) - f(0)) = f(0) + f(2f(0) - f(0)) = f(0) + f(f(0)) = 3f(0),$$

więc $f(0) = 0$. Następnie bierzemy $(0, y)$ i uzyskujemy

$$f(-y) = f(f(0) - y) = f(0) + f(f(y) - f(0)) = f(f(y)).$$

Wreszcie dla $(x, f(x))$ otrzymujemy

$$0 = f(f(x) - f(x)) = f(x) + f(f(f(x)) - f(-x)) + x = f(x) + x,$$

czyli $f(x) = -x$. Czytelnik zechce sprawdzić, że otrzymana funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 16. (53 OM, II etap, zadanie 1)
Dana jest taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1 - x).$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że z założenia zachodzi równość

$$f(x - 1/2) = f(2x - 1) = f(2 - 2x) = f(1 - x) = f(x).$$

Zatem funkcja f jest okresowa o okresie $1/2$.

Zadanie 17.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają

$$f(x + y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $(0, 0)$ otrzymujemy równość

$$f(0) + f(0)^2 = 0,$$

więc $f(0) = 0$ albo $f(0) = -1$, czyli ma miejsce jeden z poniższych przypadków.

(i) $f(0) = 0$. Po podstawieniu $(x, 0)$ otrzymujemy

$$f(x) = f(x) + f(x)f(0) = 0,$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$, co oczywiście nie spełnia wyjściowego równania.

(ii) $f(0) = -1$. Dla $(x, -x)$ otrzymujemy równość

$$f(0) + f(x)f(-x) = x^4 - 2x^2,$$

więc

$$f(x)f(-x) = (x^2 - 1)^2.$$

Po położeniu w powyższym $x = 1$ dostajemy

$$f(1)f(-1) = 0.$$

Jeśli $f(1) = 0$, to dla $(x, 1)$ otrzymujemy

$$f(x + 1) = f(x + 1) + f(x)f(1) = x^2 + 2x$$

Zatem $f(x) = x^2 - 1$. Dla $f(-1) = 0$ analogicznie otrzymujemy ten sam wzór funkcji f.

Czytelnik zechce sprawdzić, że funkcja $f(x) = x^2 - 1$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 18.
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają

$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x)$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y.

Rozwiązanie:
Dla $(0,0)$ dostajemy, że

$$f(f(0)) + f(0) = f(0 \cdot f(0) - 0) = f(0),$$

więc $f(f(0)) = 0$. Połóżmy teraz $(0, f(0))$, wtedy

$$f(0) + f(-f(0)) = f(f(f(0))) + f(-f(0)) = f(0),$$

więc $f(-f(0)) = 0$. Po podstawieniu $(f(0), f(0))$ otrzymujemy

$$2f(0) = f(f(f(0))) + f(0) = f(f(0) \cdot f(f(0)) - f(0)) = f(-f(0)) = 0,$$

więc $f(0) = 0$. Następnie przyjmujemy $(x, 0)$, wtedy

$$f(x) = f(f(0)) + f(x) = f(xf(0) - x) = f(-x),$$

czyli funkcja f jest parzysta. Ponadto (x, x) daje równość

$$f(f(x)) = f(f(x)) + f(0) = f(xf(x) - x).$$

Wreszcie po podstawieniu $(x, -x)$ mamy

$$f(f(x)) + f(2x) = f(f(-x)) + f(2x) = f(xf(-x) - x) = f(xf(x) - x).$$

Po odjęciu dwóch ostatnich równań stronami otrzymujemy równość $f(2x) = 0$. Wobec tego dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = 0$. Czytelnik zechce sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

Zadanie 19. (USAMO 2023 P2)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, które dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}_+$ spełniają

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + 2.$$

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $(x, 1)$ mamy

$$f(x + f(x)) = xf(1) + 2.$$

Dla $(1, x + f(x))$ dostajemy równość

$$f(x + f(x) + f(1)) = f(x + f(x)) + 2 = xf(1) + 4.$$

Następnie bierzemy $(x, 1 + f(1)/x)$ i otrzymujemy

$$f(x + f(1) + f(x)) = xf\left(1 + \frac{f(1)}{x}\right) + 2.$$

Z otrzymanych zależności mamy

$$xf(1) + 4 = xf\left(1 + \frac{f(1)}{x}\right) + 2,$$
$$\text{więc} \quad f\left(1 + \frac{f(1)}{x}\right) = \frac{2}{x} + f(1).$$

Po podstawieniu w powyższym równaniu $f(1)/x$ w miejsce x mamy

$$f(x+1) = \frac{2}{f(1)}x + f(1).$$

Stąd dla wszystkich $x > 1$ zachodzi równość $f(x) = ax + b$, przy czym $a, b \in \mathbb{R}$. Poprzez bezpośrednie podstawienie uzyskanej postaci do wyjściowego równania, wnioskujemy, że $f(x) = x + 1$ dla wszystkich $x > 1$. Następnie niech $x > 1$ i $y \leqslant 1$. Wówczas

$$xy + x + 2 = f(xy + f(x)) = xf(y) + 2.$$

więc $f(y) = y + 1$. Pozostało bezpośrednio sprawdzić, że funkcja $f(x) = x + 1$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 20. (63 OM, II etap, zadanie 4)
Znaleźć wszystkie takie pary funkcyj $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x.$$

Rozwiązanie:
Niech $a := f(g(0))$. Po podstawieniu $(x, 0)$ otrzymujemy

$$g(f(x)) = a + x.$$

Niech $b := g(0)$. Wówczas po przyjęciu $(x, f(x))$ dostajemy

$$b = f(a + x) + x, \quad \text{więc} \quad f(x) = b + a - x.$$

Wobec tego $f(x) = c - x$, przy czym $c = a + b$. Następnie zauważmy, że

$$g(c - x - y) = g(f(x) - y) = f(g(y)) + x = c - g(y) + x.$$

Po wstawieniu $(c - y, y)$ do powyższego otrzymujemy równość

$$b = c - g(y) - y + c,$$

czyli $g(y) = 2c - b - y$. Zatem $g(x) = d - x$, przy czym $d = 2c - b$.

Następnie podstawiamy uzyskane postacie funkcyj $f(x) = -x + c$ oraz $g(x) = -x + d$ do wyjściowego równania. Wówczas wnioskujemy, że $c = d$. Wobec tego $f(x) = g(x) = c - x$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda para funkcyj tej postaci spełnia warunki zadania.

Zadanie 21. (61 OM, II etap, zadanie 5)
Znaleźć wszystkie takie funkcje monotoniczne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(f(x) - y) + f(x + y) = 0.$$

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $(0, 0)$ otrzymujemy

$$f(f(0)) + f(0) = 0.$$

Następnie dla $(f(0), -f(0))$ mamy

$$2f(0) = f(0) + f(0) = f(f(f(0)) + f(0)) + f(f(0) - f(0)) = 0,$$

więc $f(0) = 0$. Bierzemy teraz $(0, y)$ i otrzymujemy

$$f(y) + f(-y) = f(f(0) - y) + f(0 + y) = 0,$$

więc funkcja f jest nieparzysta. Przypuśćmy, że istnieje takie $t \neq 0$, że $f(t) = 0$. Wówczas dla (t, y) dostajemy równość

$$f(-y) + f(t + y) = f(f(t) - y) + f(t + y) = 0,$$

więc $f(y + t) = f(y)$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$. Wobec tego funkcja f jest okresowa i monotoniczna, więc stała. Bezpośrednio z wyjściowego równania sprawdzamy, że jedyną funkcją stałą, która spełnia warunki zadania, jest $f(x) = 0$.

Rozważmy teraz pozostały przypadek, gdy 0 jest jedynym miejscem zerowym funkcji f. Wówczas dla $(x, -x)$ otrzymujemy

$$f(f(x) + x) = 0,$$

więc $f(x) = -x$. Czytelnik zechce sprawdzić, że ta funkcja również spełnia warunki zadania. Wobec tego jedynymi funkcjami o żądanych własnościach są funkcje $f(x) = 0$ oraz $f(x) = -x$.

Zadanie 22. (Rabka 2019)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y).$$

Rozwiązanie:
Dla $(0,0)$ otrzymujemy

$$2f(0) = f(0)^2,$$

więc zachodzi jeden z poniższych przypadków.

(i) $f(0) = 0$. Wówczas dla $(x,0)$ dostajemy

$$f(x^2) = xf(x).$$

Po podstawieniu $-x$ w miejsce x w powyższej równości otrzymujemy $xf(x) = -xf(-x)$, więc $f(x) = -f(-x)$ i funkcja f jest nieparzysta. Po wstawieniu $(x,-x)$ mamy

$$0 = f(x^2) + f(-x^2) = f(x)f(-x) - xf(x) = -f(x^2) - xf(x),$$

czyli $f(x)^2 = -xf(x)$. Stąd dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = 0$ lub $f(x) = -x$. Przypuśćmy, że istnieją takie różne $a, b \neq 0$, że $f(a) = -a$ i $f(b) = 0$. Wówczas dla (a,b) dostajemy

$$-a^2 + f(ab) = -ab + af(a+b)$$

Czytelnik zechce sprawdzić możliwe wartości $f(ab)$ oraz $f(a+b)$ i zauważyć, że powyższa równość prowadzi do sprzeczności. Stąd jedynymi rozwiązaniami w tym przypadku mogą być funkcje $f(x) = 0$ lub $f(x) = -x$.

(ii) $f(0) = 2$. Po podstawieniu $(0,y)$ otrzymujemy równość

$$4 = f(0^2) + f(0 \cdot y) = f(0)f(y) + yf(0) = 2f(y) + 2y,$$

czyli $f(x) = 2 - x$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że każda z funkcyj $f(x) = 0$, $f(x) = -x$ i $f(x) = 2 - x$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 23. (63 OM, I etap, zadanie 8)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x + f(x+y)) = f(x-y) + f(x)^2.$$

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $(x + f(x), -f(x))$ otrzymujemy równość

$$f(x + 2f(x)) = f(x + 2f(x)) + f(x + f(x))^2,$$

więc $f(x + f(x)) = 0$. Następnie dla $(x,0)$ mamy

$$0 = f(x + f(x)) = f(x) + f(x)^2,$$

czyli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = -1$ albo $f(x) = 0$. Na mocy wcześniejszego rozumowania istnieje takie $b \in \mathbb{R}$, że $f(b) = 0$. Przypuśćmy, że istnieje również takie $a \in \mathbb{R}$, że $f(a) = -1$. Wtedy dla $(a, a-b)$ otrzymujemy

$$f(a + f(2a-b)) = f(b) + f(a)^2 = 1,$$

jednak lewa strona może być równa jedynie 0 lub -1. Wobec tego $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że otrzymana funkcja spełnia warunki zadania.

Zadanie 24. (USAJMO 2024 P5)
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y).$$

Rozwiązanie:
Niech $c := f(0)$. Wówczas po podstawieniu $(0, 0)$ otrzymujemy $f(c) = 0$. Z kolei dla $(c, 0)$ dostajemy

$$f(c^2) = f(f(c)) + f(0) = 2c.$$

Bierzemy teraz (c, c^2) i otrzymujemy równość

$$c = f(c^2 - c^2) + 2cf(c) = f(f(c)) + f(c^2) = 3c.$$

Stąd $f(0) = c = 0$. Wtedy dla $(x, 0)$ mamy

$$f(x^2) = f(f(x)).$$

Następnie wstawiamy (x, x^2) i dostajemy

$$2x^2f(x) = f(f(x)) + f(x^2) = 2f(x^2),$$

więc $f(x^2) = x^2f(x)$. Po wstawieniu $-x$ w miejsce x w otrzymanej równości, wnioskujemy, że $f(x) = f(-x)$, czyli funkcja f jest parzysta.

Niech teraz $a \neq b$ oraz $f(a) = f(b)$. Wówczas, podstawiając (a, y) oraz (b, y), otrzymujemy

$$f(a^2 - y) + 2yf(a) = f(f(a)) + f(y) = f(f(b)) + f(y) = f(b^2 - y) + 2yf(b),$$

czyli $f(a^2 - y) = f(b^2 - y)$. Niech $d := b^2 - a^2$ i zauważmy, że zachodzi jeden z poniższych przypadków.

(i) Jeśli $d \neq 0$, to funkcja f jest okresowa o okresie d. Po wstawieniu (x, d) mamy, że

$$f(x^2 - d) + 2df(x) = f(f(x)) + f(d) = f(x^2) + f(0) = f(x^2),$$

więc $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Pozostaje przypadek, gdy $d = 0$, czyli $a + b = 0$, o ile tylko $f(a) = f(b)$ dla pewnych $a \neq b$. Wówczas z otrzymanej równości $f(x^2) = f(f(x))$ wnioskujemy, że $f(x) = \pm x^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Przypuśćmy, że istnieją takie $p, q \neq 0$, że $f(p) = p^2$ i $f(q) = -q^2$. Wówczas po podstawieniu (p, q)

$$f(p^2 - q) + 2qp^2 = f(p^2) - q^2 = p^2f(p) - q^2 = p^4 - q^2,$$

czyli $f(p^2 - q) = p^4 - 2qp^2 - q^2$. Wobec tego $f(p^2 - q) = -(p^2 - q)^2$ i dostajemy $p^2 = 2q$. Analogicznie otrzymujemy równość $q^2 = 2p$. Stąd jednak $2p^2q = 2q^2p$ i $p = q$, co jest niemożliwe.
Zatem $f(x) = x^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ albo $f(x) = -x^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że każda z funkcyj $f(x) = 0$, $f(x) = -x^2$ oraz $f(x) = x^2$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 25. (62 OM, III etap, zadanie 4)
Znaleźć wszystkie takie pary funkcyj $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y).$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$f(x)f(y) + 1 = g(x)g(y) + g(x) + g(y) + 1 = (g(x) + 1)(g(y) + 1).$$

Wtedy po przyjęciu (x, x) dostajemy równość

$$f(x)^2 + 1 = (g(x) + 1)^2.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$(f(x)f(y) + 1)^2 = (g(x) + 1)^2(g(y) + 1)^2 = (f(x)^2 + 1)(f(y)^2 + 1),$$
$$\text{więc} \quad (f(x) - f(y))^2 = 0.$$

Wobec tego funkcja f jest stała. Niech $f(x) = c$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$g(x) = \pm\sqrt{c^2 + 1} - 1$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że istnieją takie a, b, że $g(a) \neq g(b)$. Wtedy

$$c^2 + 1 = f(x)f(y) + 1 = (g(x) + 1)(g(y) + 1) = -(c^2 + 1),$$

więc $c^2 = -1$ – sprzeczność. Wobec tego funkcja g również jest stała, a para funkcyj f i g spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) = a$ i $g(x) = b$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, przy czym $a, b \in \mathbb{R}$ są ustalone i spełniają równość $a^2 + 1 = (b + 1)^2$.

Zadanie 26. (65 OM, I etap, zadanie 5)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełniające warunek

$$f(a + b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a + b)$$

dla każdej pary liczb całkowitych a, b.

Rozwiązanie:
Dla $(0, 0)$ mamy $4f(0)^3 = 0$, więc $f(0) = 0$. Po wstawieniu $(a, -a)$ otrzymujemy

$$-f(a)^3 - f(-a)^3 = 0,$$

czyli $f(a) = -f(-a)$ i funkcja f jest nieparzysta. Po przyjęciu $(1, 1)$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &= f(2)^3 - 2f(1)^3 - 3f(1)^2 f(2) = \\ &= (f(1) + f(2))^2 (f(2) - 2f(1)). \end{aligned}$$

Stąd $f(2) = -f(1)$ lub $f(2) = 2f(1)$. Rozpatrzmy kolejno następujące przypadki.

(i) $f(1) = 0$. Wówczas bierzemy $(a, 1)$ i otrzymujemy

$$f(a + 1)^3 - f(a)^3 = f(a + 1)^3 - f(a)^3 - f(1)^3 = 3f(a)f(1)f(a + 1) = 0,$$

więc $f(a + 1) = f(a)$. Ponieważ $f(1) = 0$, równość $f(a) = 0$ zachodzi dla każdego $a \in \mathbb{Z}$.

(ii) $f(2) = -f(1)$ oraz $f(1) \neq 0$. Połóżmy $(1, 2)$, wtedy

$$f(3)^3 = f(3)^3 - f(1)^3 - f(2)^3 = 3f(1)f(2)f(3) = -3f(1)^2 f(3).$$

Stąd

$$f(3)(f(3)^2 + 3f(1)^2) = 0.$$

Ponieważ $f(1) \neq 0$, mamy $f(3)^2 + 3f(1)^2 > 0$, więc $f(3) = 0$. Wtedy dla $(a, 3)$ otrzymujemy

$$f(a + 3)^3 - f(a)^3 = f(a + 3)^3 - f(a)^3 - f(3)^3 = 3f(a)f(3)f(a + 3) = 0,$$

czyli $f(a + 3) = f(a)$. Wobec tego funkcja f jest postaci

$$f(k) = \begin{cases} 0 & k \equiv 0 \pmod 3, \\ a & k \equiv 1 \pmod 3, \\ -a & k \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

dla pewnego $a = f(1) \in \mathbb{Z}$.

(iii) $f(2) = 2f(1)$ oraz $f(1) \neq 0$. Wykażemy indukcyjnie, że $f(k) = kf(1)$ dla $k \in \mathbb{Z}_+$. Oczywiście równość ta jest prawdziwa dla $k \leqslant 2$. Załóżmy teraz, że teza jest spełniona dla $k \geqslant 2$. Wówczas po podstawieniu $(k, 1)$ mamy

$$f(k+1)^3 - f(1)^3 - f(k)^3 = 3f(1)f(k)f(k+1).$$

Zatem z założenia indukcyjnego

$$f(k+1)^3 - (k^3+1)f(1)^3 = 3kf(1)^2 f(k+1),$$

więc

$$(f(k+1) - (k+1)f(1))(f(k+1)^2 + (k+1)f(k+1)f(1) + (k^2-k+1)f(1)^2) = 0.$$

Przypuśćmy, że

$$f(k+1)^2 + (k+1)f(k+1)f(1) + (k^2-k+1)f(1)^2 = 0.$$

Wówczas po podzieleniu obustronnie przez $f(1)^2 \neq 0$ dostajemy

$$\left(\frac{f(k+1)}{f(1)}\right)^2 + (k+1)\left(\frac{f(k+1)}{f(1)}\right) + (k^2-k+1) = 0.$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że powyższe równanie kwadratowe zmiennej $\frac{f(k+1)}{f(1)}$ nie ma rozwiązań rzeczywistych. Wobec tego $f(k+1) = (k+1)f(1)$, co kończy dowód indukcyjny. Pozostało zauważyć, że $f(k) = kf(1)$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, ponieważ funkcja f jest nieparzysta. Zatem f jest postaci $f(k) = ka$ dla pewnego $a \in \mathbb{Z}$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że każda z otrzymanych powyżej funkcyj spełnia warunki zadania.

Zadanie 27. (IMO Shortlist 2002 A1)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $(x, -f(x))$ otrzymujemy równość

$$f(f(-f(x)) - x) = -2x + f(0).$$

Wobec tego funkcja f jest surjekcją. Rozważmy teraz takie $a \in \mathbb{R}$, że $f(a) = 0$. Wtedy po przyjęciu (a, y) mamy

$$f(y) - 2a = f(f(y) - a).$$

Ponieważ funkcja f jest surjekcją, funkcja $y \mapsto f(y) - a$ także jest surjekcją. Wobec tego dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość $f(x) = x - a$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każda funkcja postaci $f(x) = x - a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 28. (IMO Shortlist 2018 A1)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ spełniające

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}_+$.

Rozwiązanie:
Niech $c := f(1)$. Po podstawieniu $(1/c, 1)$ mamy

$$f(1) = f(1/c)^2 f(1),$$

więc $f(1/c) = 1$. Wówczas dla $(x, 1/c)$ otrzymujemy $f(x^2) = f(x)^2$. Stąd $f(1) = f(1)^2$, więc $f(1) = 1$.

Zauważmy, że po przyjęciu $(1, y)$ mamy

$$f(f(y))^2 = f(f(y)^2) = f(y).$$

Stąd jednak

$$f(y) = f(f(y))^2 = f(f(f(y)))^4 = \cdots = (f^{(n+1)}(y))^{2^n}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, przy czym $f^{(k)}$ oznacza k-krotnie złożenie funkcji f z nią samą. Zatem dodatnia liczba wymierna $f(y)$ jest potęgą pewnej liczby wymiernej o dowolnie dużym wykładniku. Czytelnik zechce przekonać się, że stąd $f(y) = 1$ dla każdego $y \in \mathbb{Q}_+$. Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

Zadanie 29. (69 OM, II etap, zadanie 1)
Znaleźć wszystkie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, które spełniają oba następujące warunki:

(1) $f(x) + f(y) \geqslant xy$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y,

(2) dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y, że $f(x) + f(y) = xy$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu do pierwszego warunku (x, x) otrzymujemy nierówność $f(x) \geqslant x^2/2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wówczas dla każdego $x \in \mathbb{R}$ na mocy drugiego warunku istnieje takie $y \in \mathbb{R}$, że

$$0 = f(x) + f(y) - xy \geqslant \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy = \frac{1}{2}(x-y)^2.$$

Jednak oczywiście $(x-y)^2 \geqslant 0$, stąd w powyższej nierówności musi zachodzić równość. Zatem także $f(x) = x^2/2$. Wobec dowolności x jedynym rozwiązaniem może być funkcja $f(x) = x^2/2$. Łatwo sprawdzić, że funkcja dana tym wzorem spełnia warunki zadania.

Zadanie 30.
Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \geqslant y$ spełniona jest nierówność

$$f(x) - f(y) \geqslant \sqrt{x-y}.$$

Rozwiązanie:
Ustalmy $x \geqslant y$. Zauważmy, że $x \geqslant (x+y)/2 \geqslant y$. Zatem

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(y) \geqslant \sqrt{\frac{x+y}{2} - y} = \sqrt{\frac{x-y}{2}},$$
$$f(x) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{x - \frac{x+y}{2}} = \sqrt{\frac{x-y}{2}}.$$

Po dodaniu stronami powyższych nierówności mamy

$$f(x) - f(y) \geqslant \sqrt{2(x-y)}.$$

Analogicznie otrzymujemy $f(x) - f(y) \geqslant \sqrt{2^n(x-y)}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. To oczywiście niemożliwe, ponieważ wartość $f(x) - f(y)$ jest stała, a wartość $\sqrt{2^n(x-y)}$ może być dowolnie duża. Wobec tego nie istnieje funkcja f o tej własności.

Zadanie 31. (IMO Shortlist 2020 A8)
Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniające

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $(1, y)$ otrzymujemy

$$f(1 + f(y)) + y = f(1)f(y) + 1.$$

Wobec powyższego $a = b$, jeśli tylko $f(a) = f(b)$, więc funkcja f jest injekcją. Ustalmy teraz $y \in \mathbb{R}_+$ oraz $x_1 \neq x_2$. Przyjmijmy $z_1 = x_1 y$, $z_2 = x_2 y$. Przypuśćmy, że

$$\frac{1}{y} = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_1 - z_2}.$$

Wtedy $x_1 - z_2 = f(z_2) - f(z_1)$, czyli $x_1 + f(z_1) = x_2 + f(z_2)$. Wówczas z wyjściowego równania wynika równość $f(x_1) = f(x_2)$, czyli $x_1 = x_2$ wbrew założeniu. Wobec dowolności y, prawa strona powyższej równości jest niedodatnia. Stąd i z różnowartościowości funkcja f jest ściśle rosnąca.

Ponieważ funkcja f jest ściśle rosnąca ograniczona z dołu przez 0, dla każdego $x_0 \geqslant 0$ istnieje granica prawostronna

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \geqslant 0.$$

Niech $\lim_{x\to 0^+} f(x) = p$ oraz $\lim_{x\to p^+} f(x) = q$. Wówczas dla $x \to 0^+$ mamy $f(xy) \to p^+$ oraz $f(x+f(xy)) \to q$ dla każdego $y \in \mathbb{R}_+$. Wobec tego

$$q + y = pf(y) + 1 \quad \text{oraz} \quad f(y) = \frac{q+y-1}{p}.$$

Istotnie, gdyby $p = 0$, to $q + y = 1$ dla każdego y, co oczywiście jest niemożliwe.

Wobec powyższego funkcja f jest postaci $f(x) = ax + b$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Czytelnik zechce wstawić otrzymaną postać funkcji do wyjściowego równania i przekonać się, że musi zachodzić $a = b = 1$. Oczywiście $f(x) = x + 1$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 32. (IMO Shortlist 2009 A3)
Dana jest taka funkcja $f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x, y liczby

$$x, \quad f(y), \quad f(y + f(x) - 1)$$

są długościami boków pewnego niezdegenerowanego trójkąta. Wykazać, że $f(1) = 1$.

Rozwiązanie:
Po podstawieniu $(1, y)$ na mocy nierówności trójkąta mamy

$$|f(y) - 1| < f(y + f(1) - 1) < f(y) + 1.$$

Ponadto oczywiście $f(y) \geqslant 1$, więc

$$f(y) - 1 < f(y + f(1) - 1) < f(y) + 1,$$

czyli $f(y) = f(y + f(1) - 1)$. Przypuśćmy teraz, że $f(1) \neq 1$. Wówczas funkcja f jest okresowa, czyli przyjmuje wartość największą, którą oznaczmy przez a. Wtedy dla $(2a + 1, y)$ mamy

$$f(y) + f(y + f(2a+1) - 1) \leqslant 2a < 2a + 1,$$

więc wbrew założeniu nie istnieje trójkąt o bokach długości $2a + 1$, $f(y)$, $f(y + f(2a + 1) - 1)$. Zatem $f(1) = 1$, co było do wykazania.

Analityczna teoria liczb

Patryk Rosół

Teoria

W całym skrypcie literą p będziemy oznaczać wyłącznie liczby pierwsze.

Twierdzenie (O liczbach pierwszych)

Niech $\pi(x)$ będzie liczbą liczb pierwszych nie większych od x. Wówczas

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Twierdzenie (Dirichleta o ciągach arytmetycznych)

Niech $\pi_{a,r}(x)$ będzie liczbą liczb pierwszych $p \leqslant x$, które spełniają $p \equiv r \pmod a$. Wtedy

$$\pi_{a,r}(x) \sim \frac{1}{\varphi(a)} \frac{x}{\ln x}.$$

Lemat 1 (Przydatne szacowania)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \infty \text{ dla } s \leqslant 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} < \infty \text{ dla } s > 1, \tag{a}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \frac{5}{3}, \tag{b}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\ln n), \tag{c}$$

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \ln \ln n + O(1), \tag{d}$$

$$\sum_{p} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2}. \tag{e}$$

Definicja (Gęstość asymptotyczna)

Niech $S \subseteq \mathbb{Z}_+$. *Gęstość asymptotyczną* zbioru S oznaczamy przez $d(S)$ i definiujemy jako granicę

$$d(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{|S \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}.$$

Powyższa granica może nie istnieć. Wówczas gęstość S nie jest zdefiniowana.

Zadania

Zadanie 1.
Dany jest zbiór $A \subseteq \mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że jeśli $d(A) > 0$, to

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = +\infty.$$

Zadanie 2.
Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Udowodnić, że niezależnie od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, które dzielą przynajmniej jeden wyraz ciągu

$$a_n = \lfloor \alpha p_n \rfloor.$$

Zadanie 3.
W nieskończonej tablicy dodatnich liczb całkowitych

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

każda liczba całkowita dodatnia występuje co najwyżej 2024 razy. Udowodnić, że dla pewnych m, n zachodzi nierówność $a_{m,n} > mn$.

Zadanie 4. (Taiwan IMC 2021)
Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b), dla których istnieje taki skończony podzbiór $S \subseteq \mathbb{Z}_+$, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$n = x^a + y^b + s$$

dla pewnych liczb całkowitych $x, y \geqslant 0$ oraz $s \in S$.

Zadanie 5. (Canadian MO 2020)
Niech $S = \{1, 4, 8, 9, 16, \ldots\}$ będzie zbiorem wszystkich potęg dodatnich liczb całkowitych o wykładniku większym niż 1. Szeregujemy elementy S w rosnący ciąg $(a_i)_{i\geqslant 1}$. Udowodnić, że jest nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że $9999 \mid a_{n+1} - a_n$.

Zadanie 6.
Dany jest ciąg dodatnich liczb całkowitych $(a_n)_{n\geqslant 1}$, spełniający $a_n < 9000n$. Dodatnią liczbę całkowitą a_i nazywamy *przyjazną*, jeżeli

$$a_i \mid \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}).$$

Rozstrzygnąć, czy każdy ciąg (a_n) o tych własnościach zawiera nieskończenie wiele liczb przyjaznych.

Zadanie 7. (Iranian MO 2020)
Liczby $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_+$ spełniają $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$. Rozważamy ciągi

$$x_n = an + b \qquad \text{oraz} \qquad y_n = cn + d.$$

Wykazać, że dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych n obie liczby x_n i y_n są bezkwadratowe.

Zadanie 8. (China TST 2015)
Udowodnić, że dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych n liczba $n^2 + 1$ jest bezkwadratowa.

Zadanie 9. (Brazilian MO 2020)
Dla ustalonej liczby całkowitej a niech ciąg $(f(a, n))_{n\geqslant 1}$ spełnia warunki

$$f(a, 1) = 1, \quad f(a, 2) = a \quad \text{oraz} \quad f(a, n) = f(a, n - 1) + f(a, n - 2)$$

dla $n \geqslant 3$. Liczbę k nazwiemy *fiboczyńską*, jeżeli istnieją takie liczby całkowite $a \geqslant 1$ oraz $n \geqslant 4$, że $f(a, n) = k$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb, które nie są *fiboczyńskie*.

Zadanie 10. (USAMO 2014 P6)
Udowodnić, że istnieje $c \in \mathbb{R}_+$ oraz $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ o następującej własności. Jeżeli a, b, c są takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $n \geqslant n_0$ oraz $\gcd(a + i, b + j) > 1$ dla wszystkich $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, to

$$\min\{a, b\} > c^n n^n.$$

Zadanie 11. (China TST 2017)
Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Niech D_n oznacza zbiór dodatnich dzielników n. Ponadto niech $f(n)$ będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą m o tej własności, że elementy D_n dają parami różne reszty z dzielenia przez m. Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że dla każdego $n \geqslant N$ zachodzi

$$f(n) \leqslant n^{1/100}.$$

Zadanie 12.
Udowodnić, że istnieją 2024 kolejne dodatnie liczby całkowite o tej własności, że żadne dwie z nich nie mają tej samej liczby dzielników.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Patryk Rosół*, Karol Musieliński.

Zadanie 1.
Dany jest zbiór $A \subseteq \mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że jeśli $d(A) > 0$, to

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = +\infty.$$

Rozwiązanie:
Wystarczy założyć, że

$$d_+(A) := \limsup_{n \to \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} > 0.$$

Niech $N_0 = 1$ oraz rozważmy taki ciąg liczb całkowitych $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$, że

$$N_k \geqslant \frac{4}{d_+(A)} N_{k-1} \quad \text{oraz} \quad |A \cap [1, N_k]| \geqslant \frac{d_+(A)}{2}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in A} \frac{1}{a} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a \in A \cap [N_{k-1}, N_k)} \frac{1}{a} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (|A \cap [1, N_k]| - N_{k-1}) \cdot \frac{1}{N_k} \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d_+(A)}{2} N_k - \frac{d_+(A)}{4} N_k \right) \cdot \frac{1}{N_k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_+(A)}{4} = +\infty,
\end{aligned}$$

co było do wykazania.

Zadanie 2.
Niech p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą. Udowodnić, że niezależnie od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, które dzielą przynajmniej jeden wyraz ciągu

$$a_n = \lfloor \alpha p_n \rfloor.$$

Rozwiązanie:
Teza jest oczywista dla $\alpha = 0$. Dalej bez straty ogólności załóżmy, że $\alpha > 0$. Niech S będzie zbiorem liczb pierwszych o tej własności. Przypuśćmy, że zbiór S jest skończony. Zauważmy, że różnych dodatnich wartości ciągu nieprzekraczających ustalonego N, jest co najmniej $\pi(N/\alpha)/C$, przy czym $C = \lfloor 1/\alpha \rfloor + 1$. Istotnie, jeśli $p_n \leqslant N/\alpha$, to $a_n = \lfloor \alpha p_n \rfloor \leqslant \alpha p_n \leqslant N$. Ponadto z równości $\lfloor \alpha p_n \rfloor = m$ wynika $m/\alpha \leqslant p_n < (m+1)/\alpha$, więc co najwyżej C różnym liczbom pierwszym może odpowiadać ta sama wartość wyrazu ciągu.

Z drugiej strony każda liczba a_n jest postaci

$$\prod_{p \in S} p^{v_p(a_n)},$$

a takich liczb nie większych od N jest co najwyżej

$$\prod_{p \in S} (\log_p(N) + 1) \leqslant (\log_2(N) + 1)^{|S|} = \log_2^{|S|}(2N).$$

Zauważmy, że z twierdzenia o liczbach pierwszych

$$\frac{\pi\left(N/\alpha\right)/C}{\log_2^{|S|}(2N)} = \frac{N/(\alpha C)}{\log_2^{|S|}(2N)\ln(N/\alpha)} = \Theta\left(\frac{N}{\log^{|S|+1}(N)} \right) \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty.$$

Jednak $\pi(N/\alpha)/C$ i $\log_2^{|S|}(2N)$ są odpowiednio ograniczeniem dolnym i górnym tej samej wielkości – liczby różnych dodatnich wartości ciągu nie większych od N. Wobec uzyskanej sprzeczności zbiór S nie może być skończony. To kończy dowód.

Zadanie 3.
W nieskończonej tablicy dodatnich liczb całkowitych

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

każda liczba całkowita dodatnia występuje co najwyżej 2024 razy. Udowodnić, że dla pewnych m, n zachodzi nierówność $a_{m,n} > mn$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że uporządkowanych par dodatnich liczb całkowitych, których iloczyn jest nie większy od N, jest dokładnie

$$\sum_{k=1}^{N} \lfloor N/k \rfloor ,$$

ponieważ po ustaleniu pierwszej liczby mamy dokładnie $\lfloor N/k \rfloor$ możliwości wyboru drugiego elementu. Z drugiej strony w tablicy jest co najwyżej $2024N$ elementów nie większych od N. Zauważmy, że

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} \lfloor N/k \rfloor}{2024N} \leqslant \frac{N\sum_{k=1}^{N} 1/k}{2024N} = \Theta\left(\frac{N \ln N}{2024N}\right) = \Theta(\ln N) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty.$$

Zatem dla pewnego dostatecznie dużego N musi istnieć taka para indeksów (m, n), że $a_{m,n} \geqslant N \geqslant mn$, co było do wykazania.

Zadanie 4. (Taiwan IMC 2021)
Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b), dla których istnieje taki skończony podzbiór $S \subseteq \mathbb{Z}_+$, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$n = x^a + y^b + s$$

dla pewnych liczb całkowitych $x, y \geqslant 0$ oraz $s \in S$.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że dla pewnej pary (a, b) istnieje taki skończony zbiór S oraz spełniona jest nierówność

$$1/a + 1/b < 1.$$

Niech Z_N będzie zbiorem takich $n \leqslant N$, które można zapisać w odpowiedniej postaci. Wówczas szacujemy

$$|Z_N| \leqslant |S|(N^{1/a} + 1)(N^{1/b} + 1).$$

Wówczas z założenia musimy mieć $Z_N = \{1, 2, \ldots, N\}$ dla każdego N, jednak

$$\frac{|\{1, 2, \ldots, N\}|}{|Z_N|} \geqslant \frac{N}{|S|(N^{1/a} + 1)(N^{1/b} + 1)} = \Theta(N^{1-1/a-1/b}) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty.$$

Wobec uzyskanej sprzeczności żadna taka para (a, b), że $1/a+1/b < 1$ nie spełnia warunków zadania. Pozostało sprawdzić pary postaci $(a, 1)$, $(1, b)$ i $(2, 2)$. Czytelnik zechce przekonać się, że pierwsze dwie spełniają warunki zadania niezależnie od wyboru a, b.

Rozważmy teraz parę $(2, 2)$. Dla wszystkich $s \in S$ dobierzmy różne liczby pierwsze $p_s \equiv 3 \pmod 4$ i rozważmy układ kongruencji

$$n \equiv p_s + s \pmod{p_s^2}.$$

Jeśli liczba n spełnia ten układ, to $n - s$ ma w rozkładzie na czynniki dzielnik pierwszy postaci $4k + 3$ w nieparzystej potędze. Zatem nie można przedstawić $n - s = x^2 + y^2$ dla żadnego wyboru x i y. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje nieskończenie wiele rozwiązań tego układu, zatem para $(2, 2)$ nie spełnia warunków zadania.

Zadanie 5. (Canadian MO 2020)
Niech $S = \{1, 4, 8, 9, 16, \ldots\}$ będzie zbiorem wszystkich potęg dodatnich liczb całkowitych o wykładniku większym niż 1. Szeregujemy elementy S w rosnący ciąg $(a_i)_{i\geqslant 1}$. Udowodnić, że jest nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n, że $9999 \mid a_{n+1} - a_n$.

Rozwiązanie:
Udowodnimy, że istnieje nieskończenie wiele takich n, że przedział

$$P_n = \left((9999n + 4999)^2\,, (9999n + 5000)^2\right).$$

jest rozłączny ze zbiorem S. Dla ustalonego n niech $k = 9999n + 4999$. Liczbę potęg o wykładnikach większych od 2, mniejszych niż $(k + 1)^2$ szacujemy z góry przez

$$(k + 1)^{2/3} + (k + 1)^{2/5} + \cdots + (k + 1)^{2/L} \leqslant L(k + 1)^{2/3},$$

przy czym $L = \log_2((k + 1)^2)$. Należą one do przedziałów P_1, P_2, …, P_n. Zauważmy, że

$$\frac{\#\text{przedziałów}}{\#\text{potęg}} = \frac{(k - 4999)/9999}{\log_2((k + 1)^2)\,(k + 1)^{2/3}} = \Theta\left(\frac{k^{1/3}}{\log k}\right).$$

Oczywiście powyższe wyrażenie dąży w granicy do nieskończoności. Zatem możemy wskazać nieskończenie wiele takich przedziałów P_i, do których nie należy żadna potęga o wykładniku co najmniej 3. Wówczas kolejne kwadraty na krańcach przedziału są kolejnymi elementami ciągu (a_n) i spełniają warunki zadania.

Zadanie 6.
Dany jest ciąg dodatnich liczb całkowitych $(a_n)_{n\geqslant 1}$, spełniający $a_n < 9000n$. Dodatnią liczbę całkowitą a_i nazywamy *przyjazną*, jeżeli

$$a_i \mid \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}).$$

Rozstrzygnąć, czy każdy ciąg (a_n) o tych własnościach zawiera nieskończenie wiele liczb przyjaznych.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że dla pewnego ciągu (a_n) można wskazać takie N, że dla żadnego $k > N$ liczba a_k nie jest przyjazna. Wówczas dla każdego $k > N$ istnieje taka liczba pierwsza p, że

$$v_p(a_k) > \max\{v_p(a_1), v_p(a_2), \ldots, v_p(a_{k-1})\}.$$

Zauważmy jednak, że ustalona liczba pierwsza p może spełniać ten warunek dla wyrazów o indeksach nie większych od k co najwyżej $\lfloor \log_p a_k \rfloor$ razy. Wówczas, korzystając z założenia, otrzymujemy szacowanie

$$k - N \leqslant \sum_{p<9000k} \lfloor \log_p a_k \rfloor \leqslant \sum_{p<9000k} \log_p(9000k).$$

Jednocześnie

$$\begin{aligned}\sum_{p<9000k} \log_p(9000k) &= \log_{10}(9000k) \left(\sum_{p<9000k} \frac{1}{\log_{10} p}\right)\\ &= \log_{10}(9000k) \left(+ \sum_{p\leqslant\sqrt{9000k}} \frac{1}{\log_{10} p} + \sum_{\sqrt{9000k}\leqslant p<9000k} \frac{1}{\log_{10} p}\right)\\ &< \log_{10}(9000k) \left(\frac{\sqrt{9000k}}{\log_{10} 2} + \frac{\pi(9000k)}{\log_{10} \sqrt{9000k}}\right)\\ &= \Theta\left(\frac{k}{\log_{10} k}\right).\end{aligned}$$

Zatem $\Theta(k) = k - N \leqslant \Theta(k/\log_{10} k)$. Wobec uzyskanej sprzeczności ciąg (a_n) musi zawierać nieskończenie wiele liczb przyjaznych.

Zadanie 7. (Iranian MO 2020)
Liczby $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_+$ spełniają $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$. Rozważamy ciągi

$$x_n = an + b \qquad \text{oraz} \qquad y_n = cn + d.$$

Wykazać, że dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych n obie liczby x_n i y_n są bezkwadratowe.

Rozwiązanie:
Niech

$$A_N = \{\, 1 \leqslant n \leqslant N \mid x_n \text{ lub } y_n \text{ nie jest bezkwadratowa} \,\}.$$

Ustalmy liczbę pierwszą p i niech $A_{N,p}$ będzie zbiorem tych $n \leqslant N$, dla których $p^2 \mid x_n$ lub $p^2 \mid y_n$. Jeśli $p \mid a$, to z warunku $\gcd(a, b) = 1$ wynika, że $p \nmid x_n$ dla każdego n. Jeśli zaś $p \nmid a$, to kongruencja

$$an + b \equiv 0 \pmod{p^2}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie modulo p^2, więc zachodzi ona dla co najwyżej $N/p^2 + 1$ wartości $n \leqslant N$. Analogicznie dla ciągu (y_n). Wobec tego

$$|A_{N,p}| \leqslant \frac{2N}{p^2} + 2.$$

Niech $M = \max\{a, c\}$ i $L = \max\{b, d\}$. Jeśli $n \leqslant N$ oraz jedna z liczb x_n, y_n nie jest bezkwadratowa, to istnieje taka liczba pierwsza $p \leqslant \sqrt{MN + L}$, że $n \in A_{N,p}$. Stąd

$$\begin{aligned} |A_N| &\leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{MN+L}} |A_{N,p}| \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{MN+L}} \left(\frac{2N}{p^2} + 2 \right) \\ &\leqslant 2N \sum_{p} \frac{1}{p^2} + 2\pi(\sqrt{MN + L}). \end{aligned}$$

Korzystamy teraz z oszacowań danych przez Lemat 1. Niech $\varepsilon > 0$ będzie taki, że $\sum_p 1/p^2 = 1 - \varepsilon$. Wówczas dla dostatecznie dużych N mamy $\pi(\sqrt{MN + L}) \leqslant \varepsilon N/4$, więc

$$|A_N| \leqslant (1 - \varepsilon)N + \varepsilon N/2 \leqslant (1 - \varepsilon/2)N.$$

Stąd muszą istnieć dowolnie duże n, dla których żadna z liczb x_n, y_n nie jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej, co było do wykazania.

Zadanie 8. (China TST 2015)
Udowodnić, że dla nieskończenie wielu dodatnich liczb całkowitych n liczba $n^2 + 1$ jest bezkwadratowa.

Rozwiązanie:
Niech $f(m)$ oznacza liczbę takich $n \leqslant m$, że $n^2 + 1$ jest bezkwadratowa, a $f_p(m)$ oznacza liczbę takich $n \leqslant m$, że $p^2 \mid n^2 + 1$ dla ustalonej liczby pierwszej p. Zauważmy, że $f_2(m) = 0$. Ponadto dla $p \geqslant 3$ z podzielności $p^2 \mid n^2 + 1$, wynika $n \equiv \pm 1 \pmod{p^2}$, stąd $f_p(m) \leqslant 2(m/p^2 + 1)$. Wówczas

$$\begin{aligned} f(m) &\geqslant m - \sum_{2<p<m} f_p(m) \geqslant m - \sum_{2<p<m} \left(2 + \frac{2m}{p^2} \right) \\ &\geqslant m - 2\pi(m) - 2m \left(\sum_{2<p<m} \frac{1}{p^2} \right) \\ &= m - 2\pi(m) - 2m \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \right) \\ &> \frac{m}{6} - 2\pi(m). \end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia o liczbach pierwszych, różnica $m/6 - 2\pi(m)$ dąży do $+\infty$ przy $m \to \infty$, co pociąga za sobą tezę zadania.

Zadanie 9. (Brazilian MO 2020)
Dla ustalonej liczby całkowitej a niech ciąg $(f(a,n))_{n\geqslant 1}$ spełnia warunki

$$f(a,1)=1, \quad f(a,2)=a \quad \text{oraz} \quad f(a,n)=f(a,n-1)+f(a,n-2)$$

dla $n \geqslant 3$. Liczbę k nazwiemy *fiboczyńską*, jeżeli istnieją takie liczby całkowite $a \geqslant 1$ oraz $n \geqslant 4$, że $f(a,n)=k$. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb, które nie są *fiboczyńskie.*

Rozwiązanie:
Indukcyjnie sprawdzamy, że

$$f(a,n)=af(1,n-1)+f(1,n-2)=aF_{n-1}+F_{n-2},$$

przy czym F_n oznacza n-tą liczbę Fibonacciego. Zatem zbiór liczb fibończyńskich to

$$A=\bigcup_{n=4}^{\infty}\{F_{n-1}a+F_{n-2} \mid a\in\mathbb{Z}_+\}.$$

Chcemy oszacować liczbę liczb fiboczyńskich nie większych od N. Dla $n=4$ dostajemy liczby fiboczyńskie $f(a,4)=2a+1$, których jest co najwyżej $N/2+1$. Dla $n>4$, jeśli liczba F_{n-1} jest parzysta, to F_{n-2} jest nieparzysta (ponieważ kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze), zatem każda z liczb $f(a,n)$ jest nieparzysta, czyli została już policzona. Jeśli jednak liczba F_{n-1} jest nieparzysta, to co druga liczba $f(a,n)$ jest nieparzysta, więc nowych liczb fiboczyńskich dostajemy co najwyżej $N/(2F_{n-1})+1$. To pozwala oszacować liczbę liczb fiboczyńskich nie większych od N z góry

$$|A\cap\{1,\dots,N\}|\leqslant\left(\frac{N}{2}+1\right)+\sum_{n\geqslant 4}\left(\frac{N}{2F_n}+1\right)=\frac{N}{2}\left(1+\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{F_n}\right)+O(\ln N).$$

Ponadto dla $n\geqslant 4$ zachodzi $F_n>\varphi^{n-2}$, przy czym $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$. Zatem

$$\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{F_n}<\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\varphi^n}=\frac{1/\varphi^2}{1-1/\varphi}=\frac{1}{\varphi^2-\varphi}=1.$$

Ponieważ powyższa nierówność jest ostra, istnieje taka stała $\varepsilon>0$, że

$$|A\cap\{1,\dots,N\}|\leqslant(1-\varepsilon)N+O(\ln N).$$

Stąd istnieją dowolnie duże liczby, które nie są fiboczyńskie.

Zadanie 10. (USAMO 2014 P6)
Udowodnić, że istnieje $c\in\mathbb{R}_+$ oraz $n_0\in\mathbb{Z}_+$ o następującej własności. Jeżeli a, b, c są takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $n\geqslant n_0$ oraz $\gcd(a+i,b+j)>1$ dla wszystkich $i,j\in\{0,1,\dots,n\}$, to

$$\min\{a,b\}>c^n n^n.$$

Rozwiązanie:
Niech $N=n+1$. Rozważmy tablicę $N\times N$, gdzie w komórce odpowiadającej parze $(i,j)\in\{0,\dots,n\}^2$ wpisano pewną liczbę pierwszą p_{ij} dzielącą $\gcd(a+i,b+j)$.

Z Lematu 1 wiemy, że

$$\sigma:=\sum_p\frac{1}{p^2}<\frac{1}{2},$$

więc istnieje taka stała $\delta>0$, że $\sigma+\delta<1/2$. Niech $X=\delta n^2$ i niech T będzie liczbą komórek tablicy, w których znajdują się liczby pierwsze $p\leqslant X$. Dla ustalonej liczby pierwszej p wśród liczb a, $a+1$, …, $a+n$ co najwyżej $\lceil N/p\rceil$ jest podzielnych przez p, analogicznie dla liczb b, $b+1$, …, $b+n$. Zatem ustalone p może pojawić się w co najwyżej $\lceil N/p\rceil^2$ komórkach.

Wobec tego

$$T \leqslant \sum_{p \leqslant X} \left\lceil \frac{N}{p} \right\rceil^2 \leqslant \sum_{p \leqslant X} \left(\frac{N}{p} + 1 \right)^2 = N^2 \sum_{p \leqslant X} \frac{1}{p^2} + 2N \sum_{p \leqslant X} \frac{1}{p} + \pi(X).$$

Na mocy Lematu 1 mamy wówczas

$$T \leqslant \sigma N^2 + O(N \ln \ln X) + \pi(X).$$

Ponadto $\pi(X) \leqslant X = \delta n^2 < \delta N^2$, więc

$$T \leqslant (\sigma + \delta) N^2 + o(N^2) < N^2/2$$

dla dostatecznie dużych n. Wówczas ponad połowa komórek tablicy ma wpisaną liczbę pierwszą większą od X. Wobec tego istnieje takie i, że i-ty wiersz zawiera więcej niż $N/2$ takich komórek. Zauważmy, że wpisane w te komórki liczby pierwsze są parami różne. Istotnie, gdyby ta sama liczba pierwsza $p > X > n$ wystąpiła w kolumnach $j_1 \neq j_2$, to dzieliłaby różnicę $(b + j_1) - (b + j_2) = j_1 - j_2$, co jest niemożliwe, ponieważ $|j_1 - j_2| \leqslant n < p$. Każda z tych liczb jest dzielnikiem $a + i$, więc

$$a + i \geqslant X^{N/2}$$

i analogicznie otrzymujemy $b + j \geqslant X^{N/2}$ dla pewnego j. Stąd

$$\min\{a, b\} \geqslant X^{N/2} - n = \delta^{(n+1)/2} n^{n+1} - n.$$

Dla dostatecznie dużych n prawa strona powyższej równości jest większa od $c^n n^n$ dla $c = \sqrt{\delta}$, co kończy dowód.

Zadanie 11. (China TST 2017)
Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Niech D_n oznacza zbiór dodatnich dzielników n. Ponadto niech $f(n)$ będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą m o tej własności, że elementy D_n dają parami różne reszty z dzielenia przez m. Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N, że dla każdego $n \geqslant N$ zachodzi

$$f(n) \leqslant n^{1/100}.$$

Rozwiązanie:
Niech $\tau(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m. W rozwiązaniu wykorzystamy następujący znany fakt[2]. Dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi $\tau(m)/m^\varepsilon \to 0$ przy $m \to \infty$.

Niech $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ będą dzielnikami n. Zauważmy, że

$$f(n) \leqslant 1 + \sum_{i<j} \tau(d_j - d_i).$$

Istotnie, jeśli reszty elementów D_n nie są różne, to m jest dzielnikiem pewnej różnicy $d_i - d_j$. Zatem suma powyżej ogranicza z góry liczbę złych modulników.

Niech $\varepsilon = 1/400$. Na mocy przytoczonego faktu istnieje taka liczba całkowita M, że dla każdego $t \geqslant M$ zachodzi $\tau(t) < t^\varepsilon$. Niech

$$C = \max\{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(M-1)\}.$$

Wówczas dla każdego $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $\tau(t) \leqslant \max\{C, n^\varepsilon\}$. Istotnie, gdy $t < M$, to $\tau(t) \leqslant C$, a gdy $t \geqslant M$, to $\tau(t) < t^\varepsilon \leqslant n^\varepsilon$. Wobec tego

$$\sum_{i<j} \tau(d_j - d_i) \leqslant \binom{\tau(n)}{2} \max\{C, n^\varepsilon\} < \tau(n)^2 \max\{C, n^\varepsilon\}.$$

Dla dostatecznie dużych n oczywiście $n^\varepsilon > C$. Stąd i ponownie z przytoczonego faktu prawa strona powyższej równości jest mniejsza od $n^{3\varepsilon}$ dla dostatecznie dużych n. To kończy dowód.

[2]Apostol T., *Introduction to Analytic Number Theory*, Exercise 13.13

Zadanie 12.
Udowodnić, że istnieją 2024 kolejne dodatnie liczby całkowite o tej własności, że żadne dwie z nich nie mają tej samej liczby dzielników.

Rozwiązanie:
Niech K będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że

$$\sum_p \frac{1}{p^K} < \frac{1}{2024^2}.$$

Jest to możliwe, ponieważ $\sum_p p^{-s} \leqslant \zeta(s) - 1 < +\infty$ dla $s > 1$, przy czym ζ to funkcja dzeta Riemanna. Ponadto $\zeta(s) \to 1$ przy $s \to \infty$. Teraz ustalmy parami różne liczby pierwsze $q_1, \ldots, q_{2024} > K + 1$. Niech $\tau(k)$ oznacza liczbę dzielników liczby k. Chcemy dobrać takie n, że $q_i \mid \tau(n + j)$ dla $i, j \in \{1, \ldots, 2024\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = j$. Wówczas liczby $n + 1, \ldots n + 2024$ będą spełniać warunki zadania.

Niech p_1, p_2, …, p_{2024} będą kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2024. Rozważmy układ kongruencji

$$n + i \equiv p_i^{q_i - 1} \pmod{p_i^{q_i}}$$

dla $i \in \{1, \ldots, 2024\}$. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieją takie A i B, że liczba n spełnia ten układ kongruencji, jeśli tylko $n \equiv A \pmod{B}$. Zauważmy, że wówczas $v_{p_i}(n + i) = q_i - 1$, skąd $q_i \mid \tau(n + i)$ po zastosowaniu wzoru na liczbę dzielników.

Załóżmy teraz, że $q_i \mid \tau(n+j)$ i $i \neq j$. Wówczas dla pewnej liczby pierwszej p zachodzi podzielność $p^{q_i-1} \mid n+j$. Jednocześnie

$$n + j \equiv p_i^{q_i-1} + j - i \equiv j - i \not\equiv 0 \pmod{p_i},$$

ponieważ $|j - i| \leqslant 2023 < p_i$. Zatem $p \notin \{p_1, \ldots, p_{2024}\}$, czyli $p \perp B$. Wówczas dla ustalonych $i \neq j$ względna gęstość liczb $n = A + tB$ spełniających

$$p^{\,q_i-1} \mid n + j$$

jest równa dokładnie $1/p^{q_i-1}$. Nazwijmy liczbę n tej postaci *złą*, jeśli spełnia powyższy warunek dla pewnych $i \neq j$. Względną gęstość liczb złych możemy oszacować z góry przez

$$\sum_{i=1}^{2024} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant 2024 \\ j \neq i}} \sum_{p \notin \{p_1, \ldots, p_{2024}\}} \frac{1}{p^{\,q_i-1}} \leqslant 2024^2 \sum_p \frac{1}{p^K} < 1.$$

Wobec tego w rozważanym postępie arytmetycznym istnieje liczba n, która nie jest zła. To kończy dowód.

Wielomiany cyklotomiczne

Łukasz Próchniak i Antoni Łuczak

Na potrzeby niniejszego skryptu wprowadza się następujące oznaczenia i konwencje, które będą stosowane w dalszej części opracowania. Zmienne a, b, d, k, n, oznaczają dodatnie liczby całkowite, a zmienna p oznacza liczbę pierwszą, chyba że z kontekstu wynika inaczej

Podstawowe własności

Definicja (Pierwiastek n-tego stopnia z jedności)

Oznaczmy przez $\omega = \omega_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n) = e^{2\pi/n}$ *pierwiastek n-tego stopnia z jedności* o najmniejszym dodatnim argumencie.

Zauważmy, że ω, ω^2, ..., ω^n są pierwiastkami równania $X^n - 1 = 0$, więc z zasadniczego twierdzenia algebry są to wszystkie pierwiastki tego wielomianu.

Definicja (Pierwiastek pierwotny n-tego stopnia z jedności)

Pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności nazywamy takie ω_n^k, że liczby n i k są względnie pierwsze, czyli $k \perp n$.

Definicja (Wielomian cyklotomiczny)

Wielomian
$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\perp n}} (X - \omega_n^k)$$
nazywamy *n-tym wielomianem cyklotomicznym*.

W niektórych źródłach można znaleźć nazwę *wielomiany podziału koła*[3].

Definicja ta może wydawać się bezużyteczna. Okazuje się jednak, że wielomiany cyklotomiczne są ściśle związane z wielomianami postaci $X^n - 1$, o czym mówi następujący lemat.

Lemat 1

Zachodzi równość
$$X^n - 1 = \prod_{d\mid n} \Phi_d(X),$$
przy czym iloczyn przebiega po wszystkich dodatnich dzielnikach d liczby n.

Dowód. Możemy tutaj szukać analogii do znanej tożsamości $\sum_{d\mid n}\varphi(d) = n$, i słusznie. Jak już wcześniej wspomnieliśmy,
$$X^n - 1 = (X-\omega)(X-\omega^2)\cdots(X-\omega^n).$$
Pogrupujmy pierwiastki tego wielomianu. Zauważmy, że $\omega_n^k = \omega_{n/d}^{k/d}$ jest również pierwiastkiem wielomianu $\Phi_{n/d}$, przy czym $d = \gcd(n,k)$. Ponadto, jeśli $d \mid n$, to $\omega_d^k = \omega_n^{kn/d}$ jest oczywiście pierwiastkiem wielomianu Φ_n. Wobec tego
$$X^n - 1 = \prod_{d\mid n} \Phi_{n/d}(X) = \prod_{d\mid n}\Phi_d(X).$$
□

Warto zauważyć, że wspomnianą równość $\sum_{d\mid n}\varphi(d) = n$ natychmiast otrzymujemy, porównując najwyższe stopnie w wielomianach w powyższym lemacie.

[3] Bzdęga B., *Wielomiany podziału koła – część 1*, *Delta* 01/2024

Aby oswoić się z notacją, podamy kilka początkowych wielomianów cyklotymicznych. Dla $n = 1$ otrzymujemy $\Phi_1 = X - 1$. Dla $n = 2$ otrzymujemy $\Phi_2 = X + 1$. Ogólniej, dla każdej liczby pierwszej p mamy

$$\Phi_p = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1.$$

Dla $n = 4, 6, 8, 10$ dostajemy kolejno

$$\begin{aligned}
\Phi_4 &= \frac{X^4 - 1}{\Phi_2\Phi_1} = \frac{X^4 - 1}{(X+1)(X-1)} = X^2 + 1, \\
\Phi_6 &= \frac{X^6 - 1}{\Phi_3\Phi_2\Phi_1} = \frac{X^6 - 1}{(X^2+X+1)(X+1)(X-1)} = X^2 - X + 1, \\
\Phi_8 &= \frac{X^8 - 1}{\Phi_4\Phi_2\Phi_1} = \frac{X^8 - 1}{(X^2+1)(X+1)(X-1)} = X^4 + 1, \\
\Phi_{10} &= \frac{X^{10} - 1}{\Phi_5\Phi_2\Phi_1} = \frac{X^{10} - 1}{(X^4+X^3+X^2+X+1)(X+1)(X-1)} = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1.
\end{aligned}$$

Wprowadzimy pojęcie funkcji Möbiusa, która pozwoli wprowadzić nam nową definicję wielomianu cyklotomicznego Φ_n.

Definicja (Funkcja Möbiusa)

Funkcja Möbiusa $\mu : \mathbb{Z}_+ \to \{-1, 0, 1\}$ jest zdefiniowana następująco

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\Omega(n)}, & \text{jeśli } n \text{ jest liczbą bezkwadratową}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach}, \end{cases}$$

przy czym dla $\Omega(n)$ jest liczbą dzielników pierwszych n.

Ćwiczenie 1.
Wykazać, że funkcja μ jest funkcją multiplikatywną, czyli jeśli liczby a i b są względnie pierwsze, to $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$.

Twierdzenie (Inwersja Möbiusa)

Niech $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ będzie funkcją arytmetyczną. Rozważmy

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \qquad H(n) = \prod_{d|n} f(d).$$

Wówczas

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \prod_{d|n} H\left(\frac{n}{d}\right)^{\mu(d)}.$$

Po dowód powyższego twierdzenia Czytelnik zechce zajrzeć na stronę 289. Natychmiastową konsekwencją inwersji Möbiusa jest następujący lemat.

Lemat 2

Wielomiany cyklotomiczne spełniają równości

$$\Phi_n(X) = \prod_{d|n} (X^{n/d} - 1)^{\mu(d)}.$$

Dociekliwy Czytelnik może po wypisaniu kilku przykładów podejrzewać, że współczynniki Φ_n są całkowite. Rzeczywiście tak jest. Aby tego dowieść wprowadźmy najpierw całkiem przydatny lemat.

Lemat 3 (Gaussa)

Niech

$$f(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1X + a_0 \quad \text{oraz} \quad g(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$$

będą wielomianami o współczynnikach wymiernych. Jeśli $h := fg$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, to każdy z wielomianów f i g także ma całkowite współczynniki.

Dowód. Niech M i N będą najmniejszymi takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że wielomiany Mf oraz Ng mają wszystkie współczynniki całkowite. Wystarczy pokazać, że $MN = 1$. Niech $A_i = Ma_i$ dla $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ oraz $A_m = M$. Zauważmy, że skoro wielomian h ma współczynniki całkowite, to wielomian $(MN)h$ ma wszystkie współczynniki podzielne przez MN.

Przypuśćmy, że $MN > 1$ i weźmy dowolny dzielnik pierwszy p liczby MN. Wtedy istnieje taka liczba A_i, że $p \nmid A_i$. Istotnie, jeśli $p \nmid M$, to $p \nmid A_m$. Jeśli jednak $p \mid M$, to gdyby dla każdego i zachodziła podzielność $p \mid A_i$, to $A_i/p = (M/p)a_i \in \mathbb{Z}$. Oznacza to, że wbrew minimalności M zamiast M moglibyśmy wziąć M/p. Analogicznie istnieje takie B_j, że $p \nmid B_j$. Weźmy największe liczby A_i oraz B_j o tych własnościach. Rozpatrzmy współczynnik przy X^{i+j} w wielomianie h

$$[X^{i+j}] = \cdots + A_{i+1}B_{j-1} + A_iB_j + A_{i-1}B_{j+1} + \cdots \equiv A_iB_j \pmod{p}.$$

Stąd współczynnik przy X^{i+j} nie jest podzielny przez p. Wobec uzyskanej sprzeczności musi zachodzić $MN = 1$. □

Lemat 4

Współczynniki wielomianu Φ_n są liczbami całkowitymi.

Dowód. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Teza zachodzi dla $n = 1$, ponieważ $\Phi_1 = X - 1$. Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla wszystkich $k < n$. Wtedy z Lematu 1 mamy

$$\Phi_n(X) = \frac{X^n - 1}{\prod_{d|n, d\neq n} \Phi_d(X)}.$$

Zatem współczynniki Φ_n są wymierne, a z lematu Gaussa całkowite. □

Lemat 5

Dla $x \geqslant 1$ zachodzą nierówności

$$(x-1)^{\varphi(n)} \leqslant |\Phi_n(x)| \leqslant (x+1)^{\varphi(n)},$$

przy czym nierówność po lewej stronie jest ostra dla $n \geqslant 2$, a po prawej – dla $n \geqslant 3$. W szczególności dla $n \geqslant 2$ i $x \geqslant 2$ zachodzi $\Phi_n(x) > 1$.

Dowód. Dla $n \in \{1, 2\}$ mamy $\Phi_1 = X - 1$ oraz $\Phi_2 = X + 1$. Dalej załóżmy, że $n > 2$. Niech $\omega_n^k \notin \{\pm 1\}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym Φ_n. Wówczas z nierówności trójkąta zachodzi

$$X - 1 = |X - |\omega_n^k|| < |X - \omega_n^k| < |X| + |\omega_n^k| = X + 1.$$

Po wymnożeniu analogicznych nierówności dla wszystkich pierwiastków pierwotnych otrzymujemy tezę. □

Zadania cz. I

Zadanie 2.
Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że liczba $n^{10} + n^5 + 1$ jest pierwsza.

Zadanie 3.
Niech $a > 1$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że jeśli

$$a^{(k-1)n} + \cdots + a^{2n} + a^n + 1$$

jest liczbą pierwszą, to k jest liczbą pierwszą oraz $n = k^s$ dla pewnego całkowitego s.

Zadanie 4.
Niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby $2^{n!}-1$. Udowodnić, że $p^{H_n} \leqslant 3^{n!}$, przy czym $H_n = 1+1/2+\cdots+1/n$.

Zadanie 5.
Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych a, że każdy dzielnik pierwszy liczby a^2+a+1 jest mniejszy od $\sqrt{a}$.

Więcej własności wielomianów cyklotomicznych

Lemat 6

Niech p będzie liczbą pierwszą. Wówczas

$$\Phi_{pn}(X) = \begin{cases} \Phi_n(X^p), & \text{gdy } p \mid n, \\ \Phi_n(X^p)/\Phi_n(X), & \text{gdy } p \nmid n. \end{cases}$$

Dowód. Załóżmy, że $p \mid n$. Wtedy na mocy Lematu 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Phi_{pn}(X) &= \prod_{d \mid pn} (X^{n/d}-1)^{\mu(d)} = \\ &= \left(\prod_{d \mid n} (X^{pn/d}-1)^{\mu(d)}\right)\left(\prod_{\substack{d \mid pn \\ d \nmid n}} (X^{n/d}-1)^{\mu(d)}\right) = \\ &= \Phi_n(X^p) \prod_{\substack{d \mid pn \\ d \nmid n}} (X^{n/d}-1)^{\mu(d)}. \end{aligned}$$

Ponadto jeśli $d \mid pn$ oraz $d \nmid n$, to $p^2 \mid d$, czyli $\mu(d) = 0$. Wówczas ostatni iloczyn jest równy 1 i istotnie $\Phi_{pn}(X) = \Phi_n(X^p)$.

Niech teraz $p \nmid n$. Wówczas

$$\Phi_{pn}(X) = \left(\prod_{d \mid n} (X^{pn/d}-1)^{\mu(d)}\right)\left(\prod_{d \mid n} (X^{pn/pd}-1)^{\mu(pd)}\right) = \frac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)}.$$

□

Powyższy lemat możemy stosować wielokrotnie, co daje tożsamość

$$\Phi_{p^k n}(X) = \begin{cases} \Phi_n(X^{p^k}), & \text{gdy } \ p \mid n, \\ \Phi_n(X^{p^k})/\Phi_n(X^{p^{k-1}}), & \text{gdy } \ p \nmid n. \end{cases}$$

Ćwiczenie 6.
Udowodnić, że jeśli każdy dzielnik pierwszy liczby t jest też dzielnikiem pierwszym liczby m, to

$$\Phi_{mt}(X) = \Phi_m(X^t).$$

Ćwiczenie 7.
Udowodnić, że jeśli $n \equiv 2 \pmod 4$ oraz $n > 2$, to $\Phi_n(X) = \Phi_{n/2}(-X)$.

Lemat 7

Dla każdych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych a, n zachodzi

$$\Phi_n(x^a) = \prod_{d \mid a} \Phi_{nd}(x).$$

Dowód. Bez trudu sprawdzamy, że stopnie wielomianów po obu stronach się zgadzają. Wystarczy zatem pokazać, że każdy pierwiastek wielomianu po prawej stronie jest również pierwiastkiem wielomianu po lewej stronie. Każdy pierwiastek wielomianu z prawej strony jest postaci $x = \omega_{nd}^k$, przy czym $d \mid a$ oraz $\gcd(k, nd) = 1$. Wówczas $x^a = \omega_{nd}^{ka} = \omega_n^{ka/d}$ oraz

$$\gcd(ka/d, n) = \gcd(k, n) = 1,$$

więc x^a jest pierwiastkiem wielomianu $\Phi_n(x)$. To kończy dowód. □

Lemat 8

Niech $p \neq q$ będą liczbami pierwszymi. Wówczas współczynniki Φ_{pq} należą do zbioru $\{1, 0, -1\}$.

Dowód. Na mocy Lematu 8 oraz Lematu 1 mamy

$$\Phi_q(X^p)\Phi_p(X^q)(X-1) = \Phi_{pq}(X)^2\Phi_p(X)\Phi_q(X)\Phi_1(X) = (X^{pq}-1)\Phi_{pq}(X).$$

Zauważmy, że

$$\Phi_p(X^q)\Phi_q(X^p) = (X^{(p-1)q} + \cdots + X^q + 1)(X^{(q-1)p} + \cdots + X^p + 1) = \sum_{\substack{0\leqslant m<q \\ 0\leqslant n<p}} X^{mp+nq}.$$

Załóżmy, że dla pewnych $(m, n) \neq (m', n')$ zachodzi $mp + nq = m'p + n'q$. Wtedy $p(m - m') = q(n' - n)$, co jest niemożliwe ponieważ $|n - n'| < p$. Wobec tego współczynniki wielomianu $\Phi_p(X^q)\Phi_q(X^p)$ należą do zbioru $\{0, 1\}$.

Stąd współczynniki wielomianu $(X^{pq} - 1)\Phi_{pq} = \Phi_q(X^p)\Phi_p(X^q)(X - 1)$ należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Ponieważ stopień wielomianu Φ_{pq} jest równy

$$\varphi(pq) = (p - 1)(q - 1) < pq,$$

współczynniki tego wielomianu także należą do zbioru $\{-1, 0, 1\}$, co było do wykazania. □

Dzielniki pierwsze $\Phi_n(a)$

Definicja (Wykładnik p-adyczny)

Niech p będzie liczbą pierwszą. *Wykładnikiem p-adycznym* liczby n nazywamy największą taką liczbę całkowitą s, że $p^s \mid n$. Wówczas piszemy $v_p(n) = s$.

Twierdzenie (Lemat o zwiększaniu wykładnika/Lemat LTE)

Niech p będzie liczbą pierwszą, n dodatnią liczbą całkowite. Jeśli liczby a i b są niepodzielne przez p oraz $p \mid a - b$, to prawdziwa jest jedna z poniższych równości.

(1) Jeśli $p \neq 2$, to
$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n).$$

(2) Jeśli $p = 2$ oraz $4 \mid a - b$, to
$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b) + v_2(n).$$

(3) Jeśli $p = 2$ oraz $4 \nmid a - b$, to
$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b) + v_2(a + b) + v_2(n) - 1.$$

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w źródle[4].

Definicja (Rząd a modulo n)

Niech liczby a oraz n będą względnie pierwsze. *Rzędem* liczby a modulo n nazywamy najmniejszą taką dodatnią liczbę całkowitą r, że $a^r \equiv 1 \pmod{n}$. Piszemy wówczas $\operatorname{ord}_n(a) = r$.

[4] Bzdęga B., *Lemat o zwiększaniu wykładnika p-adycznego*, *Delta* 12/2020

Załóżmy, że $p \mid \Phi_n(a)$ oraz $\Phi_n(a) \mid a^n - 1$. Wtedy $r := \mathrm{ord}_p(a) \mid n$. Zapiszmy $n = rmp^k$, przy czym $p \nmid m$. Dla $p > 2$ otrzymujemy

$$v_p(a^r - 1) + k = v_p(a^n - 1) = \sum_{D \mid n} v_p(\Phi_D(a)) = \sum_{d \mid m} \sum_{j=0}^{k} v_p(\Phi_{rdp^j}(a)).$$

Trzecia równość wynika z tego, że jeśli $v_p(\Phi_D(a))$ jest niezerowe, to $p \mid \Phi_D(a)$, więc także $p \mid a^D - 1$ – stąd $r \mid D$. Z powyższej równości wynikają następujące własności.

(i) Jeśli $n = r$, to $v_p(\Phi_n(a)) = v_p(a^r - 1) \geqslant 1$,

(ii) Jeśli $n = rp^k$ dla $k > 0$, to $v_p(\Phi_n(a)) = 1$,

(iii) Jeśli $n = rmp^k$ dla $k > 0$, $m > 1$, to $v_p(\Phi_n(a)) = 0$.

Pierwsza implikacja jest tu oczywista. Drugą otrzymujemy, rozumując indukcyjnie względem k. Natomiast trzecia jest konsekwencją drugiej. Analogiczny dowód przeprowadzamy dla $p = 2$ i $n \geqslant 3$.

Możemy teraz wprowadzić następującą klasyfikację dzielników liczby $\Phi_n(a)$.

Definicja (Dzielnik trywialny)

Dzielnikiem trywialnym liczby $\Phi_n(a)$ nazywamy taką liczbę pierwszą $p \mid \Phi_n(a)$, że $n = rp^k$ i $k \geqslant 1$.

Definicja (Dzielnik nietrywialny)

Dzielnikiem nietrywialnym liczby $\Phi_n(a)$ nazywamy taką liczbę pierwszą p, że $n = \mathrm{ord}_p(a)$.

Zauważmy, że $\Phi_n(a)$ ma co najwyżej jeden dzielnik trywialny. Jest tak ponieważ z małego twierdzenia Fermata mamy $p \mid a^{p-1} - 1$, więc $r \mid p - 1$, czyli $r < p$.

Pokażemy teraz, że niemal zawsze istnieje dzielnik nietrywialny. Niech p będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby n. Wystarczy pokazać, że $\Phi_n(a) > p$. Istotnie, gdyby dzielnik p był trywialny, to z równości $v_p(\Phi_n(a)) = 1$ istniałby inny dzielnik pierwszy – nietrywialny. Niech $n = mp$. Wówczas na mocy Lematu 5 i Lematu 6 mamy

$$\Phi_n(a) \geqslant \frac{\Phi_m(a^p)}{\max\{1, \Phi_m(a)\}} \geqslant \frac{(a^p - 1)^{\varphi(m)}}{(a+1)^{\varphi(m)}} \geqslant \frac{a^p - 1}{a + 1} \geqslant \frac{2^p - 1}{3}.$$

Jest oczywiste, że $\frac{2^p-1}{3} > p$ dla $p > 3$. Natomiast jeśli $p = 2$, to $n = 2^k = 2t$, więc

$$\Phi_n(a) = \Phi_2(a^t) = a^t + 1 > 2,$$

jeśli tylko $a \geqslant 2$. Dla $p = 3$ zachodzi jeden z poniższych przypadków.

(i) Jeśli $n = 3^k = 3t$, to mamy
$$\Phi_n(a) = \Phi_3(a^t) = a^{2t} + a^t + 1 > 3.$$

(ii) Jeśli $n = 2^{k_1}3^{k_2} = 6t$, to mamy
$$\Phi_n(a) = \Phi_6(a^t) = a^{2t} - a^t + 1,$$
co jest większe od 3, gdy $a > 2$ lub $t > 1$. Jeśli $a = 2$ oraz $t = 1$, to $\Phi_6(2) = 3$ i nie ma poszukiwanego dzielnika nietrywialnego.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie (O nietrywialnych dzielnikach pierwszych)

Jeśli $n \geqslant 3$, $a \geqslant 2$ oraz $(a, n) \neq (2, 6)$, to liczba $\Phi_n(a)$ ma nietrywialny dzielnik pierwszy p, czyli istnieje takie $p \mid \Phi_n(a)$, że $\mathrm{ord}_p(a) = n$.

Wspomnimy jeszcze o twierdzeniu które może się przydać przy rozwiązywaniu zadań.

Twierdzenie (O dzielnikach wielomianów cyklotomicznych)

Niech p będzie liczbą pierwszą, n dodatnią liczbą całkowitą i a dowolną liczbą całkowitą. Załóżmy, że

$$\Phi_n(a) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wtedy spełniony jest jeden z poniższych warunków.

(i) Liczba a ma rząd n modulo p, a stąd $p \equiv 1 \pmod{n}$.

(ii) Liczba p dzieli liczbę n.

Na koniec Czytelnik zechce samodzielnie przeprowadzić dowód poniższego przydatnego lematu, działając analogicznie do algorytmu Euklidesa.

Lemat 9

Niech dodatnie liczby całkowite $a \geqslant b$ będą względnie pierwsze oraz $n, m \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi. Zachodzi wówczas równość

$$\gcd(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^d - b^d,$$

przy czym $d = \gcd(m, n)$.

Zadania cz. II

Zadanie 8.
Udowodnić, że jeśli $\gcd(\Phi_m(a), \Phi_n(a)) > 1$ dla pewnych $m \geqslant n$, to $m/n = p^\alpha$ dla pewnej liczby pierwszej p.

Zadanie 9.
Niech $\omega(n)$ oznacza liczbę różnych dzielników pierwszych n. Wykazać, że dla każdej liczby nieparzystej n zachodzi

$$\omega(2^n - 1) \geqslant 2^{\omega(n)} - 1.$$

Zadanie 10. (Twierdzenie Banga)

(a) Udowodnić, że każdy wyraz ciągu $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^4 - 1$, $\ldots$ ma dzielnik pierwszy, którego nie ma żaden z wcześniejszych wyrazów, z wyjątkiem $2^6 - 1$.

(b) Udowodnić, że każdy wyraz ciągu $2^1 + 1$, $2^2 + 1$, $2^3 + 1$, $\ldots$ ma dzielnik pierwszy, którego nie ma żaden wyraz poprzedni, z wyjątkiem $2^3 + 1$.

Zadanie 11.
Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite a, n oraz k, dla których $3^k - 1 = a^n$.

Zadanie 12.
Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych a, m oraz $n \geqslant 2$, dla których zachodzi równość

$$a^m + 1 = (a+1)^n.$$

Zadanie 13. (IMO Shortlist 2006 N5)
Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, y spełniające równość

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1.$$

Zadanie 14. (Szczególny przypadek twierdzenia Dirichleta)
Udowodnić, że dla każdego całkowitego $n \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele takich $a \geqslant 1$, że liczba $an + 1$ jest pierwsza.

Zadanie 15. (IMO Shortlist 2002 N3)
Niech $p_1, \ldots, p_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi większymi niż 3. Udowodnić, że $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ ma co najmniej $2^{2^{n-1}}$ dzielników.

Zadanie 16.
Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, których nie można przedstawić w postaci
$$\frac{p^a - p^b}{p^c - p^d}$$
dla pewnej liczby pierwszej p oraz dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d.

Dowód twierdzenia Zsigmondy'ego

W tej sekcji będziemy badać liczby postaci
$$a^n - b^n = b^n \prod_{d|n} \Phi_d(a/b).$$

Wprowadźmy oznaczenie
$$\Phi_n(a, b) := b^{\varphi(n)} \Phi_n(a/b).$$
Jeśli liczby a i b będą wiadome z kontekstu, będziemy również pisać $\Phi_n = \Phi_n(a, b)$. Zauważmy, że z równości udowodnionych wcześniej dla $\Phi_n(a)$ wynikają natychmiast następujące własności.

(1) $a^n - b^n = \prod_{d|n} \Phi_d(a, b)$.

(2) $\Phi_n(a, b) = \prod_{d|n} (a^{n/d} - b^{n/d})^{\mu(d)}$.

(3) Niech $n = p^\alpha r$, przy czym $\alpha = v_p(n) \geqslant 1$. Wtedy
$$\Phi_n(a, b) = \Phi_r\left(a^{p^\alpha} - b^{p^\alpha}\right) / \Phi_r\left(a^{p^{\alpha-1}}, b^{p^{\alpha-1}}\right).$$

Od tej pory będziemy rozważać jedynie przypadki $a > b \geqslant 1$, gdzie liczby a i b są względnie pierwsze. Oznaczmy ponadto $z_n(a, b) := a^n - b^n$.

Definicja (Dzielnik pierwotny)

Liczbę pierwszą p nazywamy *dzielnikiem pierwotnym* liczby z_n, jeśli $p \mid z_n$ oraz $p \nmid z_k$ dla każdego $k < n$.

Zauważmy, że aby sprawdzić, czy p jest dzielnikiem pierwotnym, możemy ograniczyć rozpatrywanie potencjalnych k do dzielników liczby n. Istotnie, jeśli $p \mid z_m$ oraz $p \mid z_n$, to z Lematu 9 zachodzi $p \mid z_{\gcd(m,n)}$.

Twierdzenie (Twierdzenie Zsigmondy'ego)

Niech $a > b \geqslant 1$ będą względnie pierwszymi liczbami całkowitymi oraz $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Wtedy liczba $z_n(a, b)$ ma dzielnik pierwotny, chyba że zachodzi jeden z poniższych przypadków

(i) $n = 1$, $a - b = 1$,

(ii) $n = 2$, $a + b = 2^s$ dla pewnego $s \in \mathbb{Z}_+$,

(iii) $a = 2$, $b = 1$, $n = 6$.

Dowód. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Każdy dzielnik pierwszy liczby $a-b$ jest dzielnikiem pierwotnym liczby z_1, więc liczba ta nie ma dzielników pierwotnych tylko, gdy
$$z_1 = a - b = 1.$$

Niech teraz $n \geqslant 2$. Z rozkładu
$$z_n = \prod_{d|n} \Phi_d(a, b)$$
wynika, że każdy dzielnik pierwotny liczby z_n dzieli $\Phi_n(a, b)$ oraz nie dzieli żadnej z liczb $\Phi_d(a, b)$ dla $d \mid n$, $d < n$. Przypuśćmy zatem, że z_n nie ma dzielnika pierwotnego. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz $p^\alpha \mid \Phi_n = b^{\varphi(n)} \Phi_n(a/b)$. Wtedy oczywiście $p^\alpha \mid a^n - b^n$. Gdyby $p^\alpha \mid b$, to $p^\alpha \mid a$ oraz $\gcd(a, b) > 1$ wbrew założeniu. Zatem $p \nmid b$, czyli istnieje odwrotność b^{-1} modulo p^α oraz $p^\alpha \mid \Phi_n(ab^{-1})$.

Ponieważ p nie jest dzielnikiem pierwotnym, p musi być trywialnym dzielnikiem $\Phi_n(ab^{-1})$, więc istnieje co najwyżej jeden dzielnik niepierwotny oraz $n = p^\alpha r$, przy czym $r = \mathrm{ord}_p(ab^{-1})$. Jeśli ponadto $p > 2$, to

$$v_p(\Phi_n(a,b)) = 1.$$

Wobec tego zachodzi jeden z przypadków

$$\Phi_n(a,b) = 2^s \qquad \text{lub} \qquad \Phi_n(a,b) = p$$

dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej $p \mid n$.

Najpierw rozważmy przypadek $\Phi_n(a,b) = 2^s$. Wówczas jedynym dzielnikiem niepierwotnym jest 2, więc $n = 2^\alpha$. Ponadto $2 \mid a^n - b^n$, zatem liczby a i b są nieparzyste. Gdyby $\alpha \geqslant 2$, to

$$\Phi_n(a,b) = a^{2^{\alpha-1}} + b^{2^{\alpha-1}} \equiv 2 \pmod 4,$$

jednak zarazem $\Phi_n(a,b) > 2$, co jest niemożliwe dla potęgi liczby 2. Stąd $\alpha = 1$, czyli $n = 2$ oraz

$$\Phi_2(a,b) = a + b = 2^s.$$

Pozostaje przypadek $\Phi_n(a,b) = p$ dla $p \geqslant 3$. Jeśli $a - b \geqslant 2$, to na mocy Lematu 5

$$p = \Phi_n(a,b) \geqslant (a-b)^{\varphi(n)} \geqslant 2^{\varphi(n)} \geqslant 2^{p-1},$$

co jest oczywiście niemożliwe. Zatem $a - b = 1$. Zapiszmy teraz $n = p^\alpha r$. Gdyby $\alpha \geqslant 2$, to na mocy Lematu 5 i Lematu 6 otrzymujemy

$$p = \Phi_n(a,b) = \Phi_{n/p}(a^p, b^p) \geqslant (a^p - b^p)^{\varphi(n/p)} \geqslant a^p - b^p.$$

To jednak okazuje się niemożliwe po rozwinięciu prawej strony. Stąd $\alpha = 1$. Mamy zatem

$$p = \Phi_n(a,b) = \frac{\Phi_r(a^p, b^p)}{\Phi_r(a,b)}.$$

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia o nietrywialnych dzielnikach pierwszych szacujemy

$$p \geqslant \left(\frac{a^p - b^p}{a+b}\right)^{\varphi(r)} \geqslant \frac{a^p - b^p}{a+b} = \frac{(b+1)^p - b^p}{2b+1} \geqslant \frac{2^p - 2}{3},$$

przy czym skorzystaliśmy tu z równości $a - b = 1$. Powyższą nierówność spełnia tylko $p = 3$.

Mamy więc $n = 3r$, przy czym $r = \mathrm{ord}_3(ab^{-1})$. Z małego twierdzenia Fermata dostajemy $r \mid 2$. Nie może być $r = 1$, bo wtedy $3 \mid a - b = 1$. Zatem $r = 2$, czyli $n = 6$. Wówczas

$$3 = \Phi_6(a,b) = a^2 - ab + b^2 = b^2 + b + 1.$$

Stąd $b = 1$ oraz $a = 1$. To kończy dowód. □

Twierdzenie (Twierdzenie Zsigmondy'ego z dodawaniem)

Niech a, b będą względnie pierwszymi liczbami całkowitymi oraz $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Wtedy liczba $a^n + b^n$ ma dzielnik pierwszy p, który nie dzieli żadnej z liczb $a^k + b^k$ dla $k < n$, chyba że $a = 2$, $b = 1$, $n = 3$.

Dowód. Czytelnik zechce samodzielnie przeanalizować szczególne przypadki. Zauważmy, że

$$(a^n - b^n)(a^n + b^n) = a^{2n} - b^{2n}.$$

Jeśli weźmiemy dzielnik pierwotny $p \mid a^{2n} - b^{2n}$, to $p \nmid a^n - b^n$. Co więcej

$$p \nmid a^{2k} - b^{2k} = (a^k - b^k)(a^k + b^k).$$

Stąd $p \mid a^n + b^n$ oraz $p \nmid a^k + b^k$ dla $k < n$. □

Nierozkładalność wielomianów cyklotomicznych

Zacznijmy od udowodnienia następującego lematu.

Lemat 10

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem. Wielomian $f \in \mathbb{K}[X]$ jest względnie pierwszy ze swoją pochodną. Wtedy f nie jest podzielny przez g^2 dla każdego niestałego wielomianu $g \in \mathbb{K}[X]$.

Dowód. Przypuśćmy, że $f = hg^2$. Po obustronnym zróżniczkowaniu mamy

$$f' = h'g^2 + 2g'gh = g(h'g + 2g'h).$$

Zatem $g \mid f'$. Jednocześnie z założenia $g^2 \mid f$, więc $g \mid \gcd(f, f')$ wbrew założeniu, że wielomiany f i f' są względnie pierwsze. □

Twierdzenie (Nierozkładalność wielomianów cyklotomicznych)

Dla każdego liczby całkowitej $n \geqslant 1$ wielomian Φ_n jest nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$.

Dowód. Niech ω będzie pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności oraz niech f będzie jego wielomianem minimalnym nad $\mathbb{Q}$. Niech $p \nmid n$ będzie liczbą pierwszą oraz niech g będzie wielomianem minimalnym liczby ω^p. Zauważmy, że wielomiany f oraz g dzielą $X^n - 1$, zatem na mocy lematu Gaussa mają współczynniki całkowite.

Przypuśćmy, że $f \neq g$. Wówczas z minimalności wielomiany te są względnie pierwsze w $\mathbb{Q}[X]$. Ponadto dla pewnego wielomianu $h \in \mathbb{Z}[X]$ zachodzi

$$X^n - 1 = f(X)g(X)h(X).$$

Zauważmy, że ω jest pierwiastkiem wielomianu $g(X^p)$, zatem $g(X^p) = f(X)k(X)$ dla pewnego wielomianu $k \in \mathbb{Z}[X]$. Zredukujmy teraz rozważane wielomiany modulo p. Wówczas

$$g(X)^p = g(X^p) = f(X)k(X).$$

w pierścieniu $\mathbb{F}_p[X]$. Jeśli $q \in \mathbb{F}_p[X]$ jest nierozkładalny i dzieli wielomian f, to stąd również dzieli g. Ponieważ

$$X^n - 1 = f(X)g(X)h(X),$$

wielomian $X^n - 1$ jest podzielny przez q^2 w $\mathbb{F}_p[X]$. Zatem na mocy lematu $X^n - 1$ nie może być względnie pierwszy ze swoją pochodną. Jednak oczywiście

$$\gcd(X^n - 1, nX^{n-1}) = 1,$$

ponieważ $p \nmid n$ oraz wielomiany $X^n - 1$ i X są względnie pierwsze. Wobec uzyskanej sprzeczności musi zachodzić równość $f = g$, czyli ω i ω^p mają ten sam wielomian minimalny.

Niech teraz ω^m będzie pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności. Wówczas $m = p_1 \cdots p_k$, przy czym $p_1, \ldots, p_k$ są liczbami pierwszymi, które nie dzielą n. Stosujemy powyższą obserwację wielokrotnie i wnioskujemy, że ω i ω^m mają ten sam wielomian minimalny. Wobec dowolności m wszystkie pierwiastki pierwotne n-tego stopnia z jedności mają ten sam wielomian minimalny f. Wówczas $\Phi_n \mid f$.

Jednak f jest wielomianem minimalnym ω oraz $\Phi_n(\omega) = 0$, więc $f \mid \Phi_n$. Wielomiany te są unormowane, więc musi zachodzić równość $f = \Phi_n$. Wobec tego Φ_n jest nierozkładalny, ponieważ jest wielomianem minimalnym. □

Zadania cz. III

Zadanie 17.
Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi, że podzielność $a^n + b^n \mid c^n$ zachodzi dla każdego $n > 1$. Udowodnić, że $a = b$.

Zadanie 18. (Japan TST 2017)
Znaleźć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite k, że istnieją ciągi (a_n) oraz (r_n) spełniające dla każdego $n \geqslant 1$ warunki

(1) $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$,
(2) $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{r_n}$.

Zadanie 19.
Udowodnić, że w nieskończonym ciągu

$$10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$$

nie występuje liczba pierwsza.

Zadanie 20.
Niech $p \geqslant 3$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że jeśli p-kąt ma wszystkie boki wymiernej długości i wszystkie kąty równe, to wielokąt ten jest foremny.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Michał Gawron, Karol Musieliński, Michał Oprocha, Łukasz Próchniak.

Ćwiczenie 1.
Wykazać, że funkcja μ jest funkcją multiplikatywną, czyli jeśli liczby a i b są względnie pierwsze, to $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$.

Rozwiązanie:
Skoro liczby a i b są względnie pierwsze, to jeśli obie liczby a oraz b są bezkwadratowe, to również liczba ab jest bezkwadratowa. Nietrudno sprawdzić, że odpowiednia równość zachodzi w tym przypadku, ponieważ $\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(v)$. Jeśli pewna z liczb a lub b nie jest bezkwadratowa, to oczywiście liczba ab również nie jest bezkwadratowa. Wówczas $\mu(ab) = 0 = \mu(a)\mu(b)$. To kończy dowód.

Zadanie 2.
Wyznaczyć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że liczba $n^{10} + n^5 + 1$ jest pierwsza.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$n^{10} + n^5 + 1 = \Phi_3(n)\Phi_{15}(n).$$

Dla $n > 1$ na mocy Lematu 5 mamy $\Phi_3(n), \Phi_{15}(n) > 1$, więc liczba $n^{10} + n^5 + 1$ jest złożona. Bezpośrednio sprawdzamy, że $n = 1$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 3.
Niech $a > 1$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że jeśli

$$a^{(k-1)n} + \cdots + a^{2n} + a^n + 1$$

jest liczbą pierwszą, to k jest liczbą pierwszą oraz $n = k^s$ dla pewnego całkowitego s.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$a^{(k-1)n} + \cdots + a^{2n} + a^n + 1 = \frac{a^{kn} - 1}{a^n - 1} = \frac{\prod_{d|kn} \Phi_d(a)}{\prod_{d|n} \Phi_d(a)}.$$

Wobec tego licznik musi mieć dokładnie jeden czynnik więcej niż licznik, czyli liczba kn musi mieć dokładnie jeden dzielnik więcej niż n. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $kn = p^m$, przy czym p jest liczbą pierwszą. Wówczas oczywiście $k = p$ oraz $n = p^{m-1}$.

Zadanie 4.
Niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby $2^{n!}-1$. Udowodnić, że $p^{H_n} \leqslant 3^{n!}$, przy czym $H_n = 1+1/2+\cdots+1/n$.

Rozwiązanie:
Udowodnimy najpierw, że

$$\varphi(n!) \leqslant \frac{n!}{H_n}.$$

Jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są wszystkimi liczbami pierwszymi nie większymi od n, to

$$\varphi(n!) = n! \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Trzeba zatem wykazać, że powyższy iloczyn nie przekracza H_n^{-1}. Jego odwrotność jest równa

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = H_n,$$

co kończy dowód nierówności.

Niech $d = \mathrm{ord}_p(2)$. Ponieważ $p \mid 2^{n!} - 1$, mamy $d \mid n!$. Ponadto $p \mid 2^d - 1$, a z rozkładu

$$2^d - 1 = \prod_{e \mid d} \Phi_e(2)$$

wynika, że $p \mid \Phi_e(2)$ dla pewnego $e \mid d$. Gdyby $e < d$, to $\Phi_e(2) \mid 2^e - 1$, więc $p \mid 2^e - 1$ wbrew minimalności d. Zatem $p \mid \Phi_d(2)$. Wówczas na mocy Lematu 5

$$p \leqslant \Phi_d(2) \leqslant 3^{\varphi(d)} \leqslant 3^{\varphi(n!)} \leqslant 3^{n!/H_n},$$

skąd wprost wynika teza.

Zadanie 5.
Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych a, że każdy dzielnik pierwszy liczby $a^2 + a + 1$ jest mniejszy od $\sqrt{a}$.

Rozwiązanie:
Weźmy $a = 2^{n!/3} - 1$, przy czym $n \geqslant 3$ jest liczbą całkowitą. Wtedy $a^2 + a + 1 \mid a^3 - 1$, więc każdy dzielnik pierwszy liczby $a^2 + a + 1$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $2^{n!} - 1$. Dla dostatecznie dużych n teza wynika z poprzedniego zadania.

Ćwiczenie 6.
Udowodnić, że jeśli każdy dzielnik pierwszy liczby t jest też dzielnikiem pierwszym liczby m, to

$$\Phi_{mt}(X) = \Phi_m(X^t).$$

Rozwiązanie:
Wystarczy wielokrotnie zastosować Lemat 6.

Ćwiczenie 7.
Udowodnić, że jeśli $n \equiv 2 \pmod 4$ oraz $n > 2$, to $\Phi_n(X) = \Phi_{n/2}(-X)$.

Rozwiązanie:
Z założenia $n = 2m$ dla pewnej liczby nieparzystej m. Niech ω będzie pierwiastkiem pierwotnym m-tego stopnia z jedności. Czytelnik zechce przekonać się, że wówczas $-\omega$ jest pierwiastkiem pierwotnym $2m$-tego stopnia z jedności. Wobec tego

$$\Phi_m(-X) \mid \Phi_{2m}(X).$$

Ponadto oba te wielomiany są unormowane stopnia $\varphi(m)$, ponieważ $\varphi(2m) = \varphi(2)\varphi(m) = \varphi(m)$. Zatem $\Phi_m(-X) \mid \Phi_{2m}(X)$, co było do wykazania.

Zadanie 8.
Udowodnić, że jeśli $\gcd(\Phi_m(a), \Phi_n(a)) > 1$ dla pewnych $m \geqslant n$, to $m/n = p^\alpha$ dla pewnej liczby pierwszej p.

Rozwiązanie:
Niech $d = \gcd\big(\Phi_m(a), \Phi_n(a)\big)$ oraz niech p będzie taką liczbą pierwszą, że $q \mid d$. Wówczas

$$p \mid \Phi_m(a) \quad \text{oraz} \quad p \mid \Phi_n(a).$$

Z własności wielomianów cyklotomicznych mamy $m = rp^s$ i $n = rp^t$, przy czym $s \geqslant t \geqslant 0$. Wobec tego istotnie $m/n = p^{s-t}$, co było do udowodnienia.

Zadanie 9.
Niech $\omega(n)$ oznacza liczbę różnych dzielników pierwszych n. Wykazać, że dla każdej liczby nieparzystej n zachodzi

$$\omega(2^n - 1) \geqslant 2^{\omega(n)} - 1.$$

Rozwiązanie:
Zapiszmy $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, przy czym $k = \omega(n)$. Ponieważ n jest nieparzyste, na mocy twierdzenia o nietrywialnych dzielnikach pierwszych liczba $\Phi_d(n)$ ma dzielnik pierwszy, który nie dzieli żadnej z liczb $\Phi_m(n)$ dla $m < d$, jeśli tylko $d \mid n$ oraz $d > 1$. Wobec tego

$$\omega(2^n - 1) = \omega\Big(\prod_{d \mid n} \Phi_d(2)\Big) \geqslant 2^k - 1 = 2^{\omega(n)} - 1,$$

ponieważ liczba n ma co najmniej $2^k - 1$ dzielników większych od 1.

Zadanie 10. (Twierdzenie Banga)

(a) Udowodnić, że każdy wyraz ciągu $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^4 - 1$, $\ldots$ ma dzielnik pierwszy, którego nie ma żaden z wcześniejszych wyrazów, z wyjątkiem $2^6 - 1$.
(b) Udowodnić, że każdy wyraz ciągu $2^1 + 1$, $2^2 + 1$, $2^3 + 1$, $\ldots$ ma dzielnik pierwszy, którego nie ma żaden wyraz poprzedni, z wyjątkiem $2^3 + 1$.

Rozwiązanie:

(a) Na mocy Lematu 1 zachodzi równość
$$2^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(2).$$
Jeśli $n \neq 6$, to z twierdzenia o nietrywialnych dzielnikach pierwszych $\Phi_n(2)$ ma dzielnik pierwszy p, który nie dzieli żadnego z $\Phi_m(2)$ dla $m < n$. Wówczas oczywiście $p \mid 2^n - 1$. Ponadto gdyby $p \mid 2^m - 1$ dla pewnego $m < n$, to wówczas także $p \mid \Phi_d(a)$, przy czym $d \mid m < n$ wbrew temu, że p jest dzielnikiem nietrywialnym.
(b) Zauważmy, że
$$2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1).$$
Jeśli $n \neq 3$, to z poprzedniego punktu liczba $2^{2n} - 1$ ma dzielnik pierwszy p, który nie dzieli żadnego $2^m - 1$ dla $m < 2n$. Wówczas oczywiście $p \mid 2^n + 1$. Ponadto gdyby $p \mid 2^k - 1$ dla $k < n$, to także $p \mid 2^{2k} - 1$ wbrew definicji.

Zadanie 11.
Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite a, n oraz k, dla których $3^k - 1 = a^n$.

Rozwiązanie:
Oczywiście $3^1 - 1 = 2^1$. Dalej niech $a, n \geqslant 2$. Równoważnie mamy

$$3^k = a^n + 1.$$

Zauważmy, że $2 \nmid n$, ponieważ 2 nie jest resztą kwadratową modulo 3. Stąd $a + 1 \mid a^n + 1$, wiec każda z liczb $a + 1$ i $a^n + 1$ jest potęgą trójki. Analogicznie jak w poprzednim zadaniu, jeśli tylko $(a, n) \neq (2, 3)$, to liczba $a^n + 1$ ma dzielnik pierwszy p, który nie dzieli żadnego $a^k + 1$ dla $k < n$. W szczególności $p \nmid a + 1$ – sprzeczność. Dla $(a, n) = (2, 3)$ bezpośrednio sprawdzamy, że $3^2 - 1 = 2^3$. Zatem jedynymi rozwiązaniami są

$$(a, n, k) = (2, 1, 1) \quad \text{oraz} \quad (a, n, k) = (2, 3, 2).$$

Zadanie 12.
Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych a, m oraz $n \geqslant 2$, dla których zachodzi równość

$$a^m + 1 = (a + 1)^n.$$

Rozwiązanie:
Jeśli $(a, m) \neq (2, 3)$, to liczba $a^m + 1$ ma dzielnik pierwszy, który nie dzieli liczby $a + 1$ – sprzeczność. Bezpośrednio sprawdzamy, że $2^3 + 1 = (2 + 1)^2$, więc $(a, m, n) = (2, 3, 2)$ jest jedynym rozwiązaniem.

Zadanie 13. (IMO Shortlist 2006 N5)
Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, y spełniające równość

$$\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1.$$

Rozwiązanie:
Niech p będzie liczbą pierwszą oraz

$$p \mid \frac{x^7-1}{x-1}.$$

Wówczas każda z liczb x^7-1 i $x^{p-1}-1$ jest podzielna przez p. Załóżmy, że $7 \nmid p-1$. Wówczas $\gcd(p-1,7)=1$, więc istnieją liczby całkowite k oraz m, dla których

$$7k + (p-1)m = 1.$$

Wtedy mamy

$$x \equiv x^{7k+(p-1)m} \equiv (x^7)^k (x^{p-1})^m \equiv 1 \pmod{p},$$

a stąd

$$\frac{x^7-1}{x-1} = 1 + x + \cdots + x^6 \equiv 7 \pmod{p}.$$

Wobec tego $p = 7$.

Przypuśćmy, że (x, y) jest rozwiązaniem danego równania. Zauważmy, że $y > 1$, ponieważ $(x^7-1)/(x-1) > 0$ dla wszystkich $x \neq 1$. Ponieważ $y - 1$ dzieli

$$y^5 - 1 = \frac{x^7-1}{x-1},$$

na mocy powyższego rozumowania mamy

$$y \equiv 1 \pmod{7} \quad \text{lub} \quad y \equiv 2 \pmod{7},$$

ponieważ albo $7 \mid y-1$, albo każdy dzielnik pierwszy liczby $y-1$ jest postaci $7k+1$. W pierwszym przypadku

$$1 + y + y^2 + y^3 + y^4 \equiv 5 \pmod{7},$$

a w drugim

$$1 + y + y^2 + y^3 + y^4 \equiv 3 \pmod{7}.$$

Jednak liczba $1 + y + y^2 + y^3 + y^4$ też jest dzielnikiem liczby

$$\frac{x^7-1}{x-1},$$

więc może jedynie dawać resztę 0 lub 1 modulo 7. Wobec tego rozważane równanie nie ma rozwiązań całkowitych.

Zadanie 14. (Szczególny przypadek twierdzenia Dirichleta)
Udowodnić, że dla każdego całkowitego $n \geqslant 2$ istnieje nieskończenie wiele takich $a \geqslant 1$, że liczba $an+1$ jest pierwsza.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych tej postaci i oznaczmy je $p_1, \ldots, p_N$. Rozważmy liczbę

$$M = \Phi_n(np_1p_2\cdots p_N) =: \Phi_n(A).$$

Ponieważ pierwiastkami wielomianu $\Phi_n(X)$ są pierwiastkami z jedności, wyraz wolny tego wielomianu jest równy ± 1. Ponadto z Lematu 5 mamy $M > 1$. Wybierzmy dowolną liczbę pierwszą $p \mid M$. Jeśli $p \mid A$, to

$$M = \Phi_n(A) \equiv \Phi_n(0) \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

wbrew temu, że $p \mid M$. Stąd $p \notin \{p_1, \ldots, p_N\}$ oraz $p \nmid n$. Wówczas jednak $n = \operatorname{ord}_p(A)$, więc $n \mid p-1$, czyli p jest postaci $an+1$. Wobec uzyskanej sprzeczności liczb pierwszych tej postaci musi być nieskończenie wiele.

Zadanie 15. (IMO Shortlist 2002 N3)
Niech $p_1, \ldots, p_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi większymi niż 3. Udowodnić, że $2^{p_1 p_2 \cdots p_n}+1$ ma co najmniej $2^{2^{n-1}}$ dzielników.

Rozwiązanie:
Niech $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ oraz $b = 2^a + 1$. Ponieważ $3 \nmid a$, na mocy Zadania 10 dla każdego $d \mid a$ liczba

$$2^d + 1$$

ma dzielnik pierwszy, który nie dzieli żadnej z liczb 2^m+1 dla $m < d$. Ponieważ a jest nieparzyste, $2^d+1 \mid 2^a+1$. Wobec tego liczba b ma co najmniej 2^n dzielników pierwszych. Stąd natychmiast wynika teza.

Zadanie 16.
Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, których nie można przedstawić w postaci

$$\frac{p^a - p^b}{p^c - p^d}$$

dla pewnej liczby pierwszej p oraz dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d.

Rozwiązanie:
Na mocy twierdzenia Dirichleta istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych

$$q \equiv 263 \pmod{420}.$$

Udowodnimy, że dla każdej takiej liczby pierwszej liczba $2q$ nie jest żądanej postaci. Przypuśćmy przeciwnie, że

$$2q = \frac{p^a - p^b}{p^c - p^d}$$

dla pewnej liczby pierwszej p oraz liczb całkowitych $a, b, c, d > 0$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a > b$ oraz $c > d$. Wówczas

$$2q = p^{b-d} \cdot \frac{p^{a-b} - 1}{p^{c-d} - 1}.$$

Ponieważ prawa strona jest liczbą całkowitą, musi zachodzić

$$p^{c-d} - 1 \mid p^{a-b} - 1.$$

Stąd $c - d \mid a - b$ i dla pewnych liczb całkowitych $z \geqslant 0$, $u, k \geqslant 1$ zachodzi

$$2q = p^z \cdot \frac{p^{ku} - 1}{p^u - 1} = p^z \left(1 + p^u + \cdots + p^{(k-1)u}\right).$$

Najpierw przypuśćmy, że $p \neq 2$. Wtedy p^z jest nieparzyste, więc liczba w nawiasie musi być parzysta. Stąd również k jest parzyste. Gdyby $z \geqslant 1$, to $p \mid 2q$, więc $p = q$, a wtedy

$$2 = q^{z-1} \left(1 + q^u + \cdots + q^{(k-1)u}\right),$$

co jest niemożliwe. Zatem $z = 0$, czyli

$$2q = 1 + p^u + \cdots + p^{(k-1)u}.$$

Jeśli $k > 2$ i $k \neq 4$, to liczba k ma co najmniej dwa różne dzielniki $d_1, d_2 \geqslant 3$. Wówczas każdy z wielomianów $\Phi_{d_1}(p^u)$ i $\Phi_{d_2}(p^u)$ dzieli sumę $1+p^u+\cdots+p^{(k-1)u}$. Na mocy twierdzenia o nietrywialnych dzielnikach pierwszych otrzymujemy dwa różne nieparzyste dzielniki pierwsze liczby $1 + p^u + \cdots + p^{(k-1)u} = 2q$, co jest niemożliwe.

Czytelnik zechce przekonać się, że $k = 4$ jest niemożliwe. Dla $k = 2$ mamy $2q = 1 + p^u$, a więc $p^u = 2q - 1$. Jednak z warunku $q \equiv 263 \pmod{420}$ wynika

$$p^u \equiv 2q - 1 \equiv 0 \pmod{35},$$

co jest niemożliwe. Pozostaje przypadek $p = 2$. Wtedy

$$2q = 2^z\left(1 + 2^u + \cdots + 2^{(k-1)u}\right).$$

Liczba w nawiasie jest nieparzysta, więc $z = 1$, czyli

$$q = 1 + 2^u + \cdots + 2^{(k-1)u}.$$

Z założenia mamy $q \equiv 3 \pmod{4}$. Gdyby $u \geqslant 2$, to prawa strona przystawałaby do 1 modulo 4 – sprzeczność. Zatem $u = 1$ oraz $q = 2^k - 1$. To jednak niemożliwe, ponieważ $q \equiv 2 \pmod{3}$.

Zadanie 17.
Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi, że podzielność $a^n + b^n \mid c^n$ zachodzi dla każdego $n > 1$. Udowodnić, że $a = b$.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że $a \neq b$. Bez straty ogólności niech $a > b$. Niech $d = \gcd(a, b)$, $x = a/d$ oraz $y = b/d$. Oczywiście liczby x oraz y są względnie pierwsze. Wówczas z twierdzenia Zsigmondy'ego istnieje dowolnie duża liczba pierwsza p, która dzieli liczbę $x^n + y^n$ dla pewnego n. Wtedy jednak $p \mid c^n$, więc $p \mid c$. To jednak niemożliwe dla $p > |c|$. Wobec tego $a = b$, co było do wykazania.

Zadanie 18. (Japan TST 2017)
Znaleźć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite k, że istnieją ciągi (a_n) oraz (r_n) spełniające dla każdego $n \geqslant 1$ warunki

(1) $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$,
(2) $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{r_n}$.

Rozwiązanie:
Na początku sprawdźmy, że $k = 1$ i $k = 3$ spełniają warunki zadania. Dla $k = 1$ podstawiamy $a_n = n$ oraz $r_n = 1$, co spełnia oba warunki. Dla $k = 3$ podstawiamy $a_n = n$ oraz $r_n = 2$, co oczywiście spełnia warunek 1, a warunek 2 jest znaną tożsamością. Dalej niech $k \notin \{1, 3\}$.

Zauważmy, że
$$a_1^k + a_2^k = (a_1 + a_2)^{r_2}.$$
Jeśli $d = \gcd(a_1, a_2)$ oraz $b_1 = a_1/d$, $b_2 = a_2/d$, to
$$d^{k-r_2}(b_1^k + b_2^k) = (b_1 + b_2)^{r_2}.$$

Jednak z twierdzenia Zsigmondy'ego wiemy, że istnieje dzielnik pierwotny $g \mid b_1^k + b_2^k$, który nie dzieli $b_1 + b_2$. Wobec tego żądaną własność mają tylko $k = 1$ i $k = 3$.

Zadanie 19.
Udowodnić, że w nieskończonym ciągu
$$10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$$
nie występuje liczba pierwsza.

Rozwiązanie:
Niech $a_i = 1 + 10^4 + \cdots + 10^{4i}$. Zauważmy, że jeśli dla pewnych liczb całkowitych $n > m \geqslant 1$ zachodzi $m+1 \mid n+1$, to $a_m \mid a_n$. Wówczas w szczególności liczba a_n nie jest pierwsza, ponieważ $a_n > a_m > 1$. Pozostało zatem rozważyć przypadek, gdy liczba $n + 1$ jest pierwsza.

Wówczas z Lematu 7 mamy
$$a_n = \Phi_{n+1}(10^4) = \Phi_{n+1}(10)\Phi_{2(n+1)}(10)\Phi_{4(n+1)}(10).$$

Ponieważ na mocy Lematu 5
$$\Phi_{n+1}(10),\ \Phi_{2(n+1)}(10),\ \Phi_{4(n+1)}(10) > 1,$$
każda taka liczba a_n jest złożona.

Zadanie 20.
Niech $p \geqslant 3$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że jeśli p-kąt ma wszystkie boki wymiernej długości i wszystkie kąty równe, to wielokąt ten jest foremny.

Rozwiązanie:
Oznaczmy wierzchołki p-kąta $\mathcal{P}$ przez $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$. Niech dodatkowo $z_i = A_{i+1} - A_i$ dla $0 \leqslant i \leqslant p-1$, przy czym przyjmujemy $A_p = A_0$. Skoro wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta $\mathcal{P}$ są równe, to są równe $(p-2)\pi/p$. Wynika stąd, że kąt między z_i a z_{i+1} jest równy $\pi - (p-2)\pi/p = 2\pi/p$ dla $0 \leqslant i \leqslant p-1$. Jeżeli zatem

zinterpretujemy z_i jako liczby zespolone oraz po ewentualnym obrocie przyjmiemy $z_0 \in \mathbb{R}$, to $z_i = q_i\omega^i$, przy czym $q_i = |z_i|$ jest liczbą wymierną oraz $\omega = e^{2\pi/p}$. Skoro z_i to wektory stworzone z boków wielokąta $\mathcal{P}$, to ich suma jest równa 0. Wobec tego

$$q_0 + q_1\omega + q_2\omega^2 + \cdots + q_{p-1}\omega^{p-1} = 0,$$

czyli ω jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = \sum_{i=0}^{p-1} q_i x^i$ stopnia $p-1$. Wiemy jednak, że wielomianem minimalnym ω nad $\mathbb{Q}$ jest wielomian cyklotomiczny

$$\Phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}.$$

Skoro wielomian ten również ma stopień $p-1$, to $w = q_{p-1}\Phi_p$. Wynika stąd, że wszystkie q_i są sobie równe. Wobec tego wielokąt $\mathcal{P}$ jest foremny, co chcieliśmy pokazać.

Konfiguracje z parabolami

Konstanty Smolira

Teoria

Przypomnijmy, że dla każdej niezdegenerowanej stożkowej na płaszczyźnie rzutowej możemy zdefiniować dwa ogniska. W przypadku okręgu oba są tym samym punktem, a w przypadku paraboli drugie ognisko jest punktem w nieskończoności prostopadłym do kierownicy. Wówczas

Lemat 1 (Własność optyczna krzywych stożkowych)

Dany jest punkt na nierozkładalnej, czyli niezdegenerowanej do prostej lub pary prostych, stożkowej. Wtedy proste łączące ten punkt z ogniskami stożkowej są swoimi odbiciami względem stycznej do stożkowej w tym punkcie.

Wśród krzywych stożkowych, poza okręgiem, wyróżniamy także inne typy.

Definicja (Hiperbola prostokątna)

Hiperbolą prostokątną nazywamy hiperbolę, której asymptoty są prostopadłe.

Definicja (Parabola)

Parabolą nazywamy zbiór punktów równoodległych od prostej, zwanej kierownicą, oraz od punktu, zwanego ogniskiem.

Jeżeli rozpatrujemy problem na płaszczyźnie rzutowej, to na hiperboli prostokątnej leżą dwa punkty w nieskończoności prostopadłe do siebie, a parabola jest styczna do prostej w nieskończoności. Fakty te mogą być przydatne na przykład przy twierdzeniu Pascala.

Ten skrypt poświęcony jest ostatniej z wymienionych stożkowych. Przy dowodzeniu jej kolejnych własności warto korzystać z wiedzy o mapach oraz inwolucjach rzutowych zdobytej na poprzednich kółkach.

Ćwiczenie 1. (Potęga punktu względem paraboli)
Dana jest parabola α o ognisku F, kierownicy ℓ oraz punkt C na płaszczyźnie. Na paraboli obrano punkty A i B tak, że punkt C leży na prostej AB. Niech H_A, H_B, H_C będą rzutami odpowiednio punktów A, B, C na prostą ℓ. Wówczas wartość wyrażenia

$$H_AH_C \cdot H_BH_C$$

zależy jedynie od wyboru paraboli oraz punktu C.

Warto przyjąć, że potęga punktu względem paraboli jest ujemna, gdy punkt leży po tej samej stronie paraboli co jej ognisko, a dodatnia, gdy leży po stronie przeciwnej.

Ćwiczenie 2.
Potęgę punktu A względem paraboli α można także obliczyć jako różnicę kwadratu odległości punktu A od ogniska F tej paraboli oraz kwadratu odległości punktu A od kierownicy ℓ tej paraboli.

Wynika z tego, że w przypadku paraboli o równaniu $y = x^2$ potęga punktu sprowadza się do wielkości $x^2 - y$.

Definicja (Dodawanie punktów na paraboli)

Dana jest parabola α na płaszczyźnie euklidesowej oraz punkty A i B na niej. Wybierzmy osie x oraz y kartezjańskiego układu współrzędnych tak, by parabola α miała równanie $y = x^2$. Wtedy *sumą punktów* A i B nazywamy punkt paraboli, którego współrzędna x jest równa sumie współrzędnych x punktów A oraz B.

W kontekście tego dodawania, przez punkt 0 rozumiemy wierzchołek paraboli. Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowane działanie jest łączne i przemienne.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 3.
Dane są cztery punkty A, B, C, D leżące na paraboli α. Wykazać, że $AB \parallel CD$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A + B = C + D$.

Ćwiczenie 4.
Dane są cztery różne punkty A, B, C, D leżące na paraboli α. Wykazać, że są współokręgowe wtedy i tylko wtedy, gdy $A + B + C + D = 0$.

Jeśli punkty A, B, C, D nie są parami różne, to treści powyższych ćwiczeń nadal pozostają prawdziwe w odpowiednio zmienionej formie. Wielokrotne wystąpienie pewnego punktu oznacza styczność okręgu lub prostej w tym punkcie do paraboli, przy czym trzykrotne wystąpienie oznacza styczność okręgu z "przejściem na drugą stronę".

Ćwiczenie 5.
Dana jest parabola α oraz punkty A, B na niej. Wówczas poniższe warunki są równoważne:

(a) Styczne w punktach A i B przecinają się na kierownicy.
(b) Styczne w punktach A i B przecinają się pod kątem prostym.
(c) Punkty A i B są współliniowe z ogniskiem.

Ćwiczenie 6.
Ognisko paraboli wpisanej w trójkąt leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.

Ćwiczenie 7.
Pokazać, że cztery punkty na paraboli leżą na innej paraboli o kierownicy prostopadłej do kierownicy tej pierwszej wtedy i tylko wtedy, gdy leżą też na okręgu.

Ćwiczenie 8. (Lemat Archimedesa)
Dana jest parabola α oraz punkt A leżący po tej samej stronie paraboli α, co kierownica paraboli α. Prostą przez punkt A prostopadłą do kierownicy przecięto z biegunową punktu A względem paraboli α, otrzymując punkt A'. Wtedy:

(a) Punkt A' jest środkiem odcinka wyznaczonego przez punkty styczności stycznych poprowadzonych z A do paraboli.
(b) Środek odcinka AA' leży na paraboli.

Ćwiczenie 9.
Dana jest parabola o ognisku F. Styczne w punktach X i Y przecinają się w punkcie P. Wtedy trójkąt FPX jest podobny do trójkąta FYP.

Zadania

Zadanie 10.
Przez środki boków trójkąta poprowadzono pewną parabolę. Następnie wyznaczono jej drugie przecięcia z każdym z boków lub ich przedłużeń. Przez każdy z wierzchołków trójkąta poprowadzono prostą do punktu przecięcia paraboli z naprzeciwległym bokiem. Pokazać, że proste te są równoległe.

Zadanie 11.
Dana jest parabola α o wierzchołku V i ognisku F. Przez punkt A na paraboli α poprowadzono prostą prostopadłą do kierownicy i przecięto ją ze styczną w punkcie V, otrzymując punkt X. Przez punkt A poprowadzono także prostą prostopadłą do stycznej w tym punkcie i przecięto ją z prostą FX. Wykazać, że punkt A oraz to przecięcie są równoodległe od stycznej w punkcie V do paraboli.

Zadanie 12.
Dana jest parabola α o wierzchołku V i ognisku F. Obrano punkt A na paraboli α oraz poprowadzono przez ognisko F prostą równoległą do prostej AV, która przecięła parabolę w punktach B i C. Niech X będzie rzutem punktu B na oś paraboli, Y rzutem punktu C na oś paraboli, a Z rzutem punktu A na oś paraboli. Wykazać, że

(a) $XY = VA$,
(b) $FX^2 = VX \cdot VZ$.

Rozwiązania

Autor rozwiązań: Konstanty Smolira.

Ćwiczenie 1. (Potęga punktu względem paraboli)
Dana jest parabola α o ognisku F, kierownicy ℓ oraz punkt C na płaszczyźnie. Na paraboli obrano punkty A i B tak, że punkt C leży na prostej AB. Niech H_A, H_B, H_C będą rzutami odpowiednio punktów A, B, C na prostą ℓ. Wówczas wartość wyrażenia

$$H_AH_C \cdot H_BH_C$$

zależy jedynie od wyboru paraboli oraz punktu C.

Rozwiązanie:
Ustalmy parabolę oraz punkt C. Rozważmy mapę rzutową z prostej ℓ na siebie, zdefiniowaną następująco: przez dany punkt prostej ℓ prowadzimy prostą do niej prostopadłą, rozważamy jej drugie przecięcie z parabolą, następnie rzutujemy ten punkt przez punkt C, a na końcu ponownie rzutujemy prostopadle na prostą ℓ. Pierwszym przecięciem z parabolą jest przy tym punkt w nieskończoności.

Mapa ta jest inwolucją, która zamienia ze sobą punkty H_A i H_B. Sprawdzamy, że w tej inwolucji punkty H_C oraz punkt w nieskończoności prostej ℓ tworzą parę. Zatem inwolucja ta musi być inwersją, ewentualnie złożeniem inwersji z odbiciem, w okręgu o środku w punkcie H_C. Wobec tego teza jest oczywista.

Ćwiczenie 2.
Potęgę punktu A względem paraboli α można także obliczyć jako różnicę kwadratu odległości punktu A od ogniska F tej paraboli oraz kwadratu odległości punktu A od kierownicy ℓ tej paraboli.

Rozwiązanie:
Najpierw wykażemy tezę dla punktów leżących po tej samej stronie paraboli co jej kierownica. Załóżmy, że A jest takim punktem, i niech B będzie punktem styczności jednej ze stycznych poprowadzonych z A do paraboli α. Niech H_B i H_A będą rzutami odpowiednio punktów B i A na kierownicę ℓ. Wtedy z definicji paraboli $BF = BH_B$ oraz z własności optycznej $\sphericalangle FBA = \sphericalangle H_BBA$, co daje przystawanie $\triangle FBA \equiv \triangle H_BBA$, z którego wynika $AF = AH_B$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$H_AH_B^2 = AH_B^2 - AH_A^2 = AF^2 - AH_A^2,$$

co daje żądaną równość.

Teraz rozważmy dowolny punkt A na płaszczyźnie. Narysujmy dowolną sieczną k paraboli przechodzącą przez punkt A. Potęga punktu względem paraboli α jest na prostej k funkcją kwadratową. Podobnie funkcją kwadratową jest kwadrat odległości od ogniska pomniejszony o kwadrat odległości od kierownicy. Te dwie funkcje kwadratowe zgadzają się w nieskończenie wielu punktach, mianowicie wszędzie poza wnętrzem paraboli, a zatem są tą samą funkcją na całej prostej k, więc także w punkcie A. To kończy dowód.

Ćwiczenie 3.
Dane są cztery punkty A, B, C, D leżące na paraboli α. Wykazać, że $AB \parallel CD$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A + B = C + D$.

Rozwiązanie:
Wykażemy jedynie implikację "w lewo". Implikacja "w prawo" jest jej natychmiastową konsekwencją, ponieważ dla dowolnych punktów A, B, C na paraboli α istnieje dokładnie jeden taki punkt D na paraboli α, że $AB \parallel CD$.

Rozważmy na paraboli inwolucję rzutową przesyłającą punkt X na punkt $A+B-X$. Jest ona inwolucją rzutową na mocy argumentu podobnego do tego z dowodu Ćwiczenia 1. Inwolucja na stożkowej jest rzutowaniem przez pewien punkt; nazwijmy go P. Zauważmy, że w naszej inwolucji punkt w nieskończoności przechodzi na siebie, czyli punkt P leży na stycznej do paraboli w tym punkcie, a więc na prostej w nieskończoności. Punkty P, C, D są współliniowe. Podobnie współliniowe są punkty P, A, B. Zatem CD jest równoległe do AB, co kończy dowód.

Ćwiczenie 4.
Dane są cztery różne punkty A, B, C, D leżące na paraboli α. Wykazać, że są współokręgowe wtedy i tylko wtedy, gdy $A + B + C + D = 0$.

Rozwiązanie:
Podobnie jak w poprzednim rozwiązaniu wykażemy jedynie implikację "w lewo". Niech A' i B' będą odbiciami odpowiednio punktów A i B względem osi symetrii paraboli. Wtedy $A' + A = 0$ oraz $B' + B = 0$, zatem $A' + B' = C + D$.

Jeśli AB jest równoległe do kierownicy paraboli, to punkty A, B, C, D tworzą trapez równoramienny, a więc są współokręgowe. W przeciwnym wypadku niech P będzie punktem przecięcia prostych AB oraz CD. Gdyby proste te były równoległe, to z dodawania otrzymalibyśmy, że są równoległe do kierownicy paraboli.

Na mocy potęgi punktu P względem paraboli otrzymujemy

$$(PA \cos x) \cdot (PB \cos x) = (PC \cos y) \cdot (PD \cos y),$$

gdzie x i y są kątami, które z kierownicą α tworzą odpowiednio proste PA oraz PC. Jednak proste AB i CD są swoimi odbiciami względem osi symetrii paraboli, więc $\cos x = \cos y \neq 0$. Zatem $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, co daje żądaną współokręgowość.

Ćwiczenie 5.
Dana jest parabola α oraz punkty A, B na niej. Wówczas poniższe warunki są równoważne:

(a) Styczne w punktach A i B przecinają się na kierownicy.
(b) Styczne w punktach A i B przecinają się pod kątem prostym.
(c) Punkty A i B są współliniowe z ogniskiem.

Rozwiązanie:
Najpierw wykażemy, że kierownica jest biegunową ogniska względem paraboli. Ognisko leży na osi symetrii paraboli, zatem jego biegunowa musi być niezmiennicza względem tej symetrii. Nie może to być sama oś symetrii, gdyż wtedy ognisko leżałoby na swojej biegunowej, a nie leży ono na paraboli. Zatem jest to prosta prostopadła do osi symetrii, czyli równoległa do kierownicy. Ognisko, przecięcie osi symetrii z kierownicą oraz przecięcia osi symetrii z parabolą tworzą czwórkę harmoniczną. Jedno z tych przecięć jest punktem w nieskończoności, a drugie środkiem odcinka łączącego pierwsze dwa punkty. Zatem przecięcie osi symetrii z kierownicą leży na biegunowej ogniska, więc biegunowa ta jest właśnie kierownicą.

Z powyższego faktu i prawa wzajemności biegunowych od razu wynika równoważność warunków (a) i (c). Wykażemy teraz, że z warunku (c) wynika warunek (b).

Niech H_A i H_B będą rzutami odpowiednio punktów A i B na kierownicę, a P punktem przecięcia stycznych w punktach A i B. Wtedy

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle APF + \sphericalangle FPB = \frac{1}{2}\big(\sphericalangle H_A PA + \sphericalangle APF + \sphericalangle FPB + \sphericalangle BPH_B\big) = \frac{\pi}{2},$$

co kończy dowód tej implikacji.

Pozostało wykazać, że z warunku (b) wynika warunek (c). Zauważmy, że każda styczna do paraboli ma inny kierunek. Wynika to ze styczności prostej w nieskończoności do paraboli lub, na przykład, ze zdegenerowanej formy Ćwiczenia 3. W połączeniu z już udowodnioną implikacją z warunku (c) do warunku (b) kończy to dowód ćwiczenia.

Ćwiczenie 6.
Ognisko paraboli wpisanej w trójkąt leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.

Rozwiązanie:
Odnotujmy najpierw następujący fakt: odbicie ogniska paraboli względem dowolnej stycznej leży na kierownicy. Wynika to natychmiast z przystawania użytego w dowodzie Ćwiczenia 2. Widzimy, że obrazy symetryczne ogniska wpisanej paraboli względem boków leżą na jednej prostej, mianowicie na kierownicy. Na mocy twierdzenia o prostej Steinera ognisko wpisanej paraboli leży więc na okręgu opisanym na trójkącie. Warto też zauważyć, że ortocentrum tego trójkąta leży na kierownicy rozważanej paraboli.

Ćwiczenie 7.
Pokazać, że cztery punkty na paraboli leżą na innej paraboli o kierownicy prostopadłej do kierownicy tej pierwszej wtedy i tylko wtedy, gdy leżą też na okręgu.

Rozwiązanie:
Poniższe rozumowanie będzie wykorzystywało nieco więcej teorii rzutowej, choć służy ona właściwie ominięciu problemu konstrukcji żądanej paraboli, którą zapewne dałoby się przeprowadzić bezpośrednio.

Oznaczmy omawiane cztery punkty przez A, B, C, D. Zastosujmy Inwolucyjne Twierdzenie Desarguesa do tej czwórki i prostej w nieskończoności. Otrzymujemy na niej inwolucję ϕ taką, że jeżeli $\phi(X) = Y$, to istnieje stożkowa przechodząca przez punkty A, B, C, D, X, Y. Punkt w nieskończoności naszej paraboli jest jednym z punktów stałych ϕ, a zatem na prostej w nieskończoności musi istnieć drugi punkt stały E. Poprowadźmy przez niego oraz przez punkty A, B, C, D stożkową α. Ponieważ punkt E jest punktem stałym ϕ, stożkowa α jest styczna do prostej w nieskończoności, czyli jest parabolą.

Prostopadłość kierownic dwóch parabol jest równoważna prostopadłości ich punktów w nieskończoności P_1, P_2. Tę własność można z kolei wyrazić jako $(P_1, P_2; I_1, I_2) = -1$, gdzie I_1, I_2 są punktami przecięcia okręgu z prostą w nieskończoności. Jest to równoważne warunkowi $\phi(I_1) = I_2$, a na mocy definicji ϕ z kolei współokręgowości punktów A, B, C, D.

Ćwiczenie 8. (Lemat Archimedesa)
Dana jest parabola α oraz punkt A leżący po tej samej stronie paraboli α, co kierownica paraboli α. Prostą przez punkt A prostopadłą do kierownicy przecięto z biegunową punktu A względem paraboli α, otrzymując punkt A'. Wtedy:

(a) Punkt A' jest środkiem odcinka wyznaczonego przez punkty styczności stycznych poprowadzonych z A do paraboli.

(b) Środek odcinka AA' leży na paraboli.

Rozwiązanie:
Przecięcia prostej AA' z parabolą α oraz punkty A, A' tworzą czwórkę harmoniczną, gdyż punkt A' leży na biegunowej punktu A. Jedno z tych przecięć jest punktem w nieskończoności, a zatem drugie – nazwijmy je M – jest środkiem odcinka AA', co daje punkt (b).

Niech B będzie biegunem prostej AA' względem paraboli. Styczną do paraboli α w punkcie przecięcia z prostą AA', czyli w punkcie w nieskończoności, jest prosta w nieskończoności, więc punkt B jest punktem w nieskończoności. Rzutowanie przez punkt B jest inwolucją na parabolę α, której punktami stałymi są punkt w nieskończoności oraz środek odcinka AA'. Nietrudno zauważyć, że jest to inwolucja przesyłająca punkt X na punkt $M + M - X$. Jednak na mocy prawa wzajemności biegunowych punkty styczności stycznych poprowadzonych z punktu A tworzą w tej inwolucji parę, a to z definicji naszego dodawania kończy dowód punktu (a).

Ćwiczenie 9.
Dana jest parabola o ognisku F. Styczne w punktach X i Y przecinają się w punkcie P. Wtedy trójkąt FPX jest podobny do trójkąta FYP.

Rozwiązanie:
Wykażemy, że $\sphericalangle FPY = \sphericalangle FXP$. Analogicznie można pokazać, że $\sphericalangle FYP = \sphericalangle FPX$, co daje żądane podobieństwo.

Wybierzmy dowolny punkt Z na paraboli. Styczne w punktach X, Y, Z tworzą trójkąt opisany na tej paraboli. Na mocy Ćwiczenia 6 ognisko F leży na okręgu opisanym na tym trójkącie, co daje $\sphericalangle FPY = \sphericalangle FQZ$, gdzie Q jest punktem przecięcia stycznych w punktach X i Z. Teraz przesuwajmy punkt Z w stronę punktu X. Prosta QZ dąży wtedy do prostej XP, a prosta FZ do prostej FX. Zatem $\sphericalangle FQZ$ dąży do $\sphericalangle FXP$, co daje żądaną równość.

Zadanie 10.
Przez środki boków trójkąta poprowadzono pewną parabolę. Następnie wyznaczono jej drugie przecięcia z każdym z boków lub ich przedłużeń. Przez każdy z wierzchołków trójkąta poprowadzono prostą do punktu przecięcia paraboli z naprzeciwległym bokiem. Pokazać, że proste te są równoległe.

Rozwiązanie:
Wykażemy, że wszystkie trzy proste są prostopadłe do kierownicy paraboli.

Ustalmy kierownicę jako oś x pewnego układu współrzędnych. Oznaczmy środki boków trójkąta przez A, B, C, drugie przecięcia odpowiednich boków z parabolą przez P_A, P_B, P_C, a odpowiednie wierzchołki oryginalnego trójkąta przez Q_A, Q_B, Q_C.

Wiemy, że $P_A = B + C - A$. Z drugiej strony czworokąt o wierzchołkach B, Q_A, C, A jest równoległobokiem, co oznacza, że współrzędna x punktu Q_A jest równa sumie współrzędnych x punktów B i C pomniejszonej o współrzędną x punktu A. Z definicji dodawania na paraboli tyle samo wynosi współrzędna x punktu P_A, a zatem prosta P_AQ_A istotnie jest prostopadła do kierownicy paraboli. Analogicznie postępujemy dla pozostałych dwóch prostych, co kończy dowód.

Zadanie 11.
Dana jest parabola α o wierzchołku V i ognisku F. Przez punkt A na paraboli α poprowadzono prostą prostopadłą do kierownicy i przecięto ją ze styczną w punkcie V, otrzymując punkt X. Przez punkt A poprowadzono także prostą prostopadłą do stycznej w tym punkcie i przecięto ją z prostą FX. Wykazać, że punkt A oraz to przecięcie są równoodległe od stycznej w punkcie V do paraboli.

Rozwiązanie:
Niech H_A będzie rzutem punktu A na kierownicę, a M środkiem odcinka FH_A. Na mocy twierdzenia Talesa punkt M leży na prostej VX. Z definicji paraboli mamy $AF = AH_A$, zatem prosta AM jest styczną do paraboli z własności optycznej oraz FH_A jest prostopadłe do AM. Wobec tego AY, gdzie Y oznacza wspomniane przecięcie, jest równoległe do FH_A.

Niech Z będzie punktem przecięcia prostej równoległej do AY, poprowadzonej przez X, z prostą w nieskończoności. Wiemy, że punkty H_A, M, F, Z tworzą czwórkę harmoniczną. Po przerzutowaniu jej przez punkt X na prostą AY otrzymujemy tezę.

Zadanie 12.
Dana jest parabola α o wierzchołku V i ognisku F. Obrano punkt A na paraboli α oraz poprowadzono przez ognisko F prostą równoległą do prostej AV, która przecięła parabolę w punktach B i C. Niech X będzie rzutem punktu B na oś paraboli, Y rzutem punktu C na oś paraboli, a Z rzutem punktu A na oś paraboli. Wykazać, że

(a) $XY = VA$,
(b) $FX^2 = VX \cdot VZ$.

Rozwiązanie:
Ponownie utożsamiamy każdy punkt paraboli z jego współrzędną x w układzie współrzędnych, w którym parabola ma równanie $y = x^2$. Z warunku $BC \parallel AV$ mamy $B + C = A + V$. Ponieważ $V = 0$, otrzymujemy $B + C = A$.

Rozważmy następującą inwolucję rzutową na kierownicy paraboli: najpierw dla danego punktu prowadzimy przez niego prostą prostopadłą do kierownicy i przecinamy ją z parabolą, następnie otrzymany punkt rzutujemy przez ognisko ponownie na parabolę, a uzyskane przecięcie rzutujemy z powrotem prostopadle na kierownicę. Inwolucja ta zamienia punkt w nieskończoności na rzut wierzchołka paraboli, czyli jest inwersją, ewentualnie złożoną z odbiciem, o środku w tym punkcie.

Dla paraboli $y = x^2$ jej ogniskiem jest punkt $(0, 1/4)$, a kierownicą prosta $y = -1/4$. Oznacza to, że prowadząc prostą równoległą do kierownicy przez ognisko paraboli i otrzymane przecięcia rzutując na kierownicę widzimy, że inwersja ta jest złożona z odbiciem i ma promień $1/2$. Wobec tego $BC = -1/4$, gdyż rzuty punktów B i C na kierownicę tworzą parę w tej inwolucji.

Teraz otrzymujemy

$$\begin{aligned} |XY|^2 &= (B^2 - C^2)^2 = (B + C)^2(B - C)^2 = \\ &= A^2(A^2 - 4BC) = A^2(A^2 + 1) = \\ &= A^4 + A^2 = |VA|^2, \end{aligned}$$

co daje punkt (a). Ponadto

$$\begin{aligned}|VX| \cdot |VZ| &= A^2B^2 = (B+C)^2B^2 = \\ &= (B^2+BC)^2 = \left(B^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \\ &= |FX|^2,\end{aligned}$$

co daje punkt (b).

Funkcje arytmetyczne

Antoni Łuczak

Teoria

Definicja (Funkcja arytmetyczna)

Funkcją arytmetyczną nazywamy dowolną funkcję $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$.

Definicja (Multiplikatywna funkcja arytmetyczna)

Mówimy, że funkcja arytmetyczna f jest *multiplikatywna*, jeśli dla wszystkich względnie pierwszych $a, b \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi równość $f(ab) = f(a)f(b)$.

Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n rozważmy

- $\mathrm{id}(n) = n$,
- $\mathbf{1}(n) = 1$,
- $\delta(n) = [n = 1]$, czyli $\delta(1) = 1$ i $\delta(n) = 0$ dla $n > 1$,
- $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ – suma k-tych potęg dzielników n,
- $\tau(n) = \sigma_0(n)$ – liczba dzielników n,
- $\Omega(n) = e_1 + \cdots + e_k$, przy czym $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ jest rozkładem na czynniki pierwsze,
- $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\Omega(n)}, & \text{gdy } n \text{ jest bezkwadratowe,} \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$
- $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$,
- $\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid k \leqslant n,\ k \perp n\}|$ – funkcja Eulera.

Ćwiczenie 1.
Udowodnić, że poza Ω każda z powyższych funkcyj jest multiplikatywna.

Definicja (Splot Dirichleta)

Dla funkcyj arytmetycznych f i g definiujemy *splot Dirichleta* wzorem

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Twierdzenie

Jeżeli funkcje arytmetyczne f, g są multiplikatywne, to $f * g$ również jest multiplikatywna.

Udowodnimy powyższe twierdzenie. Niech $a \perp b$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned}
(f * g)(ab) &= \sum_{d|ab} f(d) g\left(\frac{ab}{d}\right) = \sum_{d_1|a,\, d_2|b} f(d_1 d_2) g\left(\frac{ab}{d_1 d_2}\right) = \\
&= \sum_{d_1|a,\, d_2|b} f(d_1) f(d_2) g\left(\frac{a}{d_1}\right) g\left(\frac{b}{d_2}\right) = \\
&= \left(\sum_{d_1|a} f(d_1) g\left(\frac{a}{d_1}\right)\right) \left(\sum_{d_2|b} f(d_2) g\left(\frac{b}{d_2}\right)\right) = (f * g)(a)(f * g)(b),
\end{aligned}$$

co było do wykazania.

Ćwiczenie 2.
Pokazać, że zbiór wszystkich funkcyj arytmetycznych z działaniem splotu tworzy monoid przemienny, którego identycznością jest δ.

Ćwiczenie 3.
Wykazać, że $\mathbf{1} * \mu = \delta$.

Twierdzenie (Inwersja Möbiusa)

Funkcje arytmetyczne f i F spełniają zależność

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Wówczas

$$f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

Udowodnimy powyższe twierdzenie. Wystarczy pokazać, że jeśli $F = f * \mathbf{1}$, to $f = F * \mu$. Z poprzednich ćwiczeń wynika, że działanie $*$ jest łączne oraz $\mathbf{1} * \mu = \delta$. Zatem

$$F * \mu = f * \mathbf{1} * \mu = f,$$

co kończy dowód.

Ćwiczenie 4.
Udowodnić następującą, multiplikatywną wersję twierdzenia o inwersji Möbiusa. Jeżeli

$$F(n) = \prod_{d|n} f(d), \quad \text{to} \quad f(n) = \prod_{d|n} F(d)^{\mu(n/d)}.$$

Zadania

Zadanie 5.
Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Zadanie 6.
Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d)\right)^2.$$

Zadanie 7. (IMO Shortlist 1989 P11)
Ciąg (a_n) spełnia zależność

$$\sum_{d|n} a_d = 2^n.$$

Wykazać, że $n \mid a_n$.

Zadanie 8.
Dla $j \in \{1, 3\}$ zdefiniujmy

$$f_j(n) = \sum_{\substack{d|n \\ 4|d-j}} d.$$

Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi $f_1(n) \neq f_3(n)$.

Zadanie 9.
Dana jest funkcja arytmetyczna f oraz dodatnia liczba całkowita n. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} f(\gcd(k,n)) = (f * \varphi)(n).$$

Zadanie 10.
Dane są funkcje arytmetyczne g, h oraz liczba całkowita $n > 0$. Niech

$$f = g * h \quad \text{oraz} \quad G(n) = \sum_{k=1}^{n} g(k).$$

Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} h(k) G\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right).$$

Zadanie 11.
Niech $N \geqslant 3$. Udowodnić, że wartość oczekiwana sumy dzielników losowo wybranej liczby $n \in \{1, \ldots, N\}$ jest mniejsza niż N.

Zadanie 12. (72 OM, III etap, zadanie 1)
Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą k początkowymi liczbami pierwszymi oraz niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, \ldots, p_k$.

Zadanie 13.
Dana jest dodatnia liczba całkowita N. Parę $(a, b) \in \mathbb{Z}_+^2$ nazwiemy *dobrą*, jeżeli liczba

$$\frac{ab}{a+b}$$

jest całkowitym dzielnikiem liczby N. Niech $f(N)$ oznacza liczbę dobrych par. Udowodnić, że $f(N)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 14. (Bulgarian MO 1989)
Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{1989} \lambda(n) \left\lfloor \frac{1989}{n} \right\rfloor.$$

Zadanie 15.
Wykazać, że wszystkie współczynniki wielomianów cyklotomicznych są całkowite.

Rozwiązania

Autor rozwiązań: Antoni Łuczak.

Ćwiczenie 1.
Udowodnić, że poza Ω każda z powyższych funkcyj jest multiplikatywna.

Rozwiązanie:
Czytelnik zechce przekonać się, że funkcje id, $\mathbf{1}$, δ są multiplikatywne.

Zauważmy, że jeśli $a = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ oraz $b = q_1^{f_1} \cdots q_l^{f_l}$ są rozkładami na czynniki pierwsze, to

$$\Omega(ab) = e_1 + \cdots + e_k + f_1 + \cdots + f_l = \Omega(a) + \Omega(b).$$

Stąd natychmiast wynika multiplikatywność funkcji λ. Dla funkcji μ trzeba jeszcze zauważyć, że jeśli $a \perp b$, to liczba ab jest bezkwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy każda z liczb a i b jest bezkwadratowa.

Pokażemy, że dla każdego $k \geqslant 0$, funkcja σ_k jest multiplikatywna. Niech $a \perp b$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$\sigma_k(ab) = \sum_{d|ab} d^k = \sum_{d_1|a,\ d_2|b} (d_1 d_2)^k = \left(\sum_{d_1|a} d_1^k \right) \left(\sum_{d_2|b} d_2^k \right) = \sigma_k(a)\sigma_k(b),$$

zatem funkcja σ_k istotnie jest multiplikatywna.

Pozostało udowodnić multiplikatywność funkcji φ. Niech $a \perp b$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $x \leqslant a$, $y \leqslant b$ istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita $n \leqslant ab$, że $n \equiv x \pmod{a}$ oraz $n \equiv y \pmod{b}$. Ponadto, taka liczba n jest względnie pierwsza z ab wtedy i tylko wtedy, gdy $a \perp x$ oraz $b \perp y$. Wobec tego $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Ćwiczenie 2.
Pokazać, że zbiór wszystkich funkcyj arytmetycznych z działaniem splotu tworzy monoid przemienny, którego identycznością jest δ.

Rozwiązanie:
Oczywiście splot funkcyj arytmetycznych jest funkcją arytmetyczną. Czytelnik zechce przekonać się, że splot Dirichleta jest przemienny. Zauważmy ponadto, że dla dowolnych funkcyj arytmetycznych f, g, h zachodzi równość

$$(f * (g * h))(n) = \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c) = ((f * g) * h)(n),$$

zatem splot Dirichleta jest również łączny. Bezpośrednio sprawdzamy również, że dla każdego n

$$(f * \delta)(n) = \sum_{d|n} f(d)\delta\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)\delta(1) = f(n).$$

To kończy dowód.

Ćwiczenie 3.
Wykazać, że $\mathbf{1} * \mu = \delta$.

Rozwiązanie:
Niech $f = \mathbf{1} * \mu$. Funkcje $\mathbf{1}$ i μ są multiplikatywne, zatem f również. Wystarczy zatem pokazać, że wartości f oraz δ zgadzają się dla argumentów będących potęgami liczb pierwszych.

Bezpośrednio sprawdzamy, że $f(1) = 1 = \delta(1)$. Niech teraz $n = p^\alpha$, przy czym $\alpha > 0$. Wówczas

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\alpha} \mu(p^k) = \mu(1) + \mu(p) = 0 = \delta(n).$$

To kończy dowód.

Ćwiczenie 4.
Udowodnić następującą, multiplikatywną wersję twierdzenia o inwersji Möbiusa. Jeżeli

$$F(n) = \prod_{d|n} f(d), \quad \text{to} \quad f(n) = \prod_{d|n} F(d)^{\mu(n/d)}.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że na mocy Ćwiczenia 3

$$\begin{aligned}\prod_{d|n} F(d)^{\mu(n/d)} &= \prod_{d|n}\prod_{e|d} f(e)^{\mu(n/d)} = \prod_{e|n} f(e)^{\sum_{m|n/e}\mu(n/(em))} = \\ &= \prod_{e|n} f(e)^{(\mathbf{1}*\mu)(n/e)} = \prod_{e|n} f(e)^{\delta(n/e)} = f(n),\end{aligned}$$

co było do udowodnienia.

Zadanie 5.
Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Rozwiązanie:
Teza jest równoważna temu, że $\varphi * \mathbf{1} = \mathrm{id}$. Ponieważ rozważane funkcje są multiplikatywne, wystarczy uzasadnić równość dla argumentów będących potęgami liczb pierwszych. Zauważmy w tym celu, że

$$(\varphi * \mathbf{1})(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} \varphi(p^k) = 1 + \sum_{k=1}^{\alpha} \left(p^k - p^{k-1}\right) = p^\alpha,$$

co kończy dowód.

Zadanie 6.
Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d)\right)^2.$$

Rozwiązanie:
Teza jest równoważna temu, że

$$(\mathbf{1} * \tau^3) = (\mathbf{1} * \tau)^2,$$

przy czym górne indeksy oznaczają potęgowanie, nie zaś wielokrotny splot. Oczywiście jeżeli funkcja f jest multiplikatywna, to każda funkcja postaci $n \mapsto f(n)^k$ także. Zatem funkcje stojące po obu stronach powyższej równości są multiplikatywne i tezę wystarczy udowodnić dla potęg liczb pierwszych.

Ustalmy liczbę pierwszą p. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(\mathbf{1} * \tau^3)(p^\alpha) &= \sum_{k=0}^{\alpha} \tau(p^k)^3 = \sum_{k=0}^{\alpha} (k+1)^3 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\alpha} (k+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\alpha} \tau(p^k)\right)^2 = (\mathbf{1} * \tau)^2(p^\alpha),\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Zadanie 7. (IMO Shortlist 1989 P11)
Ciąg (a_n) spełnia zależność

$$\sum_{d|n} a_d = 2^n.$$

Wykazać, że $n \mid a_n$.

Rozwiązanie:
Z inwersji Möbiusa otrzymujemy

$$a_n = \sum_{d|n} 2^{n/d}\mu(d).$$

Niech p będzie dzielnikiem pierwszym n oraz niech $\alpha = v_p(n)$. Zauważmy, że jedyne niezerowe składniki powyżej sumy odpowiadają tym d, których wszystkie dzielniki pierwsze występują w pierwszej potędze. Możemy zatem sparować każdy dzielnik d niepodzielny przez p z dzielnikiem pd. Wówczas

$$a_n = \sum_{p\nmid d} \mu(d)\left(2^{n/d} - 2^{n/(dp)}\right) = \sum_{p\nmid d} \mu(d)2^{n/(dp)}\left(2^{n/d-n/(dp)} - 1\right).$$

Jeśli $p > 2$, to dla każdego d wykładnik $n/d - n/(pd)$ jest wielokrotnością $p^\alpha - p^{\alpha-1} = \varphi(p^\alpha)$. Wówczas na mocy twierdzenia Eulera $p^\alpha \mid a_n$. Z kolei dla $p = 2$ mamy

$$a_n = \sum_{2\nmid d} \mu(d)2^{n/(2d)}\left(2^{n/(2d)} - 1\right)$$

oraz

$$v_2\left(2^{n/(2d)}\right) = \frac{n}{2d} \geqslant 2^{\alpha-1} \geqslant \alpha.$$

Zatem każdy ze składników jest podzielny przez 2^α, więc $2^\alpha \mid a_n$. Wobec tego dla każdego dzielnika pierwszego p liczby n zachodzi $p^{v_p(n)} \mid a_n$, a więc $n \mid a_n$, co było do wykazania.

Zadanie 8.
Dla $j \in \{1, 3\}$ zdefiniujmy

$$f_j(n) = \sum_{\substack{d|n \\ 4|d-j}} d.$$

Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi $f_1(n) \neq f_3(n)$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$f_1(n) - f_3(n) = n\sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{-1} \chi(d),$$

przy czym

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{gdy } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 0, & \text{gdy } 2 \mid n. \end{cases}$$

Wystarczy pokazać, że

$$\sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{-1} \chi(d) \neq 0.$$

Zauważmy, że funkcje χ oraz $i\colon n \mapsto n^{-1}$ są multiplikatywne, więc ich splot również. Ponadto

$$(\chi * i)(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^{k-\alpha}\chi(p^k).$$

Każdy niezerowy wyraz powyższej sumy ma różny wykładnik p-adyczny oraz składnik dla $k = 0$ jest niezerowy. Wobec tego powyższa suma jest niezerowa, co kończy dowód.

Zadanie 9.
Dana jest funkcja arytmetyczna f oraz dodatnia liczba całkowita n. Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} f(\gcd(k,n)) = (f * \varphi)(n).$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że dla każdego $d \mid n$ takich $k \in \{1,\ldots,n\}$, że $\gcd(k,n) = d$ jest dokładnie $\varphi(n/d)$. Istotnie, każde takie k jest postaci $k = ad$, przy czym $a \leqslant n/d$ oraz $a \perp n/d$. Wobec tego

$$\sum_{k=1}^{n} f(\gcd(k,n)) = \sum_{d\mid n} f(d)\varphi\Big(\frac{n}{d}\Big) = (f * \varphi)(n),$$

co było do wykazania.

Zadanie 10.
Dane są funkcje arytmetyczne g, h oraz liczba całkowita $n > 0$. Niech

$$f = g * h \quad \text{oraz} \quad G(n) = \sum_{k=1}^{n} g(k).$$

Udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} h(k) G\Big(\Big\lfloor \frac{n}{k} \Big\rfloor\Big).$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{d\mid k} h(d) g\Big(\frac{k}{d}\Big) = \sum_{\substack{d,m\geqslant 1\\ dm\leqslant n}} h(d)g(m) = \sum_{d=1}^{n} h(d) G\Big(\Big\lfloor \frac{n}{d} \Big\rfloor\Big),$$

co kończy dowód.

Zadanie 11.
Niech $N \geqslant 3$. Udowodnić, że wartość oczekiwana sumy dzielników losowo wybranej liczby $n \in \{1,\ldots,N\}$ jest mniejsza niż N.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że $\sigma_1 = \mathbf{1} * \mathrm{id}$ oraz $n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}(k)$. Zatem na mocy poprzedniego zadania mamy

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \sigma_1(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor < N,$$

co było do udowodnienia.

Zadanie 12. (72 OM, III etap, zadanie 1)
Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą k początkowymi liczbami pierwszymi oraz niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, \ldots, p_k$.

Rozwiązanie:
Czytelnik zechce przekonać się, że teza jest równoważna równości

$$\sum_{k=1}^{N} \mu(\gcd(k, N)) = 0.$$

Na mocy Zadania 9 powyższa suma jest równa $(\mu * \varphi)(N)$. Ponieważ każda z funkcyj μ i φ jest multiplikatywna

$$(\mu * \varphi)(N) = \prod_{i=1}^{k} (\mu * \varphi)(p_i).$$

W powyższym iloczynie występuje czynnik

$$(\mu * \varphi)(2) = \mu(1)\varphi(2) + \mu(2)\varphi(1) = 1 - 1 = 0.$$

Zatem $(\mu * \varphi)(N) = 0$, co kończy dowód.

Zadanie 13.
Dana jest dodatnia liczba całkowita N. Parę $(a, b) \in \mathbb{Z}_+^2$ nazwiemy *dobrą*, jeżeli liczba

$$\frac{ab}{a+b}$$

jest całkowitym dzielnikiem liczby N. Niech $f(N)$ oznacza liczbę dobrych par. Udowodnić, że $f(N)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Ustalmy $a, b \in \mathbb{Z}_+$ i zapiszmy $a = rx$, $b = ry$, przy czym $r = \gcd(a, b)$, $x \perp y$. Para (a, b) jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x + y \mid rxy \quad \text{oraz} \quad rxy \mid (x + y)N.$$

Zauważmy, że stąd $x + y \mid r$, więc $r = k(x + y)$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_+$. Zatem $kxy \mid N$, jeśli tylko para (a, b) jest dobra. Ponadto, dla każdej takiej trójki $(k, x, y) \in \mathbb{Z}_+^3$, że $x \perp y$ oraz $kxy \mid N$ liczby $a = k(x+y)x$ i $b = k(x+y)y$ tworzą dobrą parę. Otrzymaliśmy zatem bijekcję między dobrymi parami a trójkami o podanych własnościach.

Następnie znajdziemy liczbę takich trójek. Zauważmy, że dla ustalonego $d \mid N$ jest dokładnie $2^{\omega(d)}$ przedstawień $d = xy$ dla $x \perp y$, przy czym $\omega(d)$ to liczba różnych liczb pierwszych w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby d. Wówczas liczbę k, taką że $kxy \mid N$, można wybrać na $\tau(N/d)$ sposobów. Wobec tego

$$f(N) = \sum_{d \mid N} 2^{\omega(d)} \tau\left(\frac{N}{d}\right) = (2^{\omega} * \tau)(N).$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że funkcja 2^{ω} jest multiplikatywna, więc funkcja f również. Ponadto

$$\begin{aligned}(2^{\omega} * \tau)(p^{\alpha}) &= \sum_{k=0}^{\alpha} 2^{\omega(p^k)} \tau(p^{\alpha-k}) = (\alpha + 1) + 2\sum_{k=1}^{\alpha} (\alpha - k + 1) = \\ &= (\alpha + 1) + \alpha(\alpha + 1) = (\alpha + 1)^2.\end{aligned}$$

To kończy dowód.

Zadanie 14. (Bulgarian MO 1989)
Obliczyć

$$\sum_{n=1}^{1989} \lambda(n) \left\lfloor \frac{1989}{n} \right\rfloor.$$

Rozwiązanie:
Na mocy Zadania 6 dla $h = \lambda$ oraz $g = \mathbf{1}$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{1989} \lambda(n) \left\lfloor \frac{1989}{n} \right\rfloor = \sum_{n=1}^{1989} (\lambda * \mathbf{1})(n).$$

Niech $f = \lambda * \mathbf{1}$. Wówczas funkcja f jest multiplikatywna jako splot funkcyj multiplikatywnych. Zauważmy ponadto, że

$$f(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^{\Omega(p^k)} = \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k = [2 \mid \alpha].$$

Stąd z multiplikatywności $f(n) = 1$, jeśli liczba n jest kwadratem liczby całkowitej oraz $f(n) = 0$ w przeciwnym wypadku. Stąd szukana suma jest równa liczbie kwadratów w zbiorze $\{1, \ldots, 1989\}$, czyli jest równa

$$\left\lfloor \sqrt{1989} \right\rfloor = 44.$$

Zadanie 15.
Wykazać, że wszystkie współczynniki wielomianów cyklotomicznych są całkowite.

Rozwiązanie:
Z definicji wielomianów cyklotomicznych mamy

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \perp n}} (x - \omega_n^k),$$

przy czym $\omega_n = e^{2i\pi/n}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że stąd

$$x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (x - \omega_n^k) = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x).$$

Wówczas z multiplikatywnej wersji inwersji Möbiusa wynika, że

$$\Phi_n(x) = \prod_{d \mid n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}.$$

Stąd Φ_n jest ilorazem A/B wielomianów o współczynnikach całkowitych, przy czym

$$A(x) = \prod_{\substack{d \mid n \\ \mu(n/d) = 1}} (x^d - 1), \qquad B(x) = \prod_{\substack{d \mid n \\ \mu(n/d) = -1}} (x^d - 1).$$

Stąd Φ_n jest wielomianem o współczynnikach wymiernych. Wówczas z lematu Gaussa wynika, że Φ_n ma współczynniki całkowite, co było do wykazania.

Wielomiany o współczynnikach całkowitych

Szymon Tobiasz

Teoria

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry)

Niech K będzie ciałem. Każdy niezerowy wielomian $P \in K[x]$ ma co najwyżej $\deg P$ pierwiastków nad K.

Lemat 1 (Dzielenie z resztą i lemat Bézouta)

Niech K będzie ciałem. Dla każdej pary wielomianów $P, Q \in K[x]$, $Q \neq 0$ istnieją takie wielomiany $W, R \in K[x]$, że

$$P = WQ + R$$

oraz $\deg R < \deg Q$. Ponadto istnieją wielomiany $G, H \in K[x]$ spełniające

$$GP + HQ = \gcd(P, Q).$$

Lemat 2

Niech $P \in \mathbb{Z}[x]$ i m będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$, jeśli tylko $a, b \in \mathbb{Z}$ spełniają $a \equiv b \pmod{m}$.

Lemat 3 (Schura)

Niech $P \in \mathbb{Z}[x]$ i niech S_P będzie zbiorem tych liczb pierwszych p, dla których istnieje takie $n \in \mathbb{Z}$, że $p \mid P(n)$. Jeśli wielomian P nie jest stały, to zbiór S_P jest nieskończony.

Definicja (Wielomian nierozkładalny)

Niech R będzie dziedziną całkowitości. Wielomian $P \in R[x]$ nazywamy *nierozkładalnym nad* R, jeśli jest nieodwracalny i z równości

$$P = QW$$

dla $Q, W \in R[x]$ wynika, że co najmniej jeden z wielomianów Q, W jest odwracalny.

Lemat 4 (Gaussa)

Jeśli $P \in \mathbb{Z}[x]$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$, to jest nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$.

Kryteria nierozkładalności nad $\mathbb{Z}$

Twierdzenie (Kryterium Eisenstiena)

Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Jeżeli istnieje taka liczba pierwsza p, że $p \nmid a_n$, $p \mid a_{n-1}, \dots, a_0$ oraz $p^2 \nmid a_0$, to wielomian P jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie (Kryterium Perrona)

Niech $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ oraz

$$|a_{n-1}| > 1 + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|.$$

Wówczas wielomian P jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

Alternatywnie, jeśli wielomian P jest unormowany, ma co najwyżej jeden pierwiastek α spełniający $|\alpha| \geqslant 1$ i $P(0) \neq 0$, to P jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie (Kryterium Cohna)

Niech $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Jeśli istnieje taka liczba całkowita b, że $0 \leqslant a_i < b$ dla każdego $i \in \{0, \ldots, n\}$ oraz $P(b)$ jest liczbą pierwszą, to wielomian P jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

Lemat 5 (Hensela)

Dana jest liczba pierwsza p, wielomian $P \in \mathbb{Z}[x]$ i liczba całkowita r. Jeśli $P(r) \equiv 0 \pmod{p^k}$ dla pewnego k oraz $P'(r) \not\equiv 0 \pmod{p}$, to dla każdego $m > k$ istnieje liczba całkowita s spełniająca

$$P(s) \equiv 0 \pmod{p^m} \quad \text{i} \quad s \equiv r \pmod{p^k}.$$

Ponadto liczba s jest wyznaczona jednoznacznie modulo p^m.

Lemat ten jest konsekwencją równości

$$P(x + p^n) \equiv P(x) + p^n P'(x) \pmod{p^{n+1}},$$

która wynika ze wzoru dwumianowego.

Liczby algebraiczne

Definicja (Liczba algebraiczna)

Powiemy, że liczba $\alpha \in \mathbb{C}$ jest *algebraiczna*, jeśli istnieje wielomian $P \in \mathbb{Q}[x]$, dla którego $P(\alpha) = 0$. Jeśli ponadto $P \in \mathbb{Z}[x]$ i P jest unormowany, to liczba α jest *algebraiczna całkowita*.

Definicja (Wielomian minimalny)

Wielomianem minimalnym liczby algebraicznej α nazwiemy wielomian unormowany $P \in \mathbb{Q}[x]$ o najmniejszym stopniu, dla którego $P(\alpha) = 0$.

Lemat 6

Teraz kilka faktów:

- Liczby algebraiczne tworzą ciało oznaczane przez $\overline{\mathbb{Q}}$.
- Liczby algebraiczne całkowite tworzą pierścień oznaczany przez $\overline{\mathbb{Z}}$.
- $\overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.
- Wielomian unormowany $P \in \mathbb{Q}[x]$ jest wielomianem minimalnym pewnej liczby algebraicznej wtedy i tylko wtedy, gdy P jest nierozkładalny.
- Niech P będzie wielomianem minimalnym α. Jeśli tylko wielomian $Q \in \mathbb{Q}[x]$ spełnia $Q(\alpha) = 0$, to $P \mid Q$.

Lemat 7 (Frobeniusa)

Niech p będzie liczbą pierwszą, a n – dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas z dokładnością do izomorfizmu istnieje dokładnie jedno ciało o p^n elementach oznaczane przez $\mathbb{F}_{p^n}$. W ciele tym zachodzi równość

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

Lemat 8 (Rozwiązania rekurencji liniowej)

Dane są liczby $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ i ciąg (x_n) spełniający dla $n > k$ rekurencję

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \dots + c_k x_{n-k}.$$

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ będą wszystkimi różnymi pierwiastkami wielomianu charakterystycznego

$$X^k - c_1 X^{k-1} - \dots - c_{k-1} X - c_k,$$

a m_i oznacza krotność pierwiastka α_i. Wówczas

$$x_n = f_1(n)\alpha_1^n + f_2(n)\alpha_2^n + \dots + f_l(n)\alpha_l^n,$$

przy czym f_i jest wielomianem stopnia co najwyżej $m_i - 1$. Ponadto każdy ciąg tej postaci spełnia powyższą rekurencję dla pewnych wyrazów początkowych $x_1, \dots, x_k$.

Zadania

Zadanie 1. (Asian Pacific MO 2021)
Dla wielomianu $P \in \mathbb{Z}[x]$ niech P_n to liczba takich par $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, że $|P(a)| \equiv |P(b)| \pmod{n}$ i $0 < a < b \leqslant n$. Znaleźć wszystkie wielomiany, dla których $P_n \leqslant 2021$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$.

Zadanie 2. (ELMO 2016)
Marek ma taki wielomian P o współczynnikach całkowitych, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $n \mid P(2^n)$. Udowodnić, że wielomian Marka jest wielomianem zerowym.

Zadanie 3. (IMO 2006 P5)
Niech $P \in \mathbb{Z}[x]$ będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 2$ i niech $Q(x) = P(P(\dots P(P(x))\dots))$ będzie r-krotnym złożeniem wielomianu P z nim samym. Udowodnić, że równanie $Q(x) = x$ ma co najwyżej n rozwiązań w liczbach całkowitych.

Zadanie 4. (China TST 2021)
Dane są wielomiany $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, takie że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p istnieje liczba całkowita m_p spełniająca

$$f(a) \equiv g(a + m_p) \pmod{p}$$

dla każdego $a \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że istnieje taka liczba wymierna r, że

$$f(x) = g(x + r)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. (InfinityDots MO 2018)
Niech $c_1, c_2, \dots, c_k$ będą liczbami całkowitymi. Rozważamy wszystkie ciągi liczb całkowitych $(a_n)_{n \geqslant 1}$ spełniające rekurencję

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$$

dla $n \geqslant k + 1$. Udowodnić, istnieją takie $a_1, \dots, a_k$ nie wszystkie zerowe oraz liczba całkowita b, że $a_p \equiv b \pmod{p}$ dla każdej liczby pierwszej p.

Zadanie 6. (Iran TST 2004)
Znaleźć wszystkie takie wielomiany $P \in \mathbb{Z}[x]$, że

$$m \perp n \iff P(m) \perp P(n)$$

dla wszystkich $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Zadanie 7. (USA TST 2010)
Dany jest wielomian $P \in \mathbb{Z}[x]$ spełniający $P(0) = 0$ oraz

$$\gcd(P(0), P(1), P(2), \dots) = 1.$$

Udowodnić, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych n zachodzi równość

$$\gcd(P(n) - P(0), P(n+1) - P(1), \dots) = n.$$

Zadanie 8. (Brazilian MO 2017)
Niech $a \in \mathbb{Z}_+$ i $p \neq 3$ będzie dzielnikiem pierwszym liczby $a^3 - 3a + 1$. Udowodnić, że p jest postaci $9k + 1$ lub $9k - 1$.

Zadanie 9. (Asian Pacific MO 2018)
Znaleźć wszystkie wielomiany $P \in \mathbb{Z}[x]$ o następującej własności.

$$P(s), P(t) \in \mathbb{Z} \implies P(st) \in \mathbb{Z}$$

dla wszystkich $s, t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 10. (USA TST 2020)
Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieje taki wielomian $P \in \mathbb{Z}[x]$ oraz liczba całkowita $m > 1$, że

(1) $\gcd(m, n) = 1$,
(2) żadna z liczb $P(0), P^2(0), \dots, P^{m-1}(0)$ nie jest podzielna przez n,
(3) liczba $P^m(0)$ jest podzielna przez n,

przy czym P^k oznacza k-krotne złożenie P ze sobą.

Zadanie 11. (RMM Shortlist 2018)
Znaleźć wszystkie wielomiany $f \in \mathbb{Z}[x]$ spełniające $f(p) \mid 2^p - 2$ dla każdej nieparzystej liczby pierwszej p.

Zadanie 12. (IMO Shortlist 2011 N6)
Wielomiany $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ spełniają $\gcd(P, Q) = 1$. Ponadto dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzą nierówności $P(n) > 0$ i $Q(n) > 0$ oraz

$$2^{Q(n)} - 1 \mid 3^{P(n)} - 1.$$

Udowodnić, że wielomian Q jest stały.

Zadanie 13. (USA TST 2008)
Niech n będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że $p^2 \nmid n$ dla każdej liczby pierwszej p. *Sygnaturą* wielomianu $f \in \mathbb{Z}[x]$ nazwiemy uporządkowany ciąg reszt z dzielenia przez n liczb $f(1), f(2), \dots, f(n)$. Znaleźć liczbę n-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, \dots, n-1\}$, które są sygnaturą pewnego wielomianu.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Adam Tutkowski*, Karol Musieliński.

Zadanie 1. (Asian Pacific MO 2021)
Dla wielomianu $P \in \mathbb{Z}[x]$ niech P_n to liczba takich par $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, że $|P(a)| \equiv |P(b)| \pmod{n}$ i $0 < a < b \leqslant n$. Znaleźć wszystkie wielomiany, dla których $P_n \leqslant 2021$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że jeśli wielomian P spełnia warunki zadania, to nie może być wielomianem stałym. Ponadto jeśli wielomian P spełnia warunki zadania, to $-P$ również. Stąd bez straty ogólności załóżmy, że współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni. Wtedy istnieje takie $M \in \mathbb{Z}_+$, że $P(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \geqslant M$.

Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n mamy

$$i \neq j \implies P(i) \not\equiv P(j) \pmod{n} \qquad (*)$$

dla wszystkich $i, j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Istotnie, przypuśćmy, że dla pewnych różnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi $P(i) \equiv P(j) \equiv r \pmod{n}$, przy czym $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Wtedy na mocy Lematu 2 dla każdego $a \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$P(an+i) \equiv P(an+j) \equiv r \pmod{n}.$$

Weźmy $A, k \in \mathbb{Z}_+$ spełniające warunki $A \geqslant \lceil M/n \rceil$ oraz $k > 2A + 2021$. Wówczas każda z $2(k-A)$ dodatnich liczb całkowitych

$$P(An+i),\ P(An+j),\ P((A+1)n+i),\ P((A+1)n+j),\ \ldots,\ P((k-1)n+i),\ P((k-1)n+j)$$

daje przy dzieleniu przez kn jedną z reszt

$$r,\ n+r,\ 2n+r,\ \ldots,\ (k-1)n+r.$$

Zatem istnieje $2(k-A) - k = k - 2A$ takich par (a, b), że $P(a) \equiv P(b) \pmod{kn}$ oraz $P(a), P(b) \geqslant 0$. Wobec tego $P_{kn} \geqslant k - 2A > 2021$ wbrew założeniu.

Pokażemy teraz, że wielomian $P(x)$ musi być wielomianem liniowym. Przypuśćmy, że $\deg P \geqslant 2$. Wówczas istnieje taka liczba $k \in \mathbb{Z}_+$, że $P(k) - P(1) \geqslant k$. Wówczas jednak

$$P(k) \equiv P(1) \pmod{P(k) - P(1)}$$

wbrew spostrzeżeniu $(*)$ dla $n = P(k) - P(1)$. Wobec tego wielomian P musi być liniowy.

Niech $P(x) = cx + d$. Zauważmy, że jeśli $c \geqslant 2$, to $P(1) \equiv P(2) \pmod{c}$, co jest sprzeczne z $(*)$. Stąd $c = 1$, ponieważ założyliśmy wcześniej, że $c > 0$. Jeżeli $d \leqslant -2023$, to każda z par

$$(a, b) \in \{(m, -2d - m) \mid 1 \leqslant m < -d\},$$

spełnia $|P(a)| = |P(b)|$, a takich par jest $-d - 1 \geqslant 2022$. Stąd $d \geqslant -2022$.

Zatem wielomian P musi być postaci

$$P(x) = x - d \quad \text{lub} \quad P(x) = -x + d$$

dla pewnego $d \leqslant 2022$. Czytelnik zechce sprawdzić, że każdy z tych wielomianów spełnia warunki zadania.

Zadanie 2. (ELMO 2016)
Marek ma taki wielomian P o współczynnikach całkowitych, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $n \mid P(2^n)$. Udowodnić, że wielomian Marka jest wielomianem zerowym.

Rozwiązanie:
Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Weźmy dowolną liczbę pierwszą $p \geqslant 3$. Wówczas na mocy małego twierdzenia Fermata

$$2^{pk} \equiv 2^k \pmod{p}.$$

Ponadto z założenia $pk \mid P(2^{pk})$, więc z Lematu 2

$$0 \equiv P(2^{pk}) \equiv P(2^k) \pmod{p}.$$

Wobec dowolności p musi zachodzić $P(2^k) = 0$. Zatem 2^k jest pierwiastkiem wielomianu P dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$. Stąd P jest wielomianem zerowym na mocy Twierdzenia 1, co było do wykazania.

Zadanie 3. (IMO 2006 P5)
Niech $P \in \mathbb{Z}[x]$ będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 2$ i niech $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ będzie r-krotnym złożeniem wielomianu P z nim samym. Udowodnić, że równanie $Q(x) = x$ ma co najwyżej n rozwiązań w liczbach całkowitych.

Rozwiązanie:
Rozważmy najpierw $r = 2$. Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą różnymi całkowitymi rozwiązaniami równania $Q(x) = x$ i niech $b_i = P(a_i)$. Oczywiście wtedy z założenia $a_i = P(b_i)$. Niech

$$m = |\{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k\}|.$$

Jeśli $a_j = b_j$ dla każdego j, to wielomian $P(x) - x$ jest niezerowy (ponieważ $\deg P \geqslant 2$) i ma m pierwiastków. Stąd jest on stopnia co najmniej m oraz $n = \deg P \geqslant m \geqslant k$.

Niech teraz $a_i \neq b_i$ dla pewnego indeksu i. Jeśli $b_i = b_j$, to oczywiście $a_i = P(b_i) = P(b_j) = a_j$ wbrew założeniu, że $a_1, \ldots, a_k$ są różne. Zatem $b_i \neq b_j$ i na mocy Lematu 2 mamy

$$\begin{aligned} b_i - b_j &= P(a_i) - P(a_j) \equiv 0 \pmod{a_i - a_j}, \\ a_i - a_j &= P(b_i) - P(b_j) \equiv 0 \pmod{b_i - b_j}. \end{aligned}$$

Zatem $|a_i - a_j| = |b_i - b_j|$. Zauważmy, że każda z równości $a_i = b_j$ lub $a_j = b_i$ natychmiast daje $a_i + b_i = a_j + b_j$. W przeciwnym razie z Lematu 2 zachodzi $|a_i - b_j| = |b_i - a_j|$. Stąd

$$\begin{aligned} &(a_i - a_j)^2 - (b_i - a_j)^2 = (b_i - b_j)^2 - (a_i - b_j)^2, \\ &\text{więc} \quad (a_i - b_i)(a_i + b_i - a_j - b_j) = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $a_i \neq b_i$, otrzymujemy $a_i + b_i = a_j + b_j$. Wobec dowolności j mamy

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \cdots = a_k + b_k.$$

Wtedy wielomian $P(x) - (a_i + b_i - x)$ ma co najmniej m pierwiastków, skąd ponownie $n = \deg P \geqslant m \geqslant k$. To kończy dowód dla $r = 2$.

Wykażemy teraz, że jeśli liczba całkowita a spełnia $Q(a) = a$, to $P(P(a)) = a$. Niech $a_0 = a$ i $a_k = P(a_{k-1})$ dla $k \geqslant 1$. Niech t będzie najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, dla której $a_t = a_0$. Jeśli $t \geqslant 2$, to na mocy Lematu 2

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &\mid P(a_1) - P(a_0) = a_2 - a_1, \\ a_2 - a_1 &\mid P(a_2) - P(a_1) = a_3 - a_2, \\ &\vdots \\ a_t - a_{t-1} &\mid P(a_t) - P(a_{t-1}) = a_1 - a_0. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$|a_1 - a_0| = |a_2 - a_1| = \cdots = |a_t - a_{t-1}|.$$

Ponieważ zachodzi równość

$$\sum_{j=1}^{t} (a_j - a_{j-1}) = a_t - a_0 = 0,$$

dla pewnego indeksu $j \leqslant t - 2$ mamy

$$a_{j+2} - a_{j+1} = -(a_{j+1} - a_j),$$

więc $a_{j+2} = a_j$. Po zaaplikowaniu P do obu stron tej równości $(t - j)$-krotnie otrzymujemy $a_2 = a_0$, czyli $P(P(a)) = a$. Przypadek $t = 1$ jest trywialny. To kończy dowód.

Zadanie 4. (China TST 2021)
Dane są wielomiany $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, takie że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p istnieje liczba całkowita m_p spełniająca

$$f(a) \equiv g(a + m_p) \pmod{p}$$

dla każdego $a \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że istnieje taka liczba wymierna r, że

$$f(x) = g(x + r)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Zauważmy najpierw, że jeśli $f \in \mathbb{Z}[x]$ i dla pewnej liczby pierwszej p kongruencja $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ma więcej niż $\deg f$ różnych rozwiązań modulo p, to każdy ze współczynników wielomianu f jest podzielny przez p. Istotnie, niech $\overline{f} \in \mathbb{F}_p$ będzie wielomianem uzyskanym z f poprzez redukcję współczynników modulo p. Jeśli $\overline{f} \neq 0$, to na mocy Lematu 1 mamy $x - \alpha \mid \overline{f}$, jeśli tylko $\overline{f}(\alpha) = 0$. Stąd różnych rozwiązań $f(x) \equiv 0$ modulo p jest co najwyżej $\deg \overline{f} \leqslant \deg f$.

Niech

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Bez straty ogólności przyjmujemy $\deg f = n \geqslant m = \deg g$, ponieważ po zamianie ról f i g wystarczy zastąpić m_p i r odpowiednio $-m_p$ oraz $-r$. Przypuśćmy, że $n > m$. Wówczas dla nieskończenie wielu liczb pierwszych $p > n$ równość

$$f(a) - g(a + m_p) \equiv 0 \pmod{p}$$

zachodzi dla każdego $a \in \mathbb{Z}$. Jednocześnie wielomian $f(x) - g(x + m_p)$ jest stopnia n, zatem na mocy powyższego lematu każdy z jego współczynników jest podzielny przez p. Stąd jednak współczynnik a_n jest podzielny przez nieskończenie wiele liczb pierwszych, więc $a_n = 0$ wbrew temu, że $\deg f = n$. Wobec tego musi zachodzić równość $n = m$.

Zauważmy, że współczynnik przy x^{n-1} wielomianu $f(x) - g(x + m_p)$ jest równy $a_{n-1} - b_{n-1} - nb_n m_p$. Analogicznie jak powyżej dowodzimy, że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych zachodzi

$$p \mid a_{n-1} - b_{n-1} - nb_n m_p.$$

Zatem z Lematu 2 dla nieskończenie wielu liczb pierwszych mamy

$$f(a) - g\left(a + \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{nb_n}\right) \equiv f(a) - g(a + m_p) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wobec tego

$$f(x) = g\left(x + \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{nb_n}\right),$$

więc liczba

$$r = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{nb_n} \in \mathbb{Q}$$

ma żądaną własność, co kończy dowód.

Zadanie 5. (InfinityDots MO 2018)
Niech $c_1, c_2, \ldots, c_k$ będą liczbami całkowitymi. Rozważamy wszystkie ciągi liczb całkowitych $(a_n)_{n \geqslant 1}$ spełniające rekurencję

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

dla $n \geqslant k + 1$. Udowodnić, istnieją takie $a_1, \ldots, a_k$ nie wszystkie zerowe oraz liczba całkowita b, że $a_p \equiv b \pmod{p}$ dla każdej liczby pierwszej p.

Rozwiązanie:
Jeśli $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, to bierzemy

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = k!.$$

Wówczas dla każdej liczby pierwszej p zachodzi $a_p \equiv 0 \pmod{p}$, ponieważ dla $p \leqslant k$ mamy $p \mid k!$, z kolei dla $p > k$ z rekurencji zachodzi $a_p = 0$. Wystarczy zatem wziąć $b = 0$.

Dalej załóżmy, że nie wszystkie liczby $c_1, \ldots, c_k$ są równe 0. Niech $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ będą (niekoniecznie różnymi) pierwiastkami wielomianu charakterystycznego

$$f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k.$$

Wówczas na mocy Lematu 8 ciąg

$$a_n := z_1^n + z_2^n + \cdots + z_k^n.$$

spełnia daną rekurencję.

Ponadto każdy wyraz a_n jest liczbą całkowitą. Istotnie, a_n jest wielomianem symetrycznym zmiennych $z_1, \dots, z_k$ o współczynnikach całkowitych, zatem istnieje taki wielomian G o współczynnikach całkowitych, że $a_n = G(e_1, \dots, e_k)$, przy czym

$$e_j = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_j}.$$

Wystarczy zatem zauważyć, że ze wzorów Viete'a

$$e_j(z_1, \dots, z_k) = (-1)^{j+1} c_j \in \mathbb{Z}.$$

Przypuśćmy teraz, że $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Wówczas oczywiście $e_1 = a_1 = 0$. Załóżmy, że $e_1 = \cdots = e_{m-1} = 0$ dla pewnego $2 \leqslant m \leqslant k$. Wówczas z tożsamości Newtona

$$a_m - e_1 a_{m-1} + e_2 a_{m-2} - \cdots + (-1)^{m-1} e_{m-1} a_1 + (-1)^m m e_m = 0,$$

więc $(-1)^m m e_m = 0$ i $e_m = 0$. Stąd na mocy zasady indukcji matematycznej

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_k = 0,$$

czyli ze wzorów Viete'a $c_1 = \cdots = c_k = 0$ wbrew założeniu. Zatem $a_1, \dots, a_k$ nie mogą być wszystkie zerowe.

Niech p będzie liczbą pierwszą. Czytelnik zechce sprawdzić, że

$$P(x_1, \dots, x_k) = (x_1 + \cdots + x_k)^p - (x_1^p + \cdots + x_k^p)$$

jest wielomianem symetrycznym o współczynnikach całkowitych oraz każdy jego współczynnik jest podzielny przez p. Stąd mamy

$$a_p = z_1^p + \cdots + z_k^p \equiv (z_1 + \cdots + z_k)^p = a_1^p \equiv a_1 \pmod{p}.$$

Wystarczy więc wziąć $b = a_1$. To kończy dowód.

Zadanie 6. (Iran TST 2004)
Znaleźć wszystkie takie wielomiany $P \in \mathbb{Z}[x]$, że

$$m \perp n \iff P(m) \perp P(n)$$

dla wszystkich $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Rozwiązanie:
Niech q będzie liczbą pierwszą oraz $q \nmid n$. Wtedy $n + q \perp n$, więc z założenia $P(n) \perp P(n+q)$. Na mocy Lematu 2 podzielność $q \mid P(n)$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $q \mid P(n+q)$, więc $q \nmid P(n)$. Stąd mamy

$$q \mid P(n) \implies q \mid n.$$

Zapiszmy

$$P(x) = xQ(x) + c,$$

przy czym $c = P(0)$. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to $P(p) = \pm p^m$ dla pewnego $m \geqslant 0$. Z drugiej strony

$$P(p) = pQ(p) + c.$$

Stąd dla $p > |c|$ mamy $P(p) = \pm 1$. Wobec tego wielomian P przyjmuje jedną z wartości ± 1 w nieskończenie wielu punktach, a więc jest stały. Bezpośrednio sprawdzamy, że żaden wielomian stały nie spełnia warunków zadania.

Pozostał przypadek $P(0) = 0$. Wówczas niech

$$P(x) = x^k (xQ(x) + c),$$

przy czym $k \geqslant 1$ i $c \neq 0$. Na mocy powyższego rozumowania dla każdej liczby pierwszej p wartość $P(p)$ jest potęgą p, zatem dla pewnego $m \geqslant 0$ zachodzi

$$pQ(p) + c = \pm p^m.$$

Jednak dla $p > |c|$ mamy $p \nmid pQ(p) + c$. Stąd dla nieskończenie wielu p zachodzi

$$pQ(p) + c = \pm 1.$$

Z Lematu 1 wnioskujemy wówczas, że $Q = 0$ i $c = \pm 1$. Zatem

$$P(x) = \pm x^k.$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że każdy wielomian tej postaci dla $k \geqslant 1$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 7. (USA TST 2010)
Dany jest wielomian $P \in \mathbb{Z}[x]$ spełniający $P(0) = 0$ oraz

$$\gcd(P(0), P(1), P(2), \dots) = 1.$$

Udowodnić, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych n zachodzi równość

$$\gcd(P(n) - P(0), P(n+1) - P(1), \dots) = n.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że P nie może być wielomianem stałym, zatem P' nie jest wielomianem zerowym. Wobec tego istnieje taka liczba całkowita t, że $P'(t) \neq 0$. Niech $P(x) = x^k Q(x)$, przy czym $Q(0) \neq 0$. Pokażemy, że liczba $n = p^k$ spełnia warunki zadania, jeśli tylko liczba pierwsza p nie jest dzielnikiem liczby $P'(t)$. Liczb o tej własności jest oczywiście nieskończenie wiele.

Zauważmy najpierw, że z Lematu 2 mamy

$$p^k \mid \gcd(P(p^k) - P(0), P(p^k+1) - P(1), P(p^k+2) - P(2), \dots),$$

ponieważ p^k dzieli każdą z różnic $P(p^k + i) - P(i)$. Ponadto z Lematu 5

$$P(t + p^k) - P(t) \equiv p^k P'(t) \pmod{p^{k+1}}.$$

Ponieważ $p \nmid P'(t)$, prawa strona nie jest podzielna przez p^{k+1}. Stąd

$$v_p\big(\gcd(P(p^k) - P(0), P(p^k+1) - P(1), P(p^k+2) - P(2), \dots)\big) = k.$$

Przypuśćmy teraz, że istnieje liczba pierwsza $q \neq p$, która dzieli każdą z liczb

$$P(p^k) - P(0),\ P(p^k+1) - P(1),\ P(p^k+2) - P(2),\ \dots .$$

Ponieważ $p^k \perp q$, istnieją takie $a, b \in \mathbb{Z}$, że

$$ap^k + bq = 1.$$

Wówczas na mocy Lematu 2 dla każdego $i \geqslant 0$ zachodzi

$$P(i+1) = P(i + ap^k + bq) \equiv P(i) \pmod{q}.$$

Ponadto z założenia $P(0) = 0$, zatem indukcyjnie $q \mid P(i)$ dla każdego $i \geqslant 0$. To jednak przeczy założeniu

$$\gcd(P(0), P(1), P(2), \dots) = 1.$$

Zatem nie może istnieć taka liczba pierwsza q. Zatem

$$\gcd(P(p^k) - P(0), P(p^k+1) - P(1), P(p^k+2) - P(2), \dots) = p^k.$$

To kończy dowód.

Zadanie 8. (Brazilian MO 2017)
Niech $a \in \mathbb{Z}_+$ i $p \neq 3$ będzie dzielnikiem pierwszym liczby $a^3 - 3a + 1$. Udowodnić, że p jest postaci $9k + 1$ lub $9k - 1$.

Rozwiązanie:
Niech t będzie jednym z pierwiastków wielomianu

$$f(x) = x^2 - ax + 1 \in \mathbb{F}_p[x].$$

Jeśli f rozkłada się nad $\mathbb{F}_p$, to $t \in \mathbb{F}_p$, w przeciwnym wypadku $t \in \mathbb{F}_{p^2}$, ponieważ $\deg f = 2$. W obu przypadkach mamy $t \in \mathbb{F}_{p^2}$, ponieważ $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^2}$. Ponadto $f(0) = 1$, więc $t \neq 0$. Zatem z równości $f(t) = 0$ po podzieleniu przez t otrzymujemy

$$a = t + \frac{1}{t}.$$

Z założenia $p \mid a^3 - 3a + 1$, więc w ciele $\mathbb{F}_{p^2}$ zachodzi równość

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)^3 - 3\left(t + \frac{1}{t}\right) + 1 = 0.$$

Stąd otrzymujemy $t^6 + t^3 + 1 = 0$ oraz

$$t^9 - 1 = (t^3 - 1)(t^6 + t^3 + 1) = 0,$$

czyli $t^9 = 1$. Gdyby $t^3 = 1$, to $3 = 0$ w ciele $\mathbb{F}_{p^2}$, co jest niemożliwe dla $p \neq 3$. Wobec tego element t jest rzędu dokładnie 9 w $\mathbb{F}_{p^2}$. Wówczas z twierdzenia Lagrange'a $9 \mid p^2 - 1$. Stąd wynika teza zadania.

Zadanie 9. (Asian Pacific MO 2018)
Znaleźć wszystkie wielomiany $P \in \mathbb{Z}[x]$ o następującej własności.

$$P(s), P(t) \in \mathbb{Z} \implies P(st) \in \mathbb{Z}$$

dla wszystkich $s, t \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że wielomian P spełnia warunki zadania dla $s, t > 0$ oraz

$$P(0) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$$

i wielomiany $P(x)$ oraz $P(-x)$ są różne. Udowodnimy, że istnieje nieskończenie wiele takich $r \in \mathbb{Z}_+$, że wielomian $P(x) - r$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$. Niech r będzie liczbą pierwszą oraz

$$r > \sup_{|z| \leqslant 1} |P(z)|.$$

Wówczas każdy pierwiastek wielomianu $P(x) - r$ ma moduł większy od 1. Gdyby

$$P(x) - r = F(x)G(x)$$

dla pewnych wielomianów $F, G \in \mathbb{Z}[x]$, to podstawiamy do powyższej równości $x = 0$ i wnioskujemy, że jeden z tych wielomianów ma wyraz wolny równy ± 1. Jednak każdy z pierwiastków tego wielomianu ma moduł większy od 1. Zatem na mocy wzorów Viete'a musi być to wielomian stały równy ± 1, więc odwracalny, co kończy dowód tego stwierdzenia.

Niech $P(x) - r$ będzie nierozkładalnym wielomianem. Ponieważ $P(0) = 0$ oraz $P(x) \to +\infty$ dla $x \to +\infty$, istnieje takie $\alpha > 0$, że $P(\alpha) = r$. Wówczas z założenia $k := P(\alpha^2) \in \mathbb{Z}$, czyli α jest pierwiastkiem wielomianu $P(x^2) - k$. Wielomian $P(x) - r$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$ (z lematu Gaussa), zatem dzieli każdy wielomian w $\mathbb{Q}[x]$, który zeruje się w α. Stąd

$$P(x) - r \mid P(x^2) - k.$$

Analogicznie $-\alpha$ jest pierwiastkiem nierozkładalnego wielomianu $P(-x) - r$, więc

$$P(-x) - r \mid P(x^2) - k.$$

Wielomiany $P(x) - r$ oraz $P(-x) - r$ są różne i nierozkładalne, więc są względnie pierwsze. Ich iloczyn dzieli więc $P(x^2) - k$. Wielomiany te są jednak tego samego stopnia. Porównujemy ich współczynniki wiodące i wnioskujemy, że

$$(P(x) - r)(P(-x) - r) = a(-1)^n (P(x^2) - k),$$

przy czym a jest współczynnikiem wiodącym P i $n := \deg P$. Stąd po podstawieniu $x = 0$

$$r^2 = a(-1)^{n+1} k.$$

Ponieważ możemy dobrać $r > a$, musi zachodzić $a = 1$.

Powyższe rozumowanie możemy przeprowadzić dla nieskończenie wielu r, ponadto α dobrane dla różnych r są różne. Wobec tego równość

$$P(\alpha)^2 = r^2 = (-1)^{n+1} k = (-1)^{n+1} P(\alpha^2)$$

zachodzi dla nieskończenie wielu α, więc $P(x^2) = (-1)^{n+1} P(x)^2$. Zauważmy, że stąd P nie ma niezerowych pierwiastków. Istotnie, jeśli $\lambda \neq 0$ jest pierwiastkiem P krotności m, to

$$P(x) = (x - \lambda)^m U(x),$$

przy czym $U(\lambda) \neq 0$. Wówczas z otrzymanej wcześniej równości λ^2 jest pierwiastkiem P. Niech q będzie jego krotnością. Wówczas

$$P(x^2) = (x^2 - \lambda^2)^q V(x^2) = (x - \lambda)^q (x + \lambda)^q V(x^2),$$

przy czym $V(\lambda^2) \neq 0$. Po porównaniu krotności λ po obu stronach $P(x^2) = (-1)^{n+1} P(x)^2$ mamy $q = 2m$, więc λ^2 jest pierwiastkiem P krotności $2m$. Jeśli liczby λ^{2^k} są różne, to wielomian P ma nieskończenie wiele pierwiastków. Jeśli jednak $\mu := \lambda^{2^a} = \lambda^{2^b}$, to pierwiastek μ ma zarazem krotności $2^a m$ i $2^b m$.

Wobec powyższego $P(x) = x^n$ dla pewnego nieparzystego $n \geqslant 1$.

Niech teraz P będzie dowolnym niestałym wielomianem spełniającym warunki zadania. Wówczas rozważmy wielomian

$$Q(x) = \begin{cases} P(x) - P(0), & \text{jeśli } \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty, \\ -(P(x) - P(0)), & \text{jeśli } \lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty, \end{cases}$$

który też spełnia warunki zadania. Rozważmy największe takie $m \geqslant 0$, że $Q(x) = R(x^{2^m})$ dla pewnego $R \in \mathbb{Z}[x]$. Wówczas wielomian R nie jest parzysty i spełnia warunki zadania dla $s, t > 0$. Wobec tego $R(x) = x^n$ dla nieparzystego $n \geqslant 1$. Stąd wnioskujemy, że

$$P(x) = \pm x^N + c,$$

przy czym liczby $N \geqslant 0$ i c są całkowite. Czytelnik zechce sprawdzić, że każdy wielomian tej postaci spełnia warunki zadania.

Zadanie 10. (USA TST 2020)
Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieje taki wielomian $P \in \mathbb{Z}[x]$ oraz liczba całkowita $m > 1$, że

(1) $\gcd(m, n) = 1$,
(2) żadna z liczb $P(0), P^2(0), \ldots, P^{m-1}(0)$ nie jest podzielna przez n,
(3) liczba $P^m(0)$ jest podzielna przez n,

przy czym P^k oznacza k-krotne złożenie P ze sobą.

Rozwiązanie:
Udowodnimy najpierw następujący lemat. Jeśli dla ustalonego a liczba k jest najmniejsza taka, że $P^k(a) \equiv a \pmod{p^t}$, to liczba k jest p-gładka, czyli nie ma dzielników pierwszych większych od p. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem t. Przypadek $t = 1$ jest oczywisty, ponieważ jest tylko p różnych reszt. Załóżmy teraz, że lemat jest prawdziwy dla $t - 1$. Niech m będzie najmniejsze takie, że $P^m(a) \equiv a \pmod{p^{t-1}}$. Wówczas $m \mid k$ oraz z założenia indukcyjnego m jest p-gładkie. Na mocy Lematu 2 mamy

$$(P^m)^{k/m}(a) \equiv (P^m)^{k/m-1}(a) \equiv \cdots \equiv P^m(a) \equiv a \pmod{p^{t-1}}.$$

Stąd każda z powyższych liczb daje jedną z p reszt $\{0, p^{t-1}, \ldots, (p-1)p^{t-1}\}$ modulo p^t. Zatem z minimalności k musi zachodzić $k/m \leqslant p$. Stąd k jest p-gładkie, co kończy dowód lematu.

Niech $p_1, \ldots, p_k$ będą k początkowymi liczbami pierwszymi. Przypuśćmy, że liczba

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}, \quad a_1, \ldots, a_k > 0,$$

spełnia warunki zadania. Niech $m_k > 0$ będzie najmniejszą taką liczbą, że

$$P^{m_k}(0) \equiv 0 \pmod{p_k^{a_k}}.$$

Wówczas oczywiście $m = \operatorname{lcm}(m_1, \ldots, m_k)$. Ponieważ z założenia $m > 1$, istnieje taki indeks i, że $m_i > 1$. Na mocy powyższego lematu liczba m_i jest p_i-gładka, czyli także p_k-gładka. Ponieważ $m_i > 1$, istnieje taka liczba pierwsza p_j, $j \leqslant k$, że $p_j \mid m_i$. Wówczas jednak $p_j \mid m$ i $p_j \mid n$ wbrew założeniu $\gcd(m, n) = 1$. Wobec tego, jeśli liczba n spełnia warunki zadania, to zbiorem jej wszystkich dzielników pierwszych nie może być k początkowych liczb pierwszych dla żadnego $k \geqslant 1$.

Niech teraz p będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby n, $t = v_p(n)$. Załóżmy, że istnieje taka liczba pierwsza $q < p$, że $q \nmid n$. Skonstruujemy wielomian P spełniający warunki zadania dla $m = q$. Wybierzmy liczby całkowite $x_1, \ldots, x_{q-1}$ niepodzielne przez p i różne modulo p. Ponadto niech $x_0 = x_q = 0$. Rozważmy wielomian (interpolacyjny Lagrange'a)

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{q-1} x_{i+1} \left(\prod_{\substack{j \neq i \\ j \in \{0, \ldots, q-1\}}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \in \mathbb{Z}_{p^t}[x].$$

Zauważmy, że $Q(x_i) \equiv x_{i+1} \pmod{p^t}$, zatem $m = q$ jest najmniejsze takie, że $Q^m(0) \equiv 0 \pmod{p^t}$.

Zapiszmy $Q(x) = a_q x^q + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Konstruujemy współczynniki $b_0, \ldots, b_q$ spełniające jednocześnie

$$b_i \equiv 0 \pmod{n/p^t} \quad \text{oraz} \quad b_i \equiv a_i \pmod{p^t}.$$

Wówczas wielomian $P(x) = b_q x^q + \cdots + b_1 x + b_0$ spełnia $P(0) \equiv 0 \pmod{n/p^t}$ oraz $P^k(0) \equiv Q^k(0) \pmod{p^t}$. Czytelnik zechce przekonać się, że tak dobrany wielomian P oraz $m = q$ spełniają warunki zadania.

Wobec powyższego rozumowania, liczba $n \geqslant 2$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy zbiorem wszystkich jej dzielników pierwszych nie jest k początkowych liczb pierwszych dla żadnego $k \geqslant 1$.

Zadanie 11. (RMM Shortlist 2018)
Znaleźć wszystkie wielomiany $f \in \mathbb{Z}[x]$ spełniające $f(p) \mid 2^p - 2$ dla każdej nieparzystej liczby pierwszej p.

Rozwiązanie:
Rozważmy najpierw przypadek $f(0) \neq 0$. Niech S będzie zbiorem tych liczb pierwszych p, dla których $p \mid f(p)$. Jeśli $p \in S$, to na mocy Lematu 2

$$f(0) \equiv f(p) \equiv 0 \pmod{p},$$

a więc $p \mid f(0)$. Zatem zbiór S jest skończony.

Weźmy teraz liczbę pierwszą $p \notin S$. Przypuśćmy, że istnieje liczba pierwsza $q > 3$, taka że $q \mid f(p)$. Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje liczba całkowita R spełniająca układ kongruencji

$$R \equiv p \pmod{q}, \quad R \equiv -1 \pmod{q-1}.$$

Wówczas $R \perp q(q-1)$. Z twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w postępach arytmetycznych wynika zatem, że istnieje liczba pierwsza $r \neq p$ taka, że

$$r \equiv R \pmod{q(q-1)}.$$

Na mocy Lematu 2 otrzymujemy

$$f(r) \equiv f(p) \equiv 0 \pmod{q},$$

czyli $q \mid f(r)$. Z założenia liczba $f(r)$ dzieli $2^r - 2$, zatem $q \mid 2^r - 2$. Stąd

$$2 \equiv 2^r \equiv 2^{-1} \pmod{q},$$

czyli $4 \equiv 1 \pmod{q}$ wbrew założeniu $q > 3$. Zatem jeśli tylko $p \notin S$, to każdy z dzielników pierwszych liczby $f(p)$ należy do zbioru $\{2, 3\}$. Ponadto dla każdej dostatecznie dużej liczby pierwszej $p \equiv 5 \pmod{6}$ mamy

$$v_2(2^p - 2) = 1, \quad v_3(2^p - 2) = 1$$

oraz $p \notin S$. Ponadto z założenia $f(p) \mid 2^p - 2$, więc

$$f(p) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}.$$

Wobec tego przynajmniej jedna z tych liczb jest wartością wielomianu f w nieskończenie wielu punktach. Zatem f jest stały i równy c dla pewnego $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Pozostaje przypadek $f(0) = 0$. Wtedy zachodzi

$$f(x) = x^m g(x)$$

dla pewnego $m \geqslant 1$ oraz $g(0) \neq 0$. Zauważmy, że wielomian g też spełnia warunki zadania. Na mocy powyższego rozumowania g jest stały i równy c dla pewnego $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Z założenia mamy

$$3^m g(3) = f(3) \mid 2^3 - 2 = 6.$$

Stąd $m = 1$ i $f(x) = \pm x$ lub $f(x) = \pm 2x$.

Powyższe przypadki dają wszystkie rozwiązania

$$f(x) = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm x,\ \pm 2x.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że każdy z tych wielomianów spełnia warunki zadania.

Zadanie 12. (IMO Shortlist 2011 N6)
Wielomiany $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ spełniają $\gcd(P, Q) = 1$. Ponadto dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzą nierówności $P(n) > 0$ i $Q(n) > 0$ oraz
$$2^{Q(n)} - 1 \mid 3^{P(n)} - 1.$$
Udowodnić, że wielomian Q jest stały.

Rozwiązanie:
Wielomiany P i Q są względnie pierwsze w $\mathbb{Q}[x]$. Zatem z Lematu 1 istnieją takie wielomiany $A, B \in \mathbb{Z}[x]$ oraz liczba całkowita $c \neq 0$, że
$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = c.$$
Niech $k = \deg P$, a ℓ niech będzie współczynnikiem wiodącym wielomianu P. Rozważmy zbiór
$$\mathcal{A} = \{p \text{ pierwsze} \mid p \leqslant \max\{|c|, k\} \text{ lub } p \mid \ell\}.$$
Jest to zbiór skończony. Dla każdej liczby pierwszej $p \in \mathcal{A}$ niech $e_p = v_p(Q(1))$. Ponieważ $Q(1) > 0$, liczba $Q(1)$ jest niezerowa, więc każde e_p jest skończone. Rozważmy układ kongruencji
$$n \equiv 1 \pmod{p^{e_p+1}} \qquad \text{dla każdego } p \in \mathcal{A}.$$
Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje taka liczba całkowita n_0, że każda liczba postaci
$$n = n_0 + t \prod_{p \in \mathcal{A}} p^{e_p+1}$$
spełnia powyższy układ. W szczególności takich n jest nieskończenie wiele. Dla każdego $p \in \mathcal{A}$ oraz każdego takiego n, na mocy Lematu 2 mamy
$$Q(n) \equiv Q(1) \not\equiv 0 \pmod{p^{e_p+1}}.$$
Stąd $v_p(Q(n)) \leqslant e_p$.

Ustalmy jedno z powyższych n i niech $a = Q(n)$, $M = 2^a - 1$. Wówczas z założenia mamy
$$M = 2^{Q(n)} - 1 \mid 3^{P(n)} - 1.$$
W szczególności $\gcd(3, M) = 1$. Niech $b = \operatorname{ord}_M 3$. Wtedy z powyższej równości $b \mid P(n)$. Pokażemy, że b dzieli też każdą z liczb postaci $P(n + ta)$, przy czym $t \in \mathbb{Z}_+$. Na mocy Lematu 2 mamy
$$Q(n + ta) \equiv Q(n) \equiv 0 \pmod{a},$$
czyli $a \mid Q(n + ta)$. Stąd
$$M = 2^a - 1 \mid 2^{Q(n+ta)} - 1.$$
Wówczas z założenia $M \mid 3^{P(n+ta)} - 1$, więc istotnie $b \mid P(n + ta)$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że
$$k!\ell a^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(n + ia).$$
Wobec powyższego mamy $b \mid k!\ell a^k$ oraz
$$b \mid \gcd(P(n), k!\ell a^k).$$
Niech teraz r będzie dzielnikiem pierwszym liczby $\gcd(P(n), k!\ell a^k)$. Przypuśćmy, że $r \notin \mathcal{A}$. Wówczas
$$r > |c|, \qquad r > k, \qquad r \nmid \ell.$$
Zatem $r \mid a = Q(n)$. Jednocześnie $r \mid P(n)$, więc $r \mid c$ z tożsamości Bezouta, co przeczy $r > |c|$. Zatem każdy dzielnik pierwszy liczby $\gcd(P(n), k!\ell a^k)$ należy do $\mathcal{A}$. Ponadto dla każdego $p \in \mathcal{A}$ mamy
$$v_p\big(\gcd(P(n), k!\ell a^k)\big) \leqslant v_p(k!\ell a^k) \leqslant v_p(k!\ell) + k e_p.$$
Prawa strona powyższej równości nie zależy od wyboru n. Ponadto b jest dzielnikiem $\gcd(P(n), k!\ell a^k)$, więc możemy ograniczyć b przez stałą zależną tylko od P i Q.

Ponieważ $M \mid 3^b - 1$, mamy
$$2^{Q(n)} - 1 = M \leqslant 3^b - 1.$$
Ponieważ możemy dobrać dowolnie duże n, niemożliwe jest, aby $Q(n) \to +\infty$ dla $n \to +\infty$. Jednak $Q(n) > 0$, więc wielomian Q jest stały, co było do wykazania.

Zadanie 13. (USA TST 2008)
Niech n będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że $p^2 \nmid n$ dla każdej liczby pierwszej p. *Sygnaturą* wielomianu $f \in \mathbb{Z}[x]$ nazwiemy uporządkowany ciąg reszt z dzielenia przez n liczb $f(1), f(2), \ldots, f(n)$. Znaleźć liczbę n-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, \ldots, n-1\}$, które są sygnaturą pewnego wielomianu.

Rozwiązanie:
Niech $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, przy czym $p_1, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnimy, że ciąg

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, \ldots, n-1\}^n$$

jest sygnaturą pewnego wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej $p \mid n$ oraz wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zachodzi

$$i \equiv j \pmod p \implies a_i \equiv a_j \pmod p.$$

Warunek ten jest konieczny. Istotnie, jeśli ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ jest sygnaturą wielomianu f, $p \mid n$ oraz $i \equiv j \pmod p$, to

$$a_i \equiv f(i) \equiv f(j) \equiv a_j \pmod p.$$

Pokażemy teraz, że powyższy warunek jest wystarczający. Ustalmy liczbę pierwszą $p \mid n$. Wtedy reszta a_i modulo p zależy tylko od reszty i modulo p. Ponadto każda funkcja $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ jest wyznaczona przez pewien wielomian nad $\mathbb{F}_p$ (możemy użyć wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a jak w Zadaniu 10), zatem istnieje taki wielomian $f_p \in \mathbb{Z}[x]$, że

$$f_p(i) \equiv a_i \pmod p$$

dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$. Stosujemy teraz chińskie twierdzenie o resztach na współczynnikach wielomianów f_p dla różnych liczb pierwszych $p \mid n$. Stąd wnioskujemy, że istnieje wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$ o tej własności, że

$$f \equiv f_p \pmod p$$

dla każdej liczby pierwszej $p \mid n$. Wówczas oczywiście $f(i) \equiv a_i \pmod p$ dla każdej liczby pierwszej $p \mid n$ oraz $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wobec dowolności p mamy $f(i) \equiv a_i \pmod n$.

Pozostaje wyznaczyć liczbę dopuszczalnych ciągów. Dla ustalonego dzielnika pierwszego p liczby n możemy niezależnie wybrać resztę modulo p na każdej z p klas reszt modulo p, co daje dokładnie p^p możliwości. Wybory dla różnych liczb pierwszych są niezależne, a po ich ustaleniu chińskie twierdzenie o resztach jednoznacznie wyznacza każdy wyraz ciągu modulo n. Zatem liczba wszystkich sygnatur jest równa

$$\prod_{p \mid n} p^p.$$

Minimalizacja w geometrii

Mateusz Wawrzyniak

Teoria

Twierdzenie (Problem Fagnana)

Niech punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CA. Wśród wszystkich trójkątów DEF, trójkąt spodkowy ma najmniejszy obwód.

Twierdzenie (Punkt Fermata)

Punkt Fermata F definiowany jako punkt, którego suma odległości do A, B i C jest minimalna. Jeżeli wszystkie kąty w trójkącie ABC mają miary mniejsze od $120°$ to punkt F spełnia:

- Kąty między prostymi AF, BF, CF są równe $120°$.
- Nazwijmy przez X, Y i Z takie punkty, że trójkąty BCX, CAY, ABZ są równoboczne oraz część wspólna każdego z nich z ABC jest odcinkiem. Wtedy punkt F jest przecięciem prostych AX, BY i CZ.

Twierdzenie (Ptolemeusza)

Dla danego czworokąta $ABCD$ na płaszczyźnie zachodzi nierówność

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ jest cykliczny.

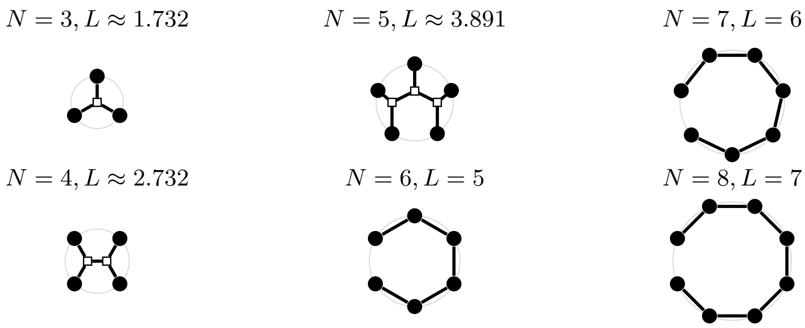
Twierdzenie (Weierstrassa)

Jeżeli A jest ograniczonym zbiorem zwartym punktów płaszczyzny oraz f jest funkcją ciągłą zdefiniowaną na tym zbiorze, przyjmującą wartości rzeczywiste, to istnieje takie $a \in A$, że $f(a) \leqslant f(b)$ dla każdego $b \in A$.

Definicja (Euklidesowe Drzewo Steinera)

Dla danych N punktów na płaszczyźnie *drzewo Steinera* jest zbiorem odcinków łączących wszystkie z nich o minimalnej sumie długości.

Poniższy rysunek pokazuje drzewa Steinera dla zbiorów wierzchołków wybranych wielokątów foremnych.



Zadania

Zadanie 1.
Dany jest kąt ostry przy wierzchołku A i punkt P leżący wewnątrz tego kąta. Na różnych ramionach kąta wyznaczyć punkty X i Y, takie że $AX = AY$ oraz wartość wyrażenia $PX + PY$ jest minimalna.

Zadanie 2.
Dany jest odcinek AB. Wyznaczyć taki punkt X, aby wartość wyrażenia

$$AX + BX - XY$$

była minimalna, gdzie Y jest rzutem prostokątnym X na AB.

Zadanie 3.
Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AD \leqslant AB$. Wewnątrz tego prostokąta wyznaczyć takie punkty P i Q, dla których wyrażenie

$$AP + DP + PQ + QB + QC$$

przyjmuje najmniejszą wartość.

Zadanie 4.
Niech $ABCDEF$ będzie takim sześciokątem wypukłym, że

$$BC = FA = AB, \quad EF = CD = DE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle FAB = 60^\circ.$$

Niech G i H będą punktami leżącymi wewnątrz tego sześciokąta. Udowodnić, że

$$BG + CG + GH + HE + HF \geqslant AD.$$

Zadanie 5.
Dany jest trójkąt ABC o bokach o długościach a, b, c. Dla punktu P wewnątrz tego trójkąta wyznaczyć minimalną wartość wyrażenia

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

gdzie x, y, z są odległościami P od prostych zawierających boki trójkąta.

Zadanie 6.
Dana jest stała $\alpha > 1$ oraz trójkąt ABC o bokach o długościach a, b, c. Dla punktu P wewnątrz tego trójkąta wyznaczyć minimalną wartość wyrażenia

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha$$

gdzie x, y, z są odległościami P od prostych zawierających boki trójkąta.

Zadanie 7. (Nierówność Erdösa)
Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC. Oznaczmy odległości P od wierzchołków trójkąta jako x, y, z, a odległości P od prostych zawierających boki trójkąta jako p, r, q. Udowodnić, że

$$x + y + z \geqslant 2(p + r + q).$$

Zadanie 8.
Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC. Oznaczmy odległości P od wierzchołków trójkąta jako x, y, z, a odległości P od prostych zawierających boki trójkąta jako p, r, q. Udowodnić, że

$$xyz \geqslant 8pqr.$$

Zadanie 9. (German MO 2022)
Dany jest zbiór S pewnych n punktów na płaszczyźnie i jego drzewo Steinera T. Punkty przecięcia odcinków drzew° T, które nie należą do zbioru S nazywamy *punktami Steinera.* Drzewo T dobrano tak, aby punktów Steinera było możliwie mało. Udowodnić, że każdy z punktów ze zbioru S jest końcem co najwyżej 3 odcinków drzewa T, a każdy punkt Steinera – dokładnie 3 odcinków drzewa.

Zadanie 10.
Dany jest zbiór S pewnych n punktów na płaszczyźnie i jego drzewo Steinera T. Punkty przecięcia odcinków drzewa T, które nie należą do zbioru S nazywamy *punktami Steinera.* Drzewo T dobrano tak, aby punktów Steinera było możliwie mało. Udowodnić, że punktów Steinera jest co najwyżej $n - 2$.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Michał Oprocha*, Karol Musieliński.

Zadanie 1.
Dany jest kąt ostry przy wierzchołku A i punkt P leżący wewnątrz tego kąta. Na różnych ramionach kąta wyznaczyć punkty X i Y, takie że $AX = AY$ oraz wartość wyrażenia $PX + PY$ jest minimalna.

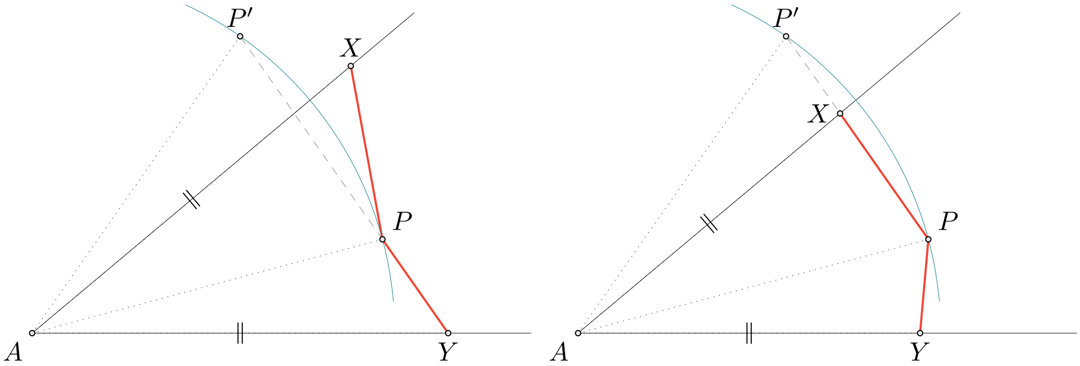
Rozwiązanie:
Zróbmy obrót o kąt $\sphericalangle XAY$ o środku w punkcie A. Wówczas

$$Y \to X, \qquad P \to P', \qquad X \to X'.$$

Stąd z własności obrotu oraz z nierówności trójkąta mamy, że

$$PX + PY = PX + P'Y' = PX + P'X \geqslant PP'.$$

Równość, czyli wartość minimalna zachodzi, gdy punkty P, X, P' są współliniowe.



Zadanie 2.
Dany jest odcinek AB. Wyznaczyć taki punkt X, aby wartość wyrażenia

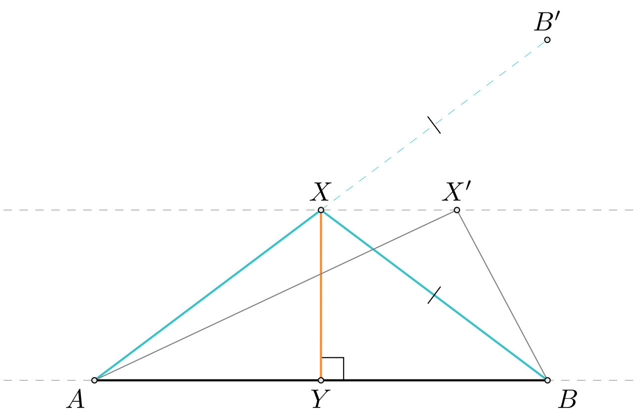
$$AX + BX - XY$$

była minimalna, gdzie Y jest rzutem prostokątnym X na AB.

Rozwiązanie:
Na początek ustalmy, że odległość XY jest stała, czyli Y leży w stałej odległości od prostej AB. Będziemy chcieli zminimalizować wyrażenie $AX + BX$. Przeprowadźmy przez punkt X prostą równoległą do AB oraz odbijmy przez nią punkty A oraz B odpowiednio uzyskując punkty A' oraz B'. Wówczas z nierówności trójkąta

$$AX + BX = AX + BX' \geqslant AB',$$

gdzie wartość minimalna jest osiągana, gdy punkty A, X, B' są współliniowe. Dzieje się to, gdy X leży na symetralnej odcinka AB.



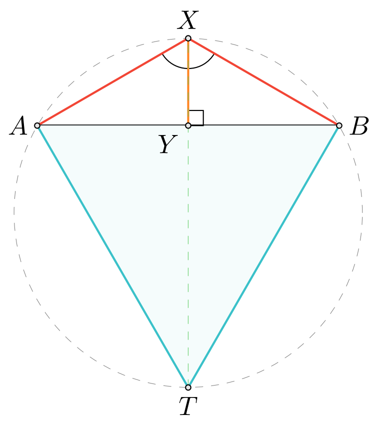
Po przeciwnej stronie prostej AB dorysujmy taki punkt T, że trójkąt ATB jest równoboczny. Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $ATBX$ mamy

$$AX \cdot BT + BX \cdot AT \geqslant AB \cdot XT, \quad \text{więc} \quad AX + BX \geqslant XT,$$

gdzie równość zachodzi, gdy punkty A, T, B, X leżą na jednym okręgu — jest to spełnione, gdy $\sphericalangle AXB = 120°$. Pozostaje zauważyć, że $XT = XY + TY$, więc

$$AX + BX \geqslant XT, \quad \text{więc} \quad AX + BX - XY \geqslant TY = AB\sqrt{3},$$

gdzie równość zachodzi, gdy X leży na symetralnej AB oraz $\sphericalangle AXB = 120°$. Oczywiście punkt X o opisanych własnościach istnieje.



Zadanie 3.
Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AD \leqslant AB$. Wewnątrz tego prostokąta wyznaczyć takie punkty P i Q, dla których wyrażenie

$$AP + DP + PQ + QB + QC$$

przyjmuje najmniejszą wartość.

Rozwiązanie:
Dorysujmy taki punkt X, aby trójkąt DAX był równoboczny oraz punkty P i X leżały po przeciwnej stronie prostej AD. Analogicznie rysujemy punkt Y leżący po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt Q. Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokątów $APDX$ oraz $BYCQ$ mamy

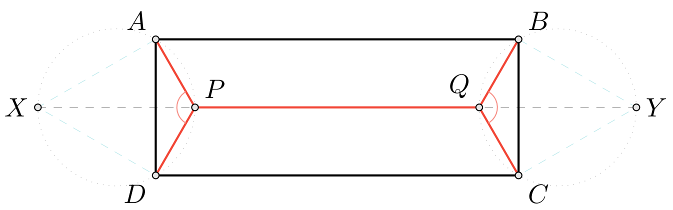
$$AP \cdot DX + AX \cdot DP \geqslant AD \cdot PX, \quad \text{więc} \quad AP + DP \geqslant PX,$$

$$BQ \cdot CY + BY \cdot CQ \geqslant BC \cdot QY, \quad \text{więc} \quad BQ + CQ \geqslant QY.$$

W takim razie z nierówności trójkąta mamy

$$AP + DP + PQ + QB + QC \geqslant XP + PQ + QY \geqslant XY,$$

gdzie równość zachodzi, gdy punkty X, P, Q, Y są współliniowe oraz czworokąty $APDX$ i $BYCQ$ są cykliczne. Oczywiście punkty P i Q spełniające warunki zadania istnieją.



Zadanie 4.
Niech $ABCDEF$ będzie takim sześciokątem wypukłym, że

$$BC = FA = AB, \quad EF = CD = DE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle FAB = 60^\circ.$$

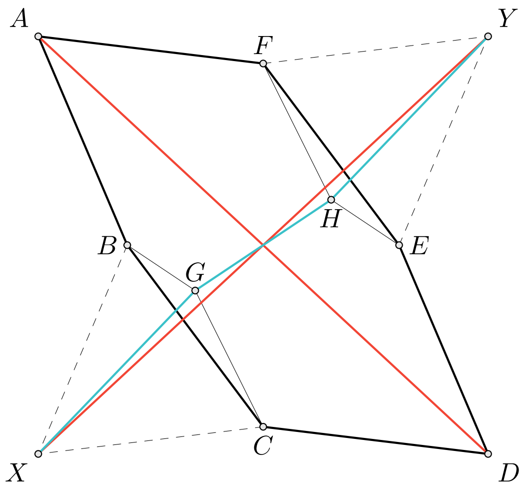
Niech G i H będą punktami leżącymi wewnątrz tego sześciokąta. Udowodnić, że

$$BG + CG + GH + HE + HF \geqslant AD.$$

Rozwiązanie:
Skoro $FA = AB$ oraz $\sphericalangle FAB = 60^\circ$, to trójkąt BAF jest równoboczny. Analogicznie trójkąt EDC jest równoboczny. Niech X, Y będą takimi punktami, że trójkąty XCB oraz YFE są równoboczne oraz punkty te leżą po przeciwnych stronach prostych BC i EF niż punkty G i H. Oczywiście X, Y nie zawierają się w czworokącie $BCEF$. Nietrudno zauważyć, że figura $ABXCDEYF$ jest symetryczna względem prostej BE. Stąd $XY = AD$. Z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokątów $XCGB$ i $YFHE$ oraz z nierówności trójkąta dostajemy

$$(BG + CG) + GH + (HE + HF) \geqslant XG + GH + HY \geqslant XY = AD.$$

Wartość minimalna jest osiągalna, gdy punkty X, G, H, Y leża na jednej prostej oraz czworokąty $XCGB$ i $YFHE$ są cykliczne.



Zadanie 5.
Dany jest trójkąt ABC o bokach o długościach a, b, c. Dla punktu P wewnątrz tego trójkąta wyznaczyć minimalną wartość wyrażenia

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

gdzie x, y, z są odległościami P od prostych zawierających boki trójkąta.

Rozwiązanie:
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

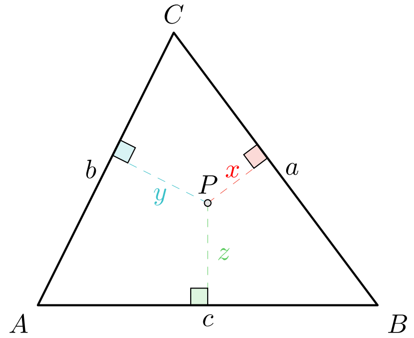
$$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} \geqslant ax + by + cz = 2[ABC].$$

Stąd

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{(2[ABC])^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

gdzie równość zachodzi dla

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$



Zadanie 6.
Dana jest stała $\alpha > 1$ oraz trójkąt ABC o bokach o długościach a, b, c. Dla punktu P wewnątrz tego trójkąta wyznaczyć minimalną wartość wyrażenia

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha$$

gdzie x, y, z są odległościami P od prostych zawierających boki trójkąta.

Rozwiązanie:
Z nierówności Höldera dla $1/\alpha + 1/\beta = 1$ mamy

$$(x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha)^{1/\alpha} \cdot (a^\beta + b^\beta + c^\beta)^{1/\beta} \geqslant ax + by + cz = 2[ABC].$$

Stąd

$$x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \geqslant \frac{(2[ABC])^\alpha}{(a^\beta + b^\beta + c^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta}}},$$

gdzie równość zachodzi dla

$$\frac{x^\alpha}{a^\beta} = \frac{y^\alpha}{b^\beta} = \frac{z^\alpha}{c^\beta}.$$

Zadanie 7. (Nierówność Erdösa)
Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC. Oznaczmy odległości P od wierzchołków trójkąta jako x, y, z, a odległości P od prostych zawierających boki trójkąta jako p, r, q. Udowodnić, że

$$x + y + z \geqslant 2(p + r + q).$$

Rozwiązanie:
Na początek udowodnimy następujący lemat:

Dowód. Niech a, b, c, d, e, f oznaczają odpowiednio długości boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Zauważmy, że

$$\sphericalangle A = \sphericalangle D, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle E, \quad \sphericalangle C = \sphericalangle F.$$

Poprowadźmy proste PQ i RS przechodzące odpowiednio przez punkty A i D, prostopadłe do prostych BC i EF ($P, R \in BC$, $Q, S \in EF$). Wówczas

$$BF \geqslant PQ = RS.$$

Stąd

$$2BF \geqslant PQ + RS,$$

czyli

$$2BF \geqslant (a \sin B + f \sin C) + (c \sin C + d \sin B),$$

oraz analogicznie

$$\begin{aligned} 2BD &\geqslant (c \sin A + b \sin B) + (e \sin B + f \sin A), \\ 2DF &\geqslant (e \sin C + d \sin A) + (a \sin A + b \sin C). \end{aligned} \tag{1}$$

Ponadto

$$R_A = \frac{BF}{2 \sin A}, \quad R_C = \frac{BD}{2 \sin C}, \quad R_E = \frac{DF}{2 \sin E}.$$

Z zależności (1) wynika, że

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{1}{2}(a + b + \cdots) = \frac{P}{2}.$$

□

Niech A_1, B_1, C_1 będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Skonstruujmy punkty A', B', C' tak, aby czworokąty C_1PB_1A', A_1PC_1B' oraz B_1PA_1C' były równoległobokami. Wówczas sześciokąt $A_1C'B_1A'C_1B'$ spełnia warunki nierówności dla sześciokąta, co daje

$$R_{A'} + R_{B'} + R_{C'} \geqslant p + r + q.$$

Skoro $\triangle C_1B_1A' \equiv \triangle C_1PB_1$ oraz $\sphericalangle C_1PB_1 = 90°$, to promień okręgu opisanego na trójkącie $\triangle C_1PB_1$ jest równy $x/2$. Analogicznie otrzymujemy promienie $y/2$ oraz $z/2$.

$$x + y + z \geqslant 2(p + r + q).$$

Zadanie 8.
Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC. Oznaczmy odległości P od wierzchołków trójkąta jako x, y, z, a odległości P od prostych zawierających boki trójkąta jako p, r, q. Udowodnić, że

$$xyz \geqslant 8pqr.$$

Rozwiązanie:
Niech $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, a h_a oznacza wysokość trójkąta opuszczoną na bok a. Zauważmy, że

$$p + x \geqslant h_a.$$

Po pomnożeniu przez liczbę a otrzymujemy

$$ap + ax \geqslant ah_a.$$

Mamy, że

$$ap + bq + cr = 2S = ah_a,$$

gdzie S oznacza pole trójkąta ABC. W takim razie

$$ap + ax \geqslant ah_a = ap + bq + cr, \quad \text{więc} \quad ax \geqslant bq + cr.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną oraz średnią geometryczną otrzymujemy, że

$$bq + cr \geqslant 2\sqrt{bcqr},$$

czyli

$$ax \geqslant 2\sqrt{bcqr}.$$

Analogicznie dostajemy, że

$$by \geqslant 2\sqrt{acpr}, \qquad cz \geqslant 2\sqrt{abpq}.$$

Tak uzyskane trzy nierówności mnożymy stronami i dostajemy

$$abc \cdot xyz \geqslant 8abc \cdot pqr.$$

Po podzieleniu obu stron powyższej nierówności przez $abc > 0$ otrzymujemy

$$xyz \geqslant 8pqr.$$

Zadanie 9. (German MO 2022)
Dany jest zbiór S pewnych n punktów na płaszczyźnie i jego drzewo Steinera T. Punkty przecięcia odcinków drzew° T, które nie należą do zbioru S nazywamy *punktami Steinera*. Drzewo T dobrano tak, aby punktów Steinera było możliwie mało. Udowodnić, że każdy z punktów ze zbioru S jest końcem co najwyżej 3 odcinków drzewa T, a każdy punkt Steinera – dokładnie 3 odcinków drzewa.

Rozwiązanie:
Oczywiście nie może istnieć punkt Steinera, z którego wychodzi tylko jeden odcinek, ponieważ wydłużałby on niepotrzebnie drogę - usuwając ten wierzchołek nic się nie zmieni. Podobnie nie może istnieć punkt Steinera P połączony tylko z dwoma punktami A, B, ponieważ z nierówności trójkąta mamy

$$AB \leqslant AP + PB,$$

a więc w najlepszym razie punkt P niczego nie poprawia. Stąd po usunięciu punktu P wynik nie pogorszy się

Załóżmy teraz, że istnieje punkt Steinera O połączony z co najmniej czterema innymi punktami (niekoniecznie zwykłymi) A, B, C, D. Ponieważ suma czterech kątów środkowych o wierzchołku w O wynosi $360°$, co najmniej jeden z nich jest nie większy niż $90°$. Bez straty ogólności niech będzie to $\sphericalangle AOB$.

Jeżeli trójkąt AOB jest rozwartokątny, to jego największy kąt leży albo przy A, albo przy B. Przyjmijmy bez straty ogólności pierwszy przypadek. Wtedy odcinek OB jest najdłuższym bokiem trójkąta, a zatem możemy zastąpić odcinek OB odcinkiem AB (figura pozostaje spójna). W ten sposób otrzymujemy, że trójkąt OAB jest ostrokątny.

Dla trójkąta ostrokątnego OAB istnieje punkt Steinera (punkt Fermata) P, który jest jedynym punktem minimalizującym sumę odległości

$$AP + BP + OP.$$

Punkt ten leży ściśle wewnątrz trójkąta. W szczególności zachodzi nierówność

$$AP + BP + OP < AO + BO,$$

co oznacza, że możemy zastąpić drogi AO, BO trzema drogami AP, BP, OP, co skróci łączną długość sieci.

Oznacza to, że przypadek, gdy punkt Steinera ma więcej niż cztery odcinki drzewa T nie zachodzi. Stąd zawsze punkt Steinera ma dokładnie 3 odcinki drzewa T. Dodatkowo udowodniliśmy, że zwykły punkt ma maksymalnie 3 odcinki drzewa T.

Zadanie 10.
Dany jest zbiór S pewnych n punktów na płaszczyźnie i jego drzewo Steinera T. Punkty przecięcia odcinków drzewa T, które nie należą do zbioru S nazywamy *punktami Steinera*. Drzewo T dobrano tak, aby punktów Steinera było możliwie mało. Udowodnić, że punktów Steinera jest co najwyżej $n - 2$.

Rozwiązanie:
Z poprzedniego zadania wiemy, że każdy punkt Steinera jest końcem dokładnie 3 odcinków. Niech s będzie liczbą punktów Steinera. Wówczas drzewo T składa się z $n + s - 1$ odcinków. Ponadto z lematu o uściskach dłoni

$$2(n + s - 1) = 3s + \sum_{p \in S} \deg(p) \geqslant 3s + n.$$

Wobec tego $s \leqslant n - 2$, co było do wykazania.

Liga zadaniowa Finał++

Liga zadaniowa była ostatnim kołem grupy Finał++ przed finałem 75. Olimpiady Matematycznej. Chcieliśmy, aby to wyjątkowe spotkanie miało możliwie aktywny charakter, dlatego poprosiliśmy każdego z uczestników o zaproponowanie kilku zadań.

Zadania

Zadanie 1.
Równanie $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste: $x_1 < x_2 < x_3$. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $\lceil x_3^n \rceil$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 2.
Niech $k > 1$ będzie ustaloną liczbą nieparzystą oraz dla liczb całkowitych $n \geqslant 0$ niech

$$f_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ k \mid n-2i}} \binom{n}{i}$$

Udowodnić, że f_n spełnia następującą rekurencję:

$$f_n^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i f_{n-i}$$

Zadanie 3. (IMO Shortlist 2016 A3)
Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 3$ o tej własności, że dla wszystkich ciągów liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, spełniających $|a_k| + |b_k| = 1$ dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$, istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1, -1\}$, że

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} x_k b_k \right| \leqslant 1.$$

Zadanie 4. (60 OM, III etap, zadanie 3)
Niech P, Q, R będą wielomianami stopnia co najmniej jeden, o współczynnikach rzeczywistych, spełniającymi dla każdej liczby rzeczywistej x równości

$$P(Q(x)) = Q(R(x)) = R(P(x)).$$

Wykazać, że $P = Q = R$.

Zadanie 5.
Znaleźć wszystkie funkcje $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniające równanie

$$f\left(f(x)y + \frac{x}{y}\right) = xyf(x^2 + y^2).$$

Zadanie 6.
Wyznaczyć wszystkie dodanie liczby całkowite a, b spełniające równanie:

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = 1.$$

Zadanie 7. (Zwardoń 2007, mecz matematyczny)
Parami różne liczby całkowite dodatnie c_1, c_2, $\ldots$, c_n spełniają warunek

$$\tfrac{1}{c_1} + \tfrac{1}{c_2} + \ldots + \tfrac{1}{c_n} \geqslant 2.$$

Udowodnić, że zbiór c_1, c_2, $\ldots$, c_n posiada dwa rozłączne podzbiory o tej samej sumie elementów.

Zadanie 8.
Wewnątrz trójkąta ABC znajduje się punkt P. Przecięcia AP i BC, BP i AC, CP i AB to odpowiednio X, Y, Z. Punkty Y i Z spełniają zależności: $AZ^2 = CZ \cdot ZP$ i $AY^2 = YB \cdot YP$. Punkty K i L to odpowiednio przecięcia $\odot(XAB)$ i AC, $\odot(XAC)$ i AB. Udowodnić, że $KL \parallel BC$

Zadanie 9.
W trójkącie ABC ze środkiem okręgu wpisanego I prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Niech J to odbicie I względem BC oraz niech SJ przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $P \neq S$. Wykazać, że $AI = IP$.

Zadanie 10.
Punkty C oraz D leżą na okręgu o średnicy AB. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie X, a punkt P jest środkiem odcinka AB. Okrąg ω jest opisany na trójkącie CPB, a Q to antypoda P w okręgu ω. Nazwijmy U przecięcie prostej QX z okręgiem ω. Udowodnić, że punkty A, D, P oraz U leżą na jednym okręgu.

Zadanie 11. (65 OM, III etap, zadanie 6)
W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R. Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR.

Zadanie 12.
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest rozwarty. Punkty E, F są punktami przecięcia dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku A z wysokościami trójkąta ABC opuszczonymi odpowiednio z wierzchołków B, C. Punkty M, N leżą odpowiednio na odcinkach EC, FB i spełniają $\sphericalangle EMA = \sphericalangle BCA$ oraz $\sphericalangle ANF = \sphericalangle ABC$. Wykazać, że punkty E, F, N i M leżą na jednym okręgu.

Zadanie 13.
Dany jest zbiór A zawierający 2137 liczb. Największy dzielnik pierwszy każdej z liczb w zbiorze A jest mniejszy od 75. Udowodnić, że w zbiorze A są takie 4 liczby a, b, c, d, że $abcd$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 14. (IMO Shortlist 1991 P8)
Dany jest zbiór $n \geqslant 3$ punktów płaszczyzny S, z których żadne 3 nie są współliniowe. Wykazać, że istnieje taki zbiór T składający się z $2n - 5$ punktów płaszczyzny, że każdy trójkąt wyznaczony przez 3 różne punkty zbioru S zawiera punkt ze zbioru T.

Zadanie 15. (Russian MO 2015)
Ryba rozpoczyna grę na w punkcie 0 osi liczbowej, na której zaznaczono wszystkie liczby całkowite. W k-tym ruchu ryba wybiera zwrot (w prawo lub w lewo) i przesuwa się w tę stronę o $2^k + 1$ jednostek. Zatem pierwszy ruch następuje o 3 jednostki, drugi ruch o 5 jednostek itd. Rozstrzygnąć, czy w taki sposób ryba może odwiedzić wszystkie liczby naturalne na tej osi, przy założeniu, że liczby mogą być odwiedzane wielokrotnie.

Zadanie 16.
Grzybiarz Marek znalazł w lesie $n = 2m$ swoich ulubionych grzybów – hub, rosnących na szczytach drzew o wysokościach kolejno $1, 2, \ldots, n$ metrów. Do zbierania grzybów Marek ma teleskopową drabinę o zakresie wysokości od 1 do n metrów (drabina o danej wysokości pozwala mu zebrać grzyby tylko z drzewa o tej wysokości). Początkowo drabina ma długość jednego metra (dłuższej nie byłby w stanie przywieść samochodem). Marek jest leniwy, więc nie chce zmieniać wysokości drabiny (zgodnie ze swoimi umiejętnościami rachunkowymi) więcej niż n razy. Marek potrafi mnożyć liczbę przez 2 i podać dokładny wynik lub pomniejszony o 1. Ponadto zauważył on, że liczenie na palcach jest ograniczające (pozwala mu liczyć tylko do dziesięciu) – do obliczeń używa więc teraz grzybów – co pozwala mu liczyć aż do n (po tej liczbie niestety licznik się przekręca). Udowodnić, że Marek może szczęśliwie wrócić z grzybobrania (wrócić samochodem wraz z wszystkimi grzybami oraz drabiną).

Zadanie 17. (IMO Shortlist 2001 C5)
Wyznaczyć wszystkie taki skończone ciągi $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, że dla każdego $j \in \{0, \ldots, n\}$ liczba x_j jest równa liczbie wystąpień liczby j w tym ciągu.

Zadanie 18. (Maamoun, Meyniel 1987)
Dane są dodatnie liczby całkowite m i n. Marek i Mirek grają w grę. Marek ma planszę $m \times n$ (m wierszy i n kolumn), a Mirek ma planszę $1 \times n$. Na każdym polu każdej z plansz znajduje się dwustronny żeton, który jedną stronę ma czarną, a drugą białą. Na początku gry Marek ustawia w dowolny sposób żetony na swojej planszy. Następnie Mirek robi to samo na swojej planszy. Każdy następny ruch gracza polega na odwróceniu pewnej liczby żetonów (być może 0) na swojej planszy, przy czym w jednym ruchu gracz może odwrócić co najwyżej 1 żeton w każdym wierszu. Gracze wykonują takie ruchy na zmianę. Jeżeli w dowolnym momencie układ żetonów w jedynym wierszu planszy Mirka będzie taki sam, jak w którymś z wierszy planszy Marka, to Marek wygrywa. Wykazać, że Marek ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy $n < 2m$.

Zadanie 19.
Niech $C(k)$ oznacza sumę wszystkich dzielników pierwszych liczby k, na przykład

$$C(1) = 0, \quad C(2) = 2, \quad C(45) = 8.$$

Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite spełniające równość $C(2^n + 1) = C(n)$.

Zadanie 20. (Brazilian MO 2022)
Niech n będzie liczbą całkowitą. Przez $S(n)$ oznaczmy najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą następujące warunki:

(1) $S(n) \geqslant n$,

(2) $2 \mid S(n) - n$,

(3) nie istnieją takie dodatnie liczby całkowite k i $x_1, x_2, \ldots, x_k$, że

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \quad \text{oraz} \quad S(n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2.$$

Udowodnić, że istnieje taka rzeczywista stała $c > 0$ oraz liczba całkowita n_0, że dla każdego $n \geqslant n_0$ zachodzi $S(n) \geqslant cn^{3/2}$.

Zadanie 21. (Russian MO 2017)
Na tablicy znajduje się n dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$. Maria chce zapisać n liczb rzeczywistych $b_1,\ldots,b_n$, takich że:

(1) $b_i \geqslant a_i$ dla każdego i,

(1) jeżeli $b_i \geqslant b_j$, to b_i/b_j jest liczbą całkowitą.

Udowodnić, że można dobrać takie liczby, spełniając dodatkowo warunek

$$b_1 \cdots b_n \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 \cdots a_n.$$

Zadanie 22.
Niech liczby całkowite m i n będą dodatnie i względnie pierwsze. Udowodnić, że

$$\varphi(5^m - 1) \neq 5^n - 1.$$

Zadanie 23. (Balkan MO 2000)
Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje taki zbiór S składający się z n dodatnich liczb całkowitych, że dla dowolnie wybranych $1 \leqslant k \leqslant n$ elementów zbioru S ich średnia arytmetyczna jest potęgą o wykładniku większym od 1.

Zadanie 24.
Zbiór S dodatnich liczb całkowitych jest *fajny* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch $a, b \in S$ zachodzi $(a - b)^2 \mid ab$. Wykazać, że dla każdego n istnieje zbiór fajny o mocy co najmniej n.

Rozwiązania

Autorzy rozwiązań: Maria Bażęcka, Wiktor Jażdżyński, Julian Kapustka, Oskar Kowalski, Karol Musieliński, Michał Oprocha, Albert Siekański.

Zadanie 1.

Równanie $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ ma trzy rozwiązania rzeczywiste: $x_1 < x_2 < x_3$. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $\lceil x_3^n \rceil$ jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Niech $f(x) := x^3 - 3x^2 + 1$. Ponieważ $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(\sqrt{8}) < 0$ i $f(3) > 0$, możemy oszacować, gdzie leżą pierwiastki funkcji f:

$$x_1 \in (-1, 0), \quad x_2 \in (0, \sqrt{8}), \quad x_3 \in (\sqrt{8}, 3).$$

Niech $S_n := x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Z wzorów Viete'a mamy $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ oraz $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$, stąd:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad S_2 = S_1^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 9.$$

Ponieważ wszystkie pierwiastki f spełniają $x_i^3 = 3x_i^2 - 1$, mnożąc przez x_i^n i sumując stronami, otrzymujemy równość $S_{n+3} = 3S_{n+2} - S_n$. Ponadto $S_0 = 3$, więc wszystkie S_n są liczbami całkowitymi podzielnymi przez 3.

Teraz udowodnimy, że $S_n = \lceil x_3^n \rceil$.

(i) $\boxed{|x_1|, |x_2| < 1}$

Wobec powyższych $x_3 > \sqrt{8}$ oraz $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$, więc $x_1^2 + x_2^2 < 1$.

(ii) $\boxed{x_1^n + x_2^n < 1}$

Dla $n = 1$ mamy $x_1 + x_2 = S_1 - x_3 < 3 - \sqrt{8} < 1$. Z kolei dla $n \geqslant 2$ mamy $x_1^n + x_2^n \leqslant |x_1|^n + |x_2|^n$. Wobec (i) prawa strona jest nie większa od $|x_1|^2 + |x_2|^2 = S_2 - x_3^2 < 1$.

(iii) $\boxed{x_1^n + x_2^n > 0}$

Wobec powyższych mamy $x_3 < 3$ i $x_1 + x_2 = 3 - x_3 > 0$, więc $|x_2| > |x_1|$. Zatem $|x_2|^n > |x_1|^n$, co natychmiast daje $x_2^n + x_1^n > 0$

Na mocy (ii) oraz (iii) dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $x_1^n + x_2^n \in (0, 1)$. Zatem $\lceil x_3^n \rceil = \lceil S_n - (x_1^n + x_2^n) \rceil = S_n$ jest liczbą podzielną przez 3, co było do udowodnienia.

Zadanie 2.

Niech $k > 1$ będzie ustaloną liczbą nieparzystą oraz dla liczb całkowitych $n \geqslant 0$ niech

$$f_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ k \mid n-2i}} \binom{n}{i}$$

Udowodnić, że f_n spełnia następującą rekurencję:

$$f_n^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i f_{n-i}$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy z własności pierwiastków z jedności. Niech $\xi = e^{2\pi i/k}$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} \xi^{tm} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k \mid m, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Pozwala nam to uprościć wzór definiujący f_n:

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{t=0}^{k-1} \xi^{t(n-2i)} = \sum_{t=0}^{k-1} \xi^{tn} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\xi^{-2t})^i =$$
$$= \sum_{t=0}^{k-1} \xi^{tn} (1 + \xi^{-2t})^n = \sum_{t=0}^{k-1} (\xi^t + \xi^{-t})^n.$$

Dla $t \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ rozważmy $a_t = \xi^t + \xi^{-t}$. Wówczas pozostało wykazać, że

$$\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{k-1}(a_p a_q)^n = f_n^2 \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{k-1} a_p^i a_q^{n-i} = \\ = \sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{k-1}(a_p + a_q)^n.$$

Zauważmy jednak, że

$$a_p a_q = (\xi^p + \xi^{-p})(\xi^q + \xi^{-q}) = \xi^{p+1} + \xi^{p-q} + \xi^{q-p} + \xi^{-p-q} = a_{p+q} + a_{p-q},$$

przy czym indeksy rozważamy modulo k. Czytelnik zechce sprawdzić, że dla nieparzystych k odwzorowanie $(p, q) \mapsto (p + q, p - q)$ jest bijekcją w zbiorze $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^2$. To kończy dowód.

Zadanie 3. (IMO Shortlist 2016 A3)
Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 3$ o tej własności, że dla wszystkich ciągów liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, spełniających $|a_k| + |b_k| = 1$ dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$, istnieją takie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1, -1\}$, że

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} x_k b_k\right| \leqslant 1.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że liczby

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = b_n = 0, \qquad b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = a_n = 1$$

spełniają założenia zadania. Jednak jeśli $n \geqslant 4$ jest parzyste, to

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} x_k b_k\right| \geqslant 2,$$

ponieważ obie te sumy są nieparzystymi liczbami całkowitymi niezależnie od doboru x_k.

Wykażemy następnie, że wszystkie liczby nieparzyste nie mniejsze od 3 mają żądaną własność. Bez straty ogólności załóżmy, że wszystkie b_k są nieujemne, zmieniając ewentualnie znaki a_k, b_k i x_k na przeciwne. Czytelnik zechce zauważyć, że możemy również przyjąć

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m \geqslant 0 > a_{m+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n.$$

Sprawdźmy, że wówczas $x_k = (-1)^{k+1}$ spełniają warunki zadania. Niech

$$S = \sum_{k=1}^{m} x_k a_k, \quad T = \sum_{k=m+1}^{n} x_k a_k.$$

Wówczas łatwo sprawdzić, że $S \geqslant 0$, ponadto

$$S = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots \leqslant a_1 \leqslant |a_1| + |b_1| = 1.$$

Analogicznie $T \in [-1, 0]$. Zauważmy, że z założenia $a_k + b_k = |a_k| + |b_k| = 1$ dla $k \leqslant m$ oraz $-a_k + b_k = 1$ dla $k > m$. Zatem

$$\sum_{k=1}^{n} x_k b_k = \sum_{k=1}^{m} x_k(1 - a_k) + \sum_{k=m+1}^{n} x_k(1 + a_k) = \\ = \sum_{k=1}^{n} x_k - S + T = 1 - S + T,$$

ponieważ n jest nieparzyste. Pozostało sprawdzić, że jeśli tylko $-1 \leqslant T \leqslant 0 \leqslant S \leqslant 1$, to zachodzi nierówność

$$|S + T| + |1 - S + T| \leqslant 1.$$

Wartość po lewej stronie możemy rozważać jak funkcję f zmiennej $S \in [0, 1]$. Wówczas

$$f(0) = f(1) = |T| + |1 + T| = (-T) + (1 + T) = 1.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że funkcja f jest wypukła.

Zadanie 4. (60 OM, III etap, zadanie 3)
Niech P, Q, R będą wielomianami stopnia co najmniej jeden, o współczynnikach rzeczywistych, spełniającymi dla każdej liczby rzeczywistej x równości

$$P(Q(x)) = Q(R(x)) = R(P(x)).$$

Wykazać, że $P = Q = R$.

Rozwiązanie:
Czytelnik zechce zauważyć, że wielomiany P, Q , R są tego samego stopnia. Niech $n := \deg P = \deg Q = \deg R$. Wówczas współczynniki przy x^n we wszystkich tych wielomianach są równe. Rozważmy wielomian

$$K(x) = P(x) - Q(x),$$

wtedy $d := \deg K \leqslant n - 1$. Ponieważ z założenia $P(Q(x)) = Q(R(x))$, otrzymujemy

$$Q(Q(x)) + K(Q(x)) = Q(R(x)),$$

a stąd

$$K(Q(x)) = Q(R(x)) - Q(Q(x)).$$

Stopień lewej strony wynosi nd. Stopień prawej strony jest równy stopniowi wielomianu

$$R(x)^n - Q(x)^n = (R(x) - Q(x)) \left(R(x)^{n-1} + \cdots + Q(x)^{n-1}\right). \tag{2}$$

Jeśli $R = Q$, to $K = 0$ i natychmiast $P = Q = R$. Przypuśćmy zatem, że wielomiany R i Q są różne. Wówczas stopień prawej strony wyrażenia (2) jest nie mniejszy od $n(n - 1)$, natomiast stopień lewej strony wynosi nd, przy czym $d \leqslant n - 1$. Zatem musi zachodzić równość $d = n - 1$ oraz stopień wielomianu $R - Q$ to 0, czyli $R(x) = Q(x) + c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$.

Analogicznie, jeśli nie $P = Q = R$, to $P(x) = R(x) + e$ dla pewnego $e \in \mathbb{R}$. gdzie e jest stałą. Wtedy

$$K(x) = P(x) - Q(x) = c + e,$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wbrew temu, że $\deg K = n - 1$. Zatem musi zachodzić $P = Q = R$, co było do wykazania.

Zadanie 5.
Znaleźć wszystkie funkcje $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ spełniające równanie

$$f\left(f(x)y + \frac{x}{y}\right) = xyf(x^2 + y^2).$$

Rozwiązanie:
Dla ustalonego x, niech y_x będzie dowolnym dodatnim rozwiązaniem równania

$$f(x)y_x + \frac{x}{y_x} = x^2 + y_x^2.$$

Po wymnożeniu stronami przez y_x i przeniesieniu wszystkiego na jedną stronę, zauważamy, że y_x musi być miejscem zerowym wielomianu

$$g(y) = y^3 - f(x)y^2 + x^2y - x.$$

Stąd y_x istnieje dla każdego x, ponieważ $g(0) < 0$ oraz $\lim_{y\to\infty} g(y) = +\infty$ niezależnie od x.

Po postawieniu $y = y_x$ do wyjściowego równania otrzymujemy

$$f\left(f(x)y_x + \frac{x}{y_x}\right) = xy_xf(x^2 + y_x^2) \implies y_x = \frac{1}{x}.$$

Wówczas z definicji y_x mamy

$$\frac{f(x)}{x} + x^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \implies f(x) = \frac{1}{x}.$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że powyższa funkcja spełnia dane równanie.

Zadanie 6.
Wyznaczyć wszystkie dodanie liczby całkowite a, b spełniające równanie:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=1.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że

$$\begin{aligned}1&=\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right)^3\\&=\left(a+\sqrt{b}\right)+\left(a-\sqrt{b}\right)+3\cdot\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right)\\&=2a+3\sqrt[3]{a^2-b}.\end{aligned}$$

Wobec powyższego

$$\begin{aligned}\left(3\sqrt[3]{a^2-b}\right)^3&=(1-2a)^3,\\27(a^2-b)&=1-6a+12a^2-8a^3,\\27b&=8a^3+15a^2+6a-1.\end{aligned}$$

Rozważmy powyższe równanie modulo 3. Wówczas wnioskujemy, że $a\equiv 2 \pmod 3$, czyli $a=3k+2$ dla pewnego $k\in\mathbb{Z}$, $k\geqslant 0$. Stąd

$$\begin{aligned}27b&=8a^3+15a^2+6a-1\\&=8(3k+2)^3+15(3k+2)^2+6(3k+2)-1\\&=27\left(8k^3+21k^2+18k+5\right),\end{aligned}$$

więc $b=8k^3+21k^2+18k+5$.

Zatem jedynymi rozwiązaniami mogą być pary postaci

$$(a,b)=(3k+2,8k^3+21k^2+18k+5),$$

gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą. Czytelnik zechce przekonać się, że każda taka para jest rozwiązaniem wyjściowego równania (wykonane przekształcenia były równoważne). □

Zadanie 7. (Zwardoń 2007, mecz matematyczny)
Parami różne liczby całkowite dodatnie c_1, c_2, …, c_n spełniają warunek

$$\tfrac{1}{c_1}+\tfrac{1}{c_2}+\ldots+\tfrac{1}{c_n}\geqslant 2.$$

Udowodnić, że zbiór c_1, c_2, …, c_n posiada dwa rozłączne podzbiory o tej samej sumie elementów.

Rozwiązanie:
Wystarczy wymagać, aby podzbiory były różne – gdyby $A\cap B\neq\varnothing$, to możemy wziąć $A\setminus B$ oraz $B\setminus A$.

Przypuśćmy, że sumy elementów wszystkich podzbiorów są parami różne. Chcemy pokazać, że wówczas zachodzi $\sum_{i=1}^n 1/c_i<2$, co z zasady kontrapozycji da nam tezę zadania.

Rozważmy wielomian

$$P(x)=\prod_{i=1}^n\left(1+x^{c_i}\right),$$

wtedy z założenia dla wszystkich $x\in(0,1)$ zachodzi nierówność

$$P(x)=\sum_{B\subseteq A}x^{s(B)}<\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x},$$

przy czym $s(B)=\sum_{a\in B}a$.

Z własności logarytmów dostajemy

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(1+x^{c_i}) < -\ln(1-x).$$

Po podzieleniu obustronnie przez x oraz obustronnym scałkowaniu, mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+x^{c_i})}{x}\,\mathrm{d}x < -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Dla każdej z całek z lewej strony stosujemy podstawienie $y = x^{c_i}$. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+x^{c_i})}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{x}\frac{\mathrm{d}y}{c_i x^{c_i-1}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}\right) \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Zatem

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}\right) \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y < -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Rozwijamy wyrażenia pod całkami w szereg Taylora:

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots \implies \frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^k}{k+1},$$
$$\ln(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \cdots \implies -\frac{\ln(1-y)}{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k+1}.$$

Po scałkowaniu odpowiednich szeregów otrzymamy

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}\right) \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^k}{k+1}\,\mathrm{d}y < \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k+1}\,\mathrm{d}y$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}\right) \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_0^1 < \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_0^1$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Wstawiamy teraz wartości znanych szeregów zbieżnych, aby dostać nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}\right) \frac{\pi^2}{12} < \frac{\pi^2}{6} \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} < 2$$

wbrew założeniu. Wobec tego istnieją dwa podzbiory o równych sumach elementów.

Zadanie 8.
Wewnątrz trójkąta ABC znajduje się punkt P. Przecięcia AP i BC, BP i AC, CP i AB to odpowiednio X, Y, Z. Punkty Y i Z spełniają zależności: $AZ^2 = CZ \cdot ZP$ i $AY^2 = YB \cdot YP$. Punkty K i L to odpowiednio przecięcia $\odot(XAB)$ i AC, $\odot(XAC)$ i AB. Udowodnić, że $KL \parallel BC$

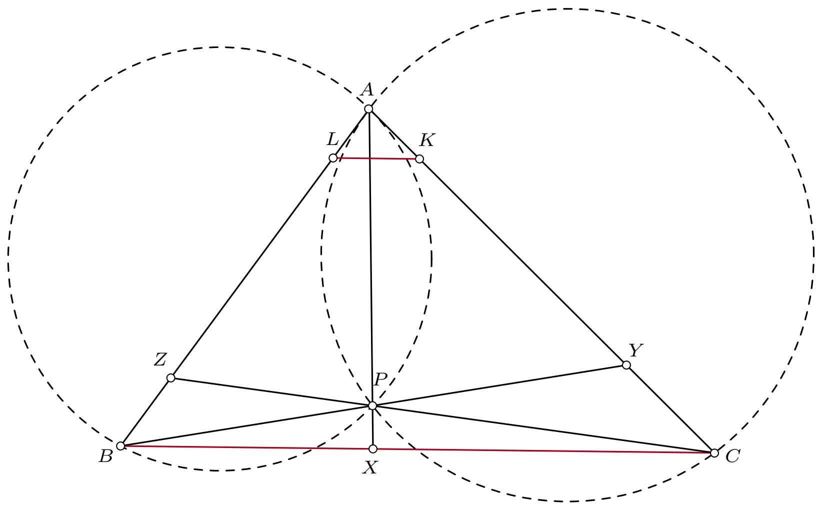
Rozwiązanie:
Ponieważ $AZ^2 = CZ \cdot ZP$ oraz $AY^2 = YB \cdot YP$, z potęgi punktu wiemy, że punkt P leży na okręgu stycznym do AB przechodzącym przez punkty A i C oraz stycznym do AC przechodzącym przez punkty A i B. Oznacza to, że punkt P to *Dumpty point* trójkąta ABC. Wobec tego punkt P leży na symedianie z punktu A w tym trójkącie. Na mocy twierdzenia o symedianie

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Po skorzystaniu z potęgi punktu dostajemy $BA \cdot BL = BX \cdot BC$ oraz $CA \cdot CK = CX \cdot BC$. Po podzieleniu tych równości stronami

$$\frac{BL}{CK} = \frac{BA}{CA}.$$

Teza zadania wynika natychmiast z twierdzenia Talesa.



Zadanie 9.
W trójkącie ABC ze środkiem okręgu wpisanego I prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Niech J to odbicie I względem BC oraz niech SJ przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $P \neq S$. Wykazać, że $AI = IP$.

Rozwiązanie:
Zacznijmy od przekształcenia tezy do jej równoważnej postaci. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A tego trójkąta. Zauważmy, że $AO = OS$ są promieniami, więc

$$AI = IP \iff \sphericalangle IPA = \sphericalangle IAP \iff \sphericalangle IPO = \sphericalangle IAO = \sphericalangle ISO,$$

ponieważ $AO = OP$. W takim razie teza jest równoważna stwierdzeniu, że czworokąt $IPSO$ jest cykliczny, co dalej możemy przekształcić do postaci

$$\sphericalangle OIS = \sphericalangle OPS \iff \sphericalangle OIS = \sphericalangle OSP,$$

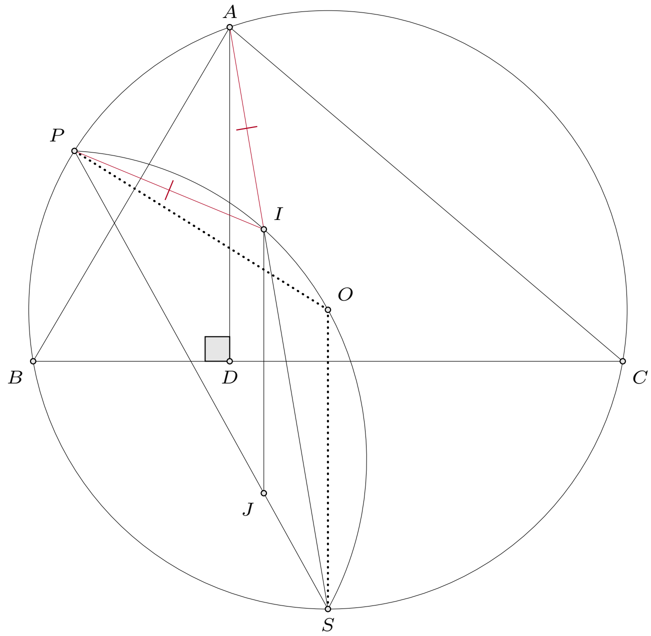
ponieważ $OS = OP$. Zauważmy, że z definicji punktu J zachodzi $IJ \perp BC$ oraz na mocy faktu, że symetralna boku w trójkącie przechodzi przez środek okręgu opisanego, otrzymujemy $OS \perp BC$, skąd $OS \parallel IJ$. W takim razie $\sphericalangle OSP = \sphericalangle IJP$, czyli wystarczy, że udowodnimy

$$\sphericalangle OIS = \sphericalangle OSP \iff \sphericalangle IJS = 180^\circ - \sphericalangle OIS = 180^\circ - \sphericalangle IJP = \sphericalangle AIO.$$

To motywuje nas do wzmocnienia tezy, ponieważ twierdzimy, że $\triangle AIO \sim \triangle IJS$ (trójkąty zgodnie zorientowane). To finalna postać tezy, którą będziemy chcieli pokazać. Przypomnijmy, że $IJ \perp BC$ oraz z definicji wysokości otrzymujemy $AD \perp BC$. W takim razie $AD \parallel IJ$, czyli $\sphericalangle SIJ = \sphericalangle DAI$. Znanym jest fakt, że ortocentrum trójkąta jest sprzężone izogonalnie ze środkiem okręgu opisanego. Stąd wiemy, że proste AD oraz AO są symetryczne względem prostej AI, czyli $\sphericalangle OAI = \sphericalangle DAI$, więc $\sphericalangle SIJ = \sphericalangle OAI$. Pozostaje poznać stosunki długości odpowiednich odcinków, aby wykazać wzmocnioną tezę. Niech R i r oznaczają odpowiednio promień okręgu opisanego i wpisanego w trójkąt ABC. Wówczas z potęgi punktu względem okręgu opisanego oraz z twierdzenia Eulera otrzymujemy, że

$$AI \cdot IS = R^2 - OI^2 = R^2 - R(R - 2r) = 2Rr = 2 \cdot AO \cdot \frac{IJ}{2} = AO \cdot IJ.$$

W takim razie $AI/AO = IJ/IS$, co daje postulowane podobieństwo trójkątów.

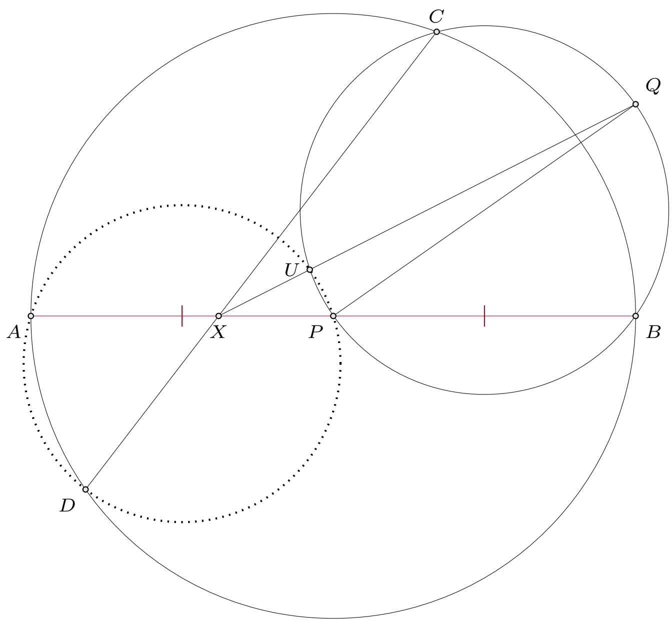


Zadanie 10.
Punkty C oraz D leżą na okręgu o średnicy AB. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie X, a punkt P jest środkiem odcinka AB. Okrąg ω jest opisany na trójkącie CPB, a Q to antypoda P w okręgu ω. Nazwijmy U przecięcie prostej QX z okręgiem ω. Udowodnić, że punkty A, D, P oraz U leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Udowodnimy najpierw, że czworokąt $DUXB$ jest cykliczny. Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle CDB$. Przenosimy kąty po okręgu i otrzymujemy $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB$. Jako, że punkt P to środek okręgu $\odot(ABCD)$, to $\sphericalangle CPB = 2\alpha$. Zauważmy, że punkt Q to środek łuku BC okręgu ω, ponieważ $PC = PB$ oraz prosta PQ przechodzi przez punkt O. W takim razie $\sphericalangle QUB = \alpha = \sphericalangle XDB$, więc czworokąt $DUXB$ jest cykliczny.

$$\sphericalangle DUP = 360^\circ - \sphericalangle PUX - \sphericalangle DUX = 360^\circ - 90^\circ - 180^\circ + \sphericalangle XBD = 180^\circ - \sphericalangle DAB,$$

czyli $\sphericalangle DUP + \sphericalangle DAP = 180^\circ$. Oznacza to, że punkty A, D, P oraz U leżą na jednym okręgu.



Zadanie 11. (65 OM, III etap, zadanie 6)
W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R. Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że czworokąt $AMND$ jest cykliczny, ponieważ $\sphericalangle AMD = \sphericalangle AND = 90°$. Niech $\alpha = \sphericalangle BAD$ oraz $\beta = \sphericalangle CAD$. Przenosimy kąty po okręgu i otrzymujemy

$$\sphericalangle DMN = \beta \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle DNM = \alpha.$$

Zauważmy, że

$$\sphericalangle PMA = \sphericalangle BMN = 90° + \beta = 180° - (90° - \beta) = 180° - \sphericalangle ACB = \sphericalangle APB.$$

W takim razie $\triangle APM \sim \triangle APB$ są podobne z cechy kąt-kąt-kąt. Oznacza to, że

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle ABP = \sphericalangle AQP,$$

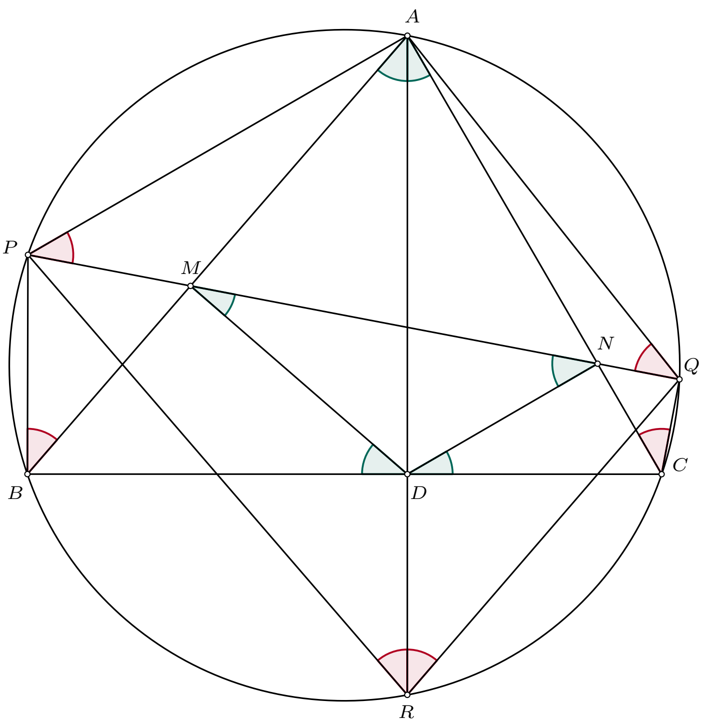
czyli $AP = AQ$. Wynika stąd, że AR to dwusieczna $\sphericalangle PRQ$. Z podobieństwa $\triangle AMD \sim \triangle ADB$ otrzymujemy następującą równość

$$\frac{AD}{AM} = \frac{AB}{AD}, \qquad \text{więc} \qquad AD^2 = AB \cdot AM.$$

Natomiast z podobieństwa $\triangle APM \sim \triangle APB$ otrzymujemy, że

$$\frac{AM}{AP} = \frac{AP}{AB}, \qquad \text{więc} \qquad AP^2 = AB \cdot AM = AD^2,$$

czyli $AP = AD = AQ$. Stąd z twierdzenia o trójliściu punkt D to środek okręgu wpisanego w trójkąt PQR.



Zadanie 12.
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest rozwarty. Punkty E, F są punktami przecięcia dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku A z wysokościami trójkąta ABC opuszczonymi odpowiednio z wierzchołków B, C. Punkty M, N leżą odpowiednio na odcinkach EC, FB i spełniają $\sphericalangle EMA = \sphericalangle BCA$ oraz $\sphericalangle ANF = \sphericalangle ABC$. Wykazać, że punkty E, F, N i M leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:
Niech $2\alpha = \sphericalangle BAC$, $2\beta = \sphericalangle ABC$, $2\gamma = \sphericalangle ACB$. Niech H_B, H_C oznaczają spodki wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C w trójkącie ABC. Ponadto niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC.

Skoro EF to dwusieczna zewnętrzna, to mamy $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAC = 90° - \alpha$. Ponadto wiemy, że czworokąt BH_CH_BC jest cykliczny, ponieważ $\sphericalangle BH_CC = \sphericalangle BH_BC = 90°$. Stąd

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle H_CBH_B = \sphericalangle H_CCH_B = \sphericalangle ACF.$$

Zatem mamy podobieństwo $\triangle EAB \sim \triangle FAC$, z którego wynika, że

$$\sphericalangle AEH = 180° - \sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle AFC = \sphericalangle AFH,$$

czyli $HE = HF$. Dodatkowo $AE/AF = EB/CF$. Zauważmy, że czworokąty AH_CHH_B oraz H_CH_BCB są cykliczne. Zatem

$$\sphericalangle AHE = \sphericalangle AHH_C = \sphericalangle AH_BH_C = \sphericalangle BH_BH_C = \sphericalangle H_CCB = 2\gamma.$$

Analogicznie $\sphericalangle AHF = 2\beta$. Niech H' będzie odbiciem punktu H względem prostej EF. Wtedy

$$\sphericalangle AH'E = 2\gamma \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AH'F = 2\beta.$$

Skoro $EH = FH$, to czworokąt $H'EHF$ jest rombem, więc

$$EH' \parallel HF, \quad H'F \parallel EH \quad \text{oraz} \quad EH = HF = FH' = H'E.$$

Przez X oznaczymy przecięcie prostej BF z prostą $H'E$, a przez Y przecięcie prostej EC z prostą $H'F$. Wtedy z twierdzenia Talesa otrzymujemy, że

$$1 + \frac{HE}{BE} = \frac{BH}{BE} = \frac{HF}{EX} = \frac{EH'}{EX} = 1 + \frac{XH'}{EX},$$

więc $HE/BE = XH'/EX$. Analogicznie dostajemy, że $H'Y/FY = HF/CF$. Mamy, że

$$\frac{AE}{AF} \cdot \frac{FY}{YH'} \cdot \frac{H'X}{XE} = \frac{EB}{FC} \cdot \frac{FC}{HF} \cdot \frac{HE}{EB} = 1,$$

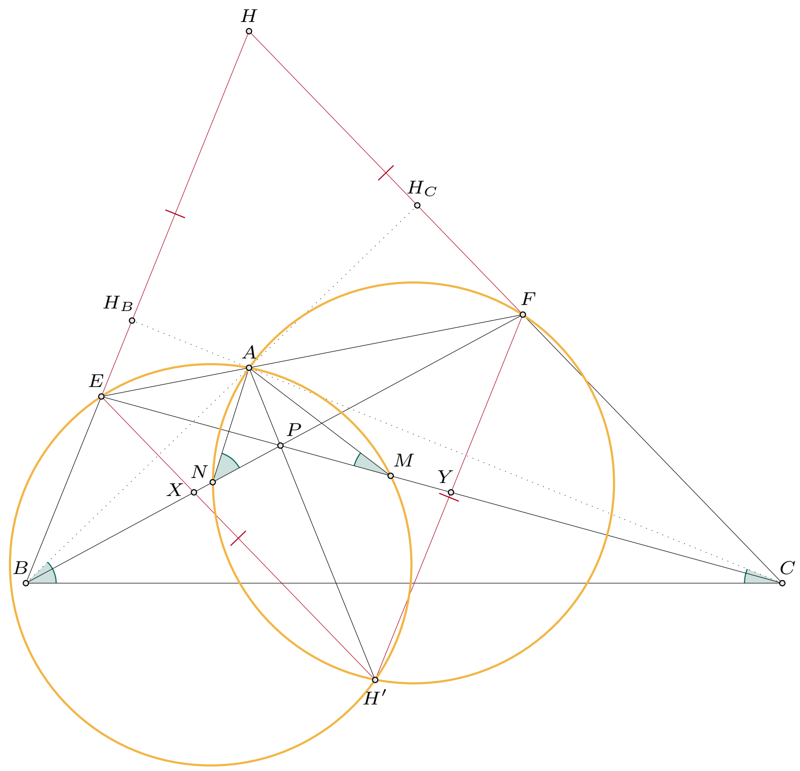
więc z twierdzenia Cevy otrzymujemy, że czewiany FX, EY, $H'A$ przecinają się w jednym punkcie, który oznaczmy jako P. Skoro

$$\sphericalangle AME = \sphericalangle ACB = 2\gamma = \sphericalangle AH'E$$

oraz punkty H', M leżą po tej samej stronie półprostej EF, co bok BC, to czworokąt $EAMH'$ jest cykliczny. Analogicznie czworokąt $FANH'$ jest cykliczny. Z potęgi punktu P względem obu okręgów otrzymujemy, że

$$PM \cdot PE = PA \cdot PH' = PF \cdot PN.$$

Skoro $PM \cdot PE = PF \cdot PN$, to z potęgi punktu dostajemy, że czworokąt $MNEF$ jest cykliczny.



Zadanie 13.
Dany jest zbiór A zawierający 2137 liczb. Największy dzielnik pierwszy każdej z liczb w zbiorze A jest mniejszy od 75. Udowodnić, że w zbiorze A są takie 4 liczby a, b, c, d, że $abcd$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:
Czytelnik zechce sprawdzić, że jest dokładnie 21 różnych liczb pierwszych mniejszych niż 75. Oznaczmy je kolejno przez $p_1, p_2, \ldots, p_{21}$.

Niech $f\colon A \to \{0,1\}^{21}$ będzie funkcją, która liczbie $x \in A$ przyporządkowuje wektor, który na i-tej pozycji ma resztę z dzielenia $v_{p_i}(x)$ przez 2. Teraz wystarczy wykazać, że istnieją takie $a, b, c, d \in A$, dla których:

$$f(a) \oplus f(b) \oplus f(c) \oplus f(d) = (0, \ldots, 0),$$

przy czym $\oplus$ oznacza dodawanie po współrzędnych modulo 2. Ponieważ $\oplus$ jest operacją łączną i przemienną oraz $f(a) \oplus f(a) = (0, \ldots, 0)$, możemy równoważnie wykazać, że

$$f(a) \oplus f(b) = f(c) \oplus f(d)$$

dla pewnych parami różnych $a, b, c, d \in A$.

Jeśli istnieją różne wektory v, w oraz takie $a, b, c, d \in A$, że $a \neq b$, $c \neq d$ oraz

$$f(a) = v = f(b) \quad \text{i} \quad f(c) = w = f(d),$$

to natychmiast otrzymujemy żądaną czwórkę liczb. Analogicznie, jeśli pewien wektor v jest wartością f dla czterech różnych liczb z A. Dalej załóżmy, że nie ma miejsca żadna z tych sytuacji. Wówczas istnieje taki zbiór $B \subseteq A$, że $|B| \geqslant 2135$ oraz f zawężona do B jest injekcją.

Oczywiście różnych wartości $f(x) \oplus f(y)$ jest co najwyżej 2^{21}, a różnych nieuporządkowanych par liczb $x, y \in B$ jest $\binom{2135}{2} > 2^{21}$. Zatem z zasady szufladkowej Dirichleta istnieją różne pary (x, y) i (u, v) liczb z B, dla których

$$f(x) \oplus f(y) = f(u) \oplus f(v).$$

Ponadto x, y, u i v muszą być różne. Istotnie, gdyby $x = u$, to $f(y) = f(v)$, więc z definicji zbioru B mamy $y = v$ wbrew temu, że pary są różne. To kończy dowód.

Zadanie 14. (IMO Shortlist 1991 P8)
Dany jest zbiór $n \geqslant 3$ punktów płaszczyzny S, z których żadne 3 nie są współliniowe. Wykazać, że istnieje taki zbiór T składający się z $2n-5$ punktów płaszczyzny, że każdy trójkąt wyznaczony przez 3 różne punkty zbioru S zawiera punkt ze zbioru T.

Rozwiązanie:
Niech l będzie taką prostą, że żadna z prostych PQ dla $P, Q \in S$ nie jest do niej prostopadła. Ponadto niech $\varepsilon > 0$ spełnia

$$\varepsilon < \inf\{d(P, QR) \mid P, Q, R \in S \text{ parami różne}\},$$

przy czym $d(A, BC)$ oznacza odległość punktu A od prostej BC.

Niech teraz $A_1, \ldots, A_n$ będą kolejnymi rzutami punktów $P \in S$ na prostą S i $P_k \in S$ oznacza punkt, którego rzutem jest A_k. Dla każdego $2 \leqslant k \leqslant n-1$ rozważmy punkty B_k i C_k leżące na prostej A_kP_k w odległości dokładnie ε od P_k. Wszystkich takich punktów jest dokładnie $2n-4$.

Każdy trójkąt wyznaczony przez 3 punkty ze zbioru S jest postaci $P_iP_jP_k$ dla $i < j < k$. Wówczas oba punkty B_j i C_j leżą po tej samej stronie prostej P_iP_k co punkt P_j i jeden z nich należy do wnętrza trójkąta $P_iP_jP_k$, ponieważ wobec $i < j < k$ punkty P_i oraz P_k leżą po przeciwnych stronach prostej B_jC_j.

Zbiór $2n-5$ punktów otrzymujemy następująco. Zauważmy, że otoczka wypukła S ma przynajmniej 3 wierzchołki, więc przynajmniej jeden z punktów $P_2, \ldots, P_{n-1}$ jest wierzchołkiem otoczki wypukłej. Dla takiego punktu P_j jeden z B_j lub C_j nie należy do otoczki wypukłej S, więc nie należy do wnętrza żadnego trójkąta $P_iP_jP_k$. Biorąc pozostałe $2n-5$ punktów, otrzymujemy zbiór T o odpowiedniej własności.

Zadanie 15. (Russian MO 2015)
Ryba rozpoczyna grę na w punkcie 0 osi liczbowej, na której zaznaczono wszystkie liczby całkowite. W k-tym ruchu ryba wybiera zwrot (w prawo lub w lewo) i przesuwa się w tę stronę o $2^k + 1$ jednostek. Zatem pierwszy ruch następuje o 3 jednostki, drugi ruch o 5 jednostek itd. Rozstrzygnąć, czy w taki sposób ryba może odwiedzić wszystkie liczby naturalne na tej osi, przy założeniu, że liczby mogą być odwiedzane wielokrotnie.

Rozwiązanie:
Sprawdźmy, że

$$(2^k+1) + (2^{k+1}+1) + \cdots + (2^{k+m}+1) - (2^{k+m+1}+1) = -2^k + m.$$

Stąd po przyjęciu $m = 2^k + 1$ powyższa suma jest równa 1. Jeśli zatem ryba znajduje się w punkcie x po wykonaniu dotychczas k skoków, może wykonać $2^k + 2$ skoków w prawo i jeden skok w lewo. Ryba znajdzie się wtedy w punkcie $x + 1$. Wobec tego ryba może odwiedzić wszystkie liczby naturalne, zaczynając od 0 i przechodząc kolejno do $1, 2, 3, \ldots$.

Zadanie 16.
Grzybiarz Marek znalazł w lesie $n = 2m$ swoich ulubionych grzybów – hub, rosnących na szczytach drzew o wysokościach kolejno $1, 2, \ldots, n$ metrów. Do zbierania grzybów Marek ma teleskopową drabinę o zakresie wysokości od 1 do n metrów (drabina o danej wysokości pozwala mu zebrać grzyby tylko z drzewa o tej wysokości). Początkowo drabina ma długość jednego metra (dłuższej nie byłby w stanie przywieść samochodem). Marek jest leniwy, więc nie chce zmieniać wysokości drabiny (zgodnie ze swoimi umiejętnościami rachunkowymi) więcej niż n razy. Marek potrafi mnożyć liczbę przez 2 i podać dokładny wynik lub pomniejszony o 1. Ponadto zauważył on, że liczenie na palcach jest ograniczające (pozwala mu liczyć tylko do dziesięciu) – do obliczeń używa więc teraz grzybów – co pozwala mu liczyć aż do n (po tej liczbie niestety licznik się przekręca). Udowodnić, że Marek może szczęśliwie wrócić z grzybobrania (wrócić samochodem wraz z wszystkimi grzybami oraz drabiną).

Rozwiązanie:
Należy wykazać, że istnieje taka permutacja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zbioru $1, 2, \ldots, n$ (wysokości drzew), że $x_1 = 1$ oraz

$$x_{i+1} \equiv 2x_i \quad \text{lub} \quad x_{i+1} \equiv 2x_i - 1 \pmod{n}$$

dla wszystkich $1 \leqslant i \leqslant n$, przy czym przyjmujemy $n + 1 = 1$.

Zauważmy, że jeśli $k \leqslant m$ oraz $x_i = k$ lub $x_i = m + i$, to w obu przypadkach mamy $x_{i+1} \in \{2k, 2k-1\}$. Rozważmy teraz graf skierowany G o wierzchołkach $\{1, \ldots, m\}$. Ponadto wierzchołek v połączymy skierowaną krawędzią z takim wierzchołkiem w, że $w \equiv 2v \pmod{m}$ i krawędź tę oznaczmy $2v$. Analogicznie dla $2v - 1$. W ten sposób każda z liczb $\{1, \ldots, n\}$ została przypisana dokładnie jednej krawędzi. Oczywiście $\operatorname{outdeg}(v) = 2$

dla każdego wierzchołka v. Zauważmy również, że $\operatorname{indeg}(v) = 2$, ponieważ do wierzchołka v wchodzą krawędzie v oraz $m + v$ (i tylko one). Zatem $\operatorname{indeg}(v) = \operatorname{outdeg}(v)$ dla każdego wierzchołka v.

Graf G jest słabo spójny, ponieważ do każdego wierzchołka v wchodzi krawędź z wierzchołka $\lfloor v/2 \rfloor$, czyli o mniejszym numerze. Zatem wszystkie wierzchołki są połączone ścieżką z wierzchołkiem 1. Wobec tego spełnione są założenie twierdzenia Eulera dla grafów skierowanych. Czytelnik zechce przekonać się, że kolejne etykiety krawędzi na uzyskanym cyklu Eulera stanowią permutację o żądanej własności.

Zadanie 17. (IMO Shortlist 2001 C5)
Wyznaczyć wszystkie taki skończone ciągi $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, że dla każdego $j \in \{0, \dots, n\}$ liczba x_j jest równa liczbie wystąpień liczby j w tym ciągu.

Rozwiązanie:
Niech $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunki zadania. Wówczas wszystkie wyrazy ciągu są nieujemnymi liczbami całkowitymi i są nie większe od n (łatwo wykluczyć $x_i = n + 1$). Ponadto $x_0 > 0$, ponieważ założenie $x_0 = 0$ prowadzi do sprzeczności.

Niech m będzie równe liczbie dodatnich wyrazów wśród $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ponieważ z równości $x_0 = p \geqslant 1$ wynika $x_p \geqslant 1$, musi zachodzić $m \geqslant 1$. Zauważmy ponadto, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m + 1,$$

bo suma ta zlicza na dwa sposoby liczbę dodatnich wyrazów w ciągu, z uwzględnieniem $x_0 > 0$.

Ponieważ dokładnie m dodatnich wyrazów sumuje się do $m + 1$, $m - 1$ z nich jest równe 1, a jeden wyraz jest równy 2. Wynika stąd, że jedynie x_0 może być większe od 2. Ponadto jeśli $j > 2$, to $x_j > 0$ jedynie, gdy $j = x_0$ i $x_j = 1$. Wobec tego $m \leqslant 3$.

Następnie osobno sprawdzamy trzy przypadki:

(i) $\boxed{m = 1}$ Należy sprawdzić, że $x_1 = 2$ jest niemożliwe. Zatem $x_2 = 2$, a stąd $x_0 = 2$. Jedynym rozwiązaniem w tym przypadku jest ciąg
$$(2, 0, 2, 0).$$

(ii) $\boxed{m = 2}$ Jeśli $x_1 = 2$, to $x_0 = 1$ i $x_2 = 1$, więc znajdujemy jedyny ciąg
$$(1, 2, 1, 0).$$
Podobnie gdy $x_2 = 2$, jedynym ciągiem jest
$$(2, 1, 2, 0, 0).$$

(iii) $\boxed{m = 3}$ W tym przypadku $x_p = 1$ dla pewnego $p \geqslant 3$ i $x_0 = p$. Wtedy $x_1 = 2$, ponieważ $x_1 = 1$ prowadzi do sprzeczności. Stąd $x_2 = 1$ i innych dodatnich wyrazów ciągu nie ma. Jedynym ciągiem o tej własności jest
$$(p, 2, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-3}, 1, 0, 0, 0).$$

Zadanie 18. (Maamoun, Meyniel 1987)
Dane są dodatnie liczby całkowite m i n. Marek i Mirek grają w grę. Marek ma planszę $m \times n$ (m wierszy i n kolumn), a Mirek ma planszę $1 \times n$. Na każdym polu każdej z plansz znajduje się dwustronny żeton, który jedną stronę ma czarną, a drugą białą. Na początku gry Marek ustawia w dowolny sposób żetony na swojej planszy. Następnie Mirek robi to samo na swojej planszy. Każdy następny ruch gracza polega na odwróceniu pewnej liczby żetonów (być może 0) na swojej planszy, przy czym w jednym ruchu gracz może odwrócić co najwyżej 1 żeton w każdym wierszu. Gracze wykonują takie ruchy na zmianę. Jeżeli w dowolnym momencie układ żetonów w jedynym wierszu planszy Mirka będzie taki sam, jak w którymś z wierszy planszy Marka, to Marek wygrywa. Wykazać, że Marek ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy $n < 2m$.

Rozwiązanie:
Zauważmy, że każdy wiersz możemy utożsamiać z wektorem $v \in \{0, 1\}^n$. Niech Q_n będzie grafem, którego wierzchołkami są wszystkie takie wektory, a wierzchołki sąsiadują ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się

dokładnie jedną współrzędną. Wówczas zasady gry odpowiadają temu, że Marek ustawia m pionków w wybranych wierzchołkach grafu Q_n, a Mirek jeden pionek. W każdym ruchu gracz może przesunąć każdy ze swoich pionków do sąsiedniego wierzchołka. Marek wygrywa, gdy *złapie* Mirka, czyli jeden z jego pionków znajdzie się w wierzchołku zajmowanym przez pionek Mirka.

Załóżmy, że $n \geqslant 2m$. Chcemy wykazać, że Mirek może skutecznie uciekać Markowi. Zauważmy, że jeśli Marek ustawił już swoje pionki, to wierzchołków w odległości co najwyżej 1 od pewnego z nich jest nie więcej niż

$$m(n+1) \leqslant \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} < 2^n.$$

Zatem Mirek może początkowo wybrać wierzchołek w odległości przynajmniej 2 od każdego z pionków Marka. Po wykonaniu ruchu przez Marka, niech v będzie wierzchołkiem, w którym stoi pionek Mirka. Jeśli każdy z pionków Marka jest w odległości przynajmniej 2, Mirek nie musi się ruszać. W przeciwnym wypadku niech S będzie zbiorem wierzchołków zajętych przez pionki Marka, które są w odległości co najwyżej 2 od v (tylko te pionki mogą go złapać w następnym ruchu). Każdy z wierzchołków $w \in S$ różni się od v co najwyżej dwoma współrzędnymi. Ponadto

$$2(|S|-1)+1 \leqslant 2m-1 < n,$$

więc istnieje taka współrzędna j, że $v_j = w_j$ dla każdego $w \in S$. Jeśli teraz Mirek przejdzie do wierzchołka, który różni się od v tylko na j-tej współrzędnej, to każdy pionek Marka ponownie znajdzie się w odległości co najmniej 2 od Mirka.

Wykażemy następnie, że $k_n := \lceil (n+1)/2 \rceil$ pionków wystarcza Markowi, aby złapać Mirka w grafie Q_n. Czytelnik zechce sprawdzić przypadki $n \in \{1,2\}$. Niech teraz $n \geqslant 3$ i załóżmy, że $m = k_{n-2}$ wystarcza w grafie Q_{n-2}. Rozważmy pozycję Mirka $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$ po t ruchach oraz jego *cień* $(0, 0, v_3(t), \ldots, v_n(t))$. Zauważmy, że gdy Mirek porusza się po grafie Q_n, jego cień porusza się po podgrafie $H \cong Q_{n-2}$ indukowanym przez wierzchołki o dwóch początkowych współrzędnych zerowych. Zatem po ustawieniu wszystkich $k_n > k_{n-2}$ pionków w tym podgrafie Marek jest w stanie doprowadzić do sytuacji, gdy jeden z jego pionków p spełnia $p_i(t) = v_i(t)$ dla pewnego t i wszystkich $i \geqslant 3$.

Następnie, jeśli Mirek zmienia współrzędną $j \geqslant 3$, to Marek wykonuje analogiczny ruch pionkiem p, aby powyższy warunek pozostał spełniony. W przeciwnym wypadku, pionek p nie rusza się, jeśli $p_1 \neq v_1$ oraz $p_2 \neq v_2$, lub łapie Mirka, gdy ma miejsce tylko jeden z tych warunków. Czytelnik powinien przekonać się, analizując możliwy przebieg gry dla $(m,n) = (1,2)$, że aby Marek nie wygrał, wartość (v_1, v_2) musi być od pewnego momentu stała. Jednak w maksymalnie dwóch ruchach pozostałe $k_n - 1 = k_{n-2}$ pionków Marka może przyjąć te same dwie początkowe współrzędne co pionek Mirka. Wówczas gra toczy się już na podgrafie izomorficznym z Q_{n-2}, gdzie Marek z założenia ma strategię wygrywającą, ponieważ ma k_{n-2} pionków. Wykazaliśmy zatem, że w grafie Q_n Markowi wystarczy k_n pionków.

Wobec powyższego rozumowania na mocy zasady indukcji matematycznej dla każdego $n \in \mathbb{N}$ Markowi wystarczy k_n pionków, aby złapać Mirka w grafie Q_n. Pozostało zauważyć, że jeśli tylko $n < 2m$, to $m \geqslant k_n$.

Zadanie 19.
Niech $C(k)$ oznacza sumę wszystkich dzielników pierwszych liczby k, na przykład

$$C(1) = 0, \quad C(2) = 2, \quad C(45) = 8.$$

Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite spełniające równość $C(2^n+1) = C(n)$.

Rozwiązanie:
Przypomnijmy w tym miejscu twierdzenie Zsigmondy'ego. Niech a i b będą względnie pierwsze oraz $a > b \geqslant 1$. Wówczas dla każdej liczby całkowitej $m \geqslant 1$ liczba $a^m - b^m$ ma taki dzielnik pierwszy p, który nie dzieli żadnej z liczb $a^k - b^k$ dla $m > k \geqslant 1$, chyba że ma miejsce jeden z poniższych wyjątków:

(i) $m = 1$ oraz $a - b = 1$,

(ii) $m = 2$ oraz $a + b$ jest potęgą dwójki,

(iii) $m = 6$, $a = 2$ i $b = 1$.

W szczególności dla $n > 3$ liczba $2^{2n} - 1$ zawsze ma pewien dzielnik pierwszy p, który nie dzieli żadnej z liczb $2^k - 1$ dla $k < 2n$. Wówczas $p \mid (2^n - 1)(2^n + 1)$ i $\mathrm{ord}_p(2) = 2n$, czyli $p \mid 2^n + 1$.

Ponieważ $p \neq 2$, z małego twierdzenia Fermata $2n = \operatorname{ord}_p(2) \mid p-1$. Stąd $p \geqslant 2n+1$ i oczywiście $C(2^n+1) \geqslant 2n+1 > n$. Zauważmy ponadto, że jeśli $p_1, \dots, p_k$ są wszystkimi dzielnikami pierwszymi n, to dla każdego $1 \leqslant i \leqslant k$ prawdziwa jest nierówność

$$n \geqslant p_1 p_2 \cdots p_k \geqslant 2^{k-1} p_i.$$

Po dodaniu wszystkich k takich nierówności otrzymujemy

$$n \geqslant \frac{k}{2^{k-1}} n \geqslant p_1 + p_2 + \cdots + p_k = C(n).$$

Zatem dla $n > 3$ zachodzi $C(n) \leqslant n < C(2^n+1)$.

Czytelnik zechce sprawdzić, że $n = 3$ spełnia warunki zadania, natomiast $n = 1$ i $n = 2$ nie. Zatem $n = 3$ jest jedyną liczbą o tej własności.

Zadanie 20. (Brazilian MO 2022)
Niech n będzie liczbą całkowitą. Przez $S(n)$ oznaczmy najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą następujące warunki:

(1) $S(n) \geqslant n$,

(2) $2 \mid S(n) - n$,

(3) nie istnieją takie dodatnie liczby całkowite k i $x_1, x_2, \dots, x_k$, że

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \quad \text{oraz} \quad S(n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2.$$

Udowodnić, że istnieje taka rzeczywista stała $c > 0$ oraz liczba całkowita n_0, że dla każdego $n \geqslant n_0$ zachodzi $S(n) \geqslant cn^{3/2}$.

Rozwiązanie:
Rozważmy następujący algorytm. Zaczynamy od n-elementowego wektora $(1, 1, \dots, 1)$. Następnie w każdym kroku, mając k-elementowy wektor $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, postępujemy w następujący sposób. Jeżeli istnieją indeksy $i \neq j$ takie, że $x_i = x_j$, wykonujemy operację

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_i - 1, \dots, x_j + 1, \dots, x_k)$$

i gdyby $x_i - 1 = 0$, usuwamy z wektora i-tą współrzędną. W przeciwnym razie algorytm kończy działanie.

Zauważmy, że w każdym momencie suma współrzędnych wektora jest równa n, a każdy krok zwiększa sumę kwadratów współrzędnych o 2.

Jeżeli algorytm kończy się w punkcie $(y_1, y_2, \dots, y_k)$, to

$$S(n) > y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2,$$

ponieważ ze względu na sposób działania algorytmu wykluczyliśmy wszystkie mniejsze liczby o tej samej parzystości co n. Ponadto wszystkie y_i są różne. Zatem

$$n = \sum_{i=1}^{k} y_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Stąd $2n \geqslant k^2$ i $k \leqslant \sqrt{2n}$. Wówczas z nierówności między średnią arytmetyczną a kwadratową

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2 \geqslant \frac{(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)^2}{k} \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} n^{3/2}.$$

Wobec tego stała $c = 1/\sqrt{2}$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 21. (Russian MO 2017)
Na tablicy znajduje się n dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$. Maria chce zapisać n liczb rzeczywistych $b_1, \dots, b_n$, takich że:

(1) $b_i \geqslant a_i$ dla każdego i,

(1) jeżeli $b_i \geqslant b_j$, to b_i/b_j jest liczbą całkowitą.

Udowodnić, że można dobrać takie liczby, spełniając dodatkowo warunek

$$b_1 \cdots b_n \leqslant 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 \cdots a_n.$$

Rozwiązanie:
Ciąg spełniający warunki (1)-(2) będziemy nazywać ciągiem *dobrym*. Rozważmy ciągi $b_1, b_2, \dots, b_n$, przy czym dla każdego i mamy $b_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,n})$ oraz $b_{i,j}$ są zdefiniowane następująco.

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{dla } j = i, \\ 2^k a_i & \text{dla } j \neq i, \end{cases}$$

przy czym k jest najmniejszą liczbą całkowitą, dla której $2^k a_i \geqslant a_j$. Każdy z tych ciągów jest dobry, ponieważ iloraz dowolnych dwóch wyrazów jest potęgą dwójki, a warunek (1) jest spełniony z definicji.

Zauważmy, że z definicji

$$b_{i,j} = 2^{\lceil \log_2(a_j/a_i) \rceil} a_i = 2^{\{\log_2(a_i/a_j)\}} a_j,$$

przy czym $\{\cdot\}$ oznacza część ułamkową. Wtedy iloczyn wszystkich elementów ciągów $b_{i,j}$ jest równy

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} 2^{\{\log_2(a_i/a_j)\}} a_j = 2^S (a_1 a_2 \cdots a_n)^n \quad \text{dla} \quad S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \{\log_2(a_i/a_j)\}.$$

Ponieważ prawdziwa jest równość

$$\{\log_2(a_i/a_j)\} + \{\log_2(a_j/a_i)\} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \log_2(a_i/a_j) \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

wartość sumy S jest nie większa od $\binom{n}{2}$.

Oznacza to, że co najmniej jeden z ciągów $(b_1), (b_2), \dots, (b_n)$ ma iloczyn wyrazów co najwyżej

$$\left(2^{\binom{n}{2}} (a_1 a_2 \cdots a_n)^n\right)^{1/n} = 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Ciąg ten spełnia warunki zadania.

Zadanie 22.
Niech liczby całkowite m i n będą dodatnie i względnie pierwsze. Udowodnić, że

$$\varphi(5^m - 1) \neq 5^n - 1.$$

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że $\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1$ i zapiszmy $N := 5^m - 1 = 2^\alpha {p_1}^{\alpha_1} \cdots {p_r}^{\alpha_r}$. Wówczas

$$\varphi(N) = 2^{\alpha-1} \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1),$$

więc

$$v_2(\varphi(N)) = (\alpha - 1) + \sum_{k=1}^{r} v_2(p_k - 1) \geqslant \alpha + r - 1.$$

Z kolei na mocy lematu LTE mamy $v_2(\varphi(N)) = v_2(5^n - 1) = 2 + v_2(n)$.

Zauważmy również, że
$$\gcd(N, \varphi(N)) = \gcd(5^n - 1, 5^m - 1) = 5^{\gcd(n,m)} - 1 = 4.$$
Stąd $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 1$.

Rozważmy najpierw n nieparzyste. Wówczas $v_2(5^n - 1) = 2$. Jeśli m jest parzyste, to z LTE $\alpha \geqslant 3$ i wobec powyższych $\alpha + r - 1 \leqslant 2 + v_2(n) = 2$, czyli $r = 0$ i $\alpha = 3$. Stąd jednak $5^m - 1 = 2^\alpha = 8$, co jest niemożliwe. Wobec uzyskanej sprzeczności m musi być nieparzyste. Wtedy $\alpha = 2$ i $r \leqslant 1$. Jeśli $r = 0$, to $5^m - 1 = 4$, co nie może zachodzić, ponieważ $\varphi(4) = 2 \neq 5^n - 1$. Stąd $r = 1$ i $N = 4p$ dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej p. Jednak wówczas
$$5^n - 1 = \varphi(N) = 2p - 2 \implies p = \frac{5^n + 1}{2},$$
co wymusza $p = 3$ i prowadzi do sprzeczności $5^m - 1 = 12$.

Jeśli jednak n jest parzyste, to m jest nieparzyste i znów $\alpha = 2$, więc
$$5^m - 1 = N = 4p_1p_2 \cdots p_r.$$
Dla każdego $p_k \mid N$ zachodzi zatem
$$5 \cdot \left(5^{\frac{m-1}{2}}\right)^2 \equiv 1 \pmod{p_k},$$
więc 5 jest resztą kwadratową modulo p_k. Z wzajemności reszt kwadratowych wnioskujemy, że p_k daje resztę 1 lub 4 z dzielenia przez 5. Jednak $p_k \equiv 1 \pmod 5$ jest niemożliwe, ponieważ wtedy $5 \mid p_i - 1$, więc $5 \mid \varphi(N) = 5^n - 1$. Stąd natychmiast wnioskujemy, że r jest parzyste – inaczej $N \equiv 1 \pmod 5$.

Wobec powyższego $4 \equiv \varphi(N) \equiv 2 \cdot 3^r \pmod 5$. Stąd jednak $3^r \equiv 2 \pmod 5$, co nie jest możliwe dla parzystego r, ponieważ 2 nie jest resztą kwadratową modulo 5.

Zadanie 23. (Balkan MO 2000)
Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje taki zbiór S składający się z n dodatnich liczb całkowitych, że dla dowolnie wybranych $1 \leqslant k \leqslant n$ elementów zbioru S ich średnia arytmetyczna jest potęgą o wykładniku większym od 1.

Rozwiązanie:
Udowodnimy najpierw następujący lemat: dla każdej dodatniej liczby całkowitej l istnieje taka dodatnia liczba całkowita d, że każda z liczb
$$\{d, 2d, \ldots, ld\}$$
jest potęgą o wykładniku większym niż 1. Rozważmy w tym celu
$$d = 2^{\alpha_2}3^{\alpha_3} \cdots l^{\alpha_l},$$
przy czym $\alpha_2, \ldots, \alpha_l \geqslant 1$. Jeśli spełnione będą własności

(a) istnieje taka dodatnia liczba całkowita $p \geqslant 2$, że
$$p \mid \gcd(\alpha_2, \ldots, \alpha_l),$$

(b) dla każdego $j \in \{2, \ldots, l\}$ istnieje $p_j \geqslant 2$ takie, że
$$p_j \mid \gcd(\alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + 1, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_l),$$

to liczba d ma żądaną własność. Ustalmy zatem liczby pierwsze
$$p > p_2 > p_3 > \cdots > p_l$$
oraz dopierzmy wykładniki α_j, tak aby jednocześnie $\alpha_j \equiv 0 \pmod p$, $\alpha_j \equiv -1 \pmod{p_j}$ oraz $\alpha_j \equiv 0 \pmod{p_i}$, o ile tylko $i \neq j$. Istnienie takich liczb $\alpha_2, \ldots, \alpha_l$ wynika bezpośrednio z chińskiego twierdzenia o resztach. To kończy dowód lematu.

Ustalmy teraz liczbę całkowitą $m \geqslant 1$ i rozważmy zbiór

$$S = \{m \cdot n!,\ 2m \cdot n!,\ \ldots,\ nm \cdot n!\}.$$

Zauważmy, że suma elementów każdego podzbioru $A \subseteq S$ jest postaci

$$\left(\sum_{j \in I} j\right) n!m \quad \text{dla pewnego } I \subseteq \{1, \ldots, n\},$$

zatem średnia arytmetyczna jest postaci km dla pewnego całkowitego

$$k \leqslant (1 + 2 + \cdots + n)n!.$$

Wystarczy teraz zastosować lemat dla $l = (1 + 2 + \cdots + n)n!$. To kończy dowód.

Zadanie 24.
Zbiór S dodatnich liczb całkowitych jest *fajny* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych dwóch $a, b \in S$ zachodzi $(a - b)^2 \mid ab$. Wykazać, że dla każdego n istnieje zbiór fajny o mocy co najmniej n.

Rozwiązanie:
Nietrudno sprawdzić, że zbiór $S_2 = \{1, 2\}$ jest fajny.

Załóżmy teraz, że istnieje zbiór fajny S_n zawierający dokładnie n elementów. Wówczas zbiór $S_n' = S_n \cup \{0\}$ także spełnia warunek podzielności z definicji zbioru fajnego, ponieważ

$$(a - 0)^2 = a^2 \mid 0 = a \cdot 0$$

dla każdego $a \in S_n$. Ponadto jeśli $S_n' = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, to dla

$$x = \prod_{i<j} (a_i - a_j)^2$$

zbiór $S_n' + x = \{a + x \mid a \in S_n'\}$ jest fajny. Istotnie, jeśli $a, b \in S_n'$, to

$$((a + x) - (b + x))^2 = (a - b)^2 \mid (a + x)(b + x),$$

ponieważ z założenia $(a - b)^2$ dzieli każdą z liczb ab i x. Zatem istnieje zbiór fajny o $n + 1$ elementach.

Wobec powyższych na mocy zasady indukcji matematycznej dla każdego $n \geqslant 2$ istnieje zbiór fajny o dokładnie n elementach. To kończy dowód.